

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Сетевая олимпиадная школа по физике, математике и астрономии

Избранные математические задачи

Мехмат ТГУ приглашает на праздник!
Комбинаторика с СОШ ФМА



Томск
2025

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
И.о. зав. кафедрой общей математики, доцент Ю.А. Лобода

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ
Протокол № 1 от 20.02.2025г.
Председатель комиссии доцент Е.А. Тарасов

В первой части учебно-методического пособия представлены материалы, связанные с празднованием Международного дня числа π на ММФ ТГУ, в частности загадки о числе π для самостоятельного исследования и правила математической игры про число π .

Во второй части рассматриваются избранные задачи комбинаторики по темам «Правила суммы и произведения», «Перестановки», «Размещения», «Сочетания», «Бином Ньютона». Представлены примеры решения некоторых задач и размещены QR-коды на разбор других задач, проводившийся преподавателями сетевой олимпиадной школы по физике, математике и астрономии для школьников. Имеются задачи для самостоятельного решения.

В заключении предложен тьюториал для знакомства с современной математикой.

Для школьников старших классов, учителей и преподавателей математики, студентов физико-математических и педагогических специальностей, а также для всех интересующихся математикой.

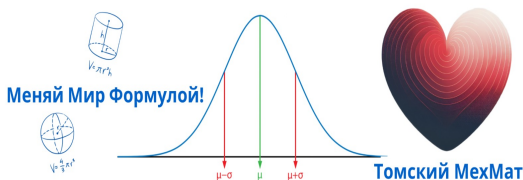
Авторы и составители: Гриншпон Я.С., Сидоровский Е.А.,
Королева А.М., Галанова Н.Ю., Лобода Ю.А., Подстригич А.Г.,
Лазарева Е.Г., Старосельцева А.А.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХМАТ ПРИГЛАШАЕТ НА ПРАЗДНИК!	3
– загадки про число π	6
– игра «Собери число π в Дек»	9
СЕТЕВАЯ ОЛИМПИАДНАЯ ШКОЛА ПО ФИЗИКЕ, МАТЕМАТИКЕ И АСТРОНОМИИ (СОШ ФМА)	12
КОМБИНАТОРИКА С СОШ ФМА	13
– правила суммы и произведения	14
– перестановки	17
– размещения	25
– сочетания	30
– бином Ньютона	37
ЧТО ИЗУЧАЕТ СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА? . .	49
– образовательные программы на ММФ	49
– виртуальное путешествие на кафедры ММФ	50
– тьюториалы	52
– рабочая профессия на ММФ – «Помощник программиста»	52
– профессия преподаватель математики и информатики на ММФ – Учительский трек	53
– профессиональная магистратура на ММФ – «Моделирование и цифровые двойники»	53

МЕХМАТ ПРИГЛАШАЕТ НА ПРАЗДНИК!

Все мы любим праздники! А вы знаете, какие есть праздники, связанные с математикой? Друзья, у нас для вас хорошая новость! Появился официальный профессиональный математический праздник **День математика**, утвержденный приказом Минпросвещения Российской Федерации № 1086-р от 3 мая 2024 года, который теперь отмечается **1 декабря** и приурочен ко дню рождения русского математика, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии Николая Ивановича Лобачевского. Давайте, праздновать вместе с МехМатом!



Любимый неофициальный праздник математиков – **Международный День числа π** отмечается во всём мире **14 марта** с 1987 года.

Число π – математическая константа, равная отношению длины окружности к длине её диаметра, выражается бесконечной непериодической десятичной дробью

$$\pi = \mathbf{3,1415926535897932384626433832795...}$$

Никто не знает и не может записать все цифры числа π , его приближения искали с древности. В настоящее время известно около 202 триллионов знаков-цифр числа π , которые используются для тестирования суперкомпьютеров. Через число π выражается длина окружности, площадь круга, число π имеет многочисленные применения в математике, физике, технике и др.

На Механико-математическом факультете ТГУ Международный День числа π отмечается 14 марта с 2012 года.

Основное празднование проходит 14 марта с мастер-классами, играми, конкурсами и конечно **чаепИтием с ПИрогами и ПИццей**. Информацию о праздновании дня числа π можно найти на сайтах ММФ в социальных сетях:

ВКонтакте: https://vk.com/mexmat_tsu

Telegram: https://t.me/mmf_tsu

Сайт для абитуриентов: <http://www.mmf-tsu.ru>

Сайт Научно-Образовательного Математического Центра ТГУ:
<https://nomc.math.tsu.ru/uchitelyam-i-shkolnikam/us/den-chisla-pi/>

или воспользовавшись QR-кодом сайта Научно-Образовательного Математического Центра ТГУ:



Будем рады видеть Вас на нашем ежегодном празднике –
Дне числа π !

Стал уже традиционным, приуроченный ко Дню числа π , конкурс видеороликов Math-видео



РЕГИОНАЛЬНЫЙ
НАУЧНО-
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ

ШКОЛЬНИКАМ И СТУДЕНТАМ

Math-видео

Конкурс видеороликов



Подробности на сайте: <https://nomc.math.tsu.ru> в разделе [Новости](#)

01 Ознакомьтесь с [положением о конкурсе](#) и придумайте математическую идею для видео

02 Подготовьте видеоролик длительностью от 15 секунд до 15 минут

03 Загрузите видеоролик на Яндекс диск (облачный сервис компании Яндекс)

04 Заполните до 7 марта [анкету участника](#) и разместите в ней ссылку на видеоролик

Объявление победителей и призеров конкурса, а также их награждение пройдет 14 марта в рамках празднования Международного дня числа Пи в ТГУ

[Победители](#) прошлых лет



[mmf tsu](#)



[mexmat tsu](#)



[mmf-tsu.ru](#)

С 2025 года на мехмате ТГУ проходит Фестиваль проектных и исследовательских творческих работ «Пройди путь открытия с Томским Мехматом», приуроченный к Дню числа π , где можно поучаствовать в **КВИЗЕ о числе π , сделать модель, поиграть в математические игры, представить своё решение загадки о числе π** . Предлагаем вам загадки о числе π как темы для исследования, изучая которые ваша команда сможет пройти часть долгого и очень интересного пути открытия числа π . Благодарим группу студентов Института образования ТГУ – Трухалеву Елизавету, Аксёнову Екатерину и Архипову Любовь, которые помогли придать формулировкам загадок гуманитарную лёгкость!

ЗАГАДКИ про число π

ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН (1900-1600 гг. до н.э.)

Загадка 1: «Вавилонская загадка». В чём магия числа 6, обнаруженная вавилонскими учёными? Как объяснить рецепт нахождения длины хорды, известный халдеям, с помощью современной математики? Какие значения для числа π использовали в древнем Вавилоне? Подсказка: их вычисления площади круга таятся в древних глиняных табличках.

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ (около 1600 года до н.э.)

Загадка 2: «Чудо Древнего Египта». Как архитектор, строивший пирамиды, смог бы измерить площадь круга с помощью веревки, если единственное, что он знает, – это дроби и примитивная геометрия? Подсказки: в папирусе Ринда есть рецепт для нахождения площади круга, в нём зашифровано приближение числа π . Известный египетский рецепт – приближение площади круга площадью квадрата со стороной, равной $8/9$ диаметра.

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ (около 3-го века до н.э.)

Загадка 3: «Секрет Архимеда». Как древний грек мог определить, что длина окружности связана с ее диаметром, если инструментов почти не было? В чём секреты Архимеда приближённого вычисления числа π ? Подсказки: Архимед использовал вписанные и описанные многоугольники для вычисления числа π . Чем больше сторон у многоугольника, тем точнее приближение.

ДРЕВНЯЯ ИНДИЯ (от 800 г. до н.э. до 200 г. н.э.)

Загадка 4: «Мудрецы Древней Индии». Как древний индийский математик мог описать длину окружности, используя только стихи и числа, которые легко запомнить? Подсказки: в трактате «Сиддхант», в трактате индийского астронома и математика Ариабхаты и других трактатах приводятся расчеты, связанные с числом π . Индийские математики использовали числа в форме стихов для упрощения запоминания.

ДРЕВНИЙ КИТАЙ (3-й век н.э.)

Загадка 5: «Тайна Китая». Как китайский ученый мог вычислить значение числа π с потрясающей точностью, если у него было только чернильное перо и бамбуковые палочки для записей? Подсказки: китайцы, такие как Лю Хуэй, использовали метод увеличения количества сторон многоугольников, чтобы получить точное значение, при этом был придуман специальный алгоритм для вычислений. Для 3072-угольника они приблизили π до 3,1416.

СРЕДНИЕ ВЕКА (5 в.-16 в. н.э.)

Загадка 6: «Средневековый поиск». Почему в средневековой Европе число π стало «забытым», каким образом ученые, такие как Виет (1540-1603) снова возвратили его в научный мир?

Подсказки: В Средние века интерес к античным открытиям затих, но затем был возрожден. Франсуа Виет нашел способ выразить π через бесконечные произведения.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА (20 в., 21 в. н.э.)

Загадка 7: «Компьютерные гонки за числом π ». Почему с изобретением компьютеров вычисление числа π стало состязанием среди ученых, и какую роль в этом сыграли алгоритмы?

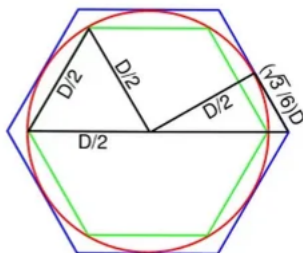
Подсказки: современные методы вычисления π базируются на численных алгоритмах, таких как, например, алгоритм Монте-Карло. Некоторые ученые нашли π через вероятность (например, бросание иглока).

ВАША ЗАГАДКА, СВЯЗАННАЯ С ИСТОРИЕЙ

ЧИСЛА π . Загадка 8: «Свой вариант». Укажите исторический период, народ или ученых, занимавшихся задачами, связанными с числом π ; расскажите, какие вопросы были им непонятны и как их решили. Подсказки: читайте книги про число π !

Литература

1. Жуков А. В. Вездесущее число «пи». – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
2. Хоакин Наварро. Секреты числа π . Почему неразрешима задача о квадратуре круга. Мир математики: Том 7. Изд-во DeAgostini, 2014.–144 с.
3. Шумихин С., Шумихина А. Число π . История длиной в 4000 лет.- М.: Эксмо, 2011. – 192 с.

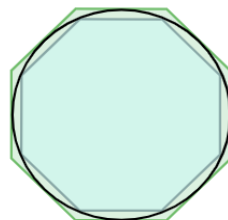
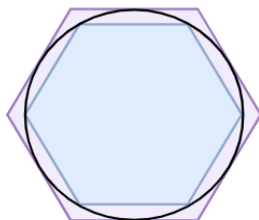
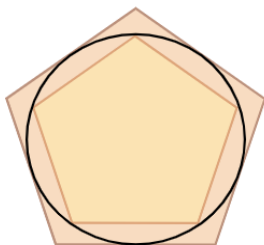


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



Игра про число π

«Собери число π в Дек»

Зюбин Влад, МАОУ СОШ № 32, г. Томск, 9 Б класс

Дек (deque, double-ended queue) – в информатике двусторонняя очередь (сокращённо deque, DEK) – это абстрактный тип данных, обобщающий очередь, в которую элементы могут добавляться или удаляться как с начала (head), так и с конца (tail).

Кто может играть

Количество игроков неограничено. Только рекомендуется увеличивать количество раундов с ростом числа игроков для разнообразия результатов (см. далее *Правила игры*).

Что потребуется

1. Кубик с 10 гранями или генератор случайных чисел от 0 до 9 (просто найдите в интернете любой бесплатный или скачайте приложение). Если у вас всё же случайно оказался под рукой кубик, то считайте, что 10 это 0.

2. По одному листу бумаги на каждого играющего.

3. Ручка.

В чём суть игры

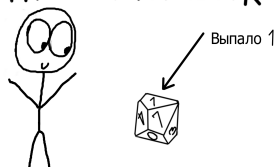
Составить число, максимально приближенное к числу π .

Правила игры

1. Вся игра состоит из маленьких раундов, вы сами вольны выбирать их число, но один совет: если вас двое, то проводите 15 раундов, с увеличением числа людей на одного человека, увеличивайте количество раундов на 2-3.

В начале каждого раунда один раз бросается кубик (генерируется число).

КИНУЛИ КУБИК

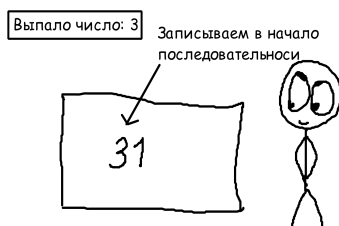


2. В первом раунде каждый записывает цифру к себе на листок (и не показывает другим).

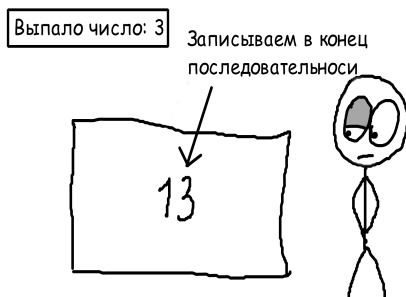


3. В остальных раундах вы можете сделать одно из действий:

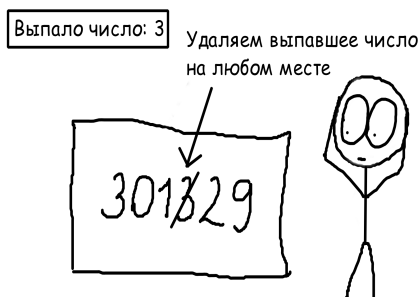
3.1 Добавить выпавшую на кубике цифру в начало своей последовательности:



3.2 Добавить выпавшую на кубике цифру в конец последовательности:



3.3 Удалить выпавшую на кубике цифру из последовательности (если такая цифра есть). В этом случае просто зачеркните выпавшую на кубике цифру в любом месте вашей последовательности на свой выбор:



4. У вас обновилась последовательность цифр! Продолжайте раунды далее, пока каждый не получит свою последовательность.

5. В конце, поставьте после самой левой цифры (между второй и первой цифрой) в последовательности точку (или запятую). У вас получилось какое-то число! (зачёркнутые цифры в числе не учитываются). Теперь сравните числа друг друга с числом π . Победит тот игрок, чьё число (без округлений) будет самым близким к числу π .

3,0129
 $\pi = 3,1415926535897932384626433832795...$

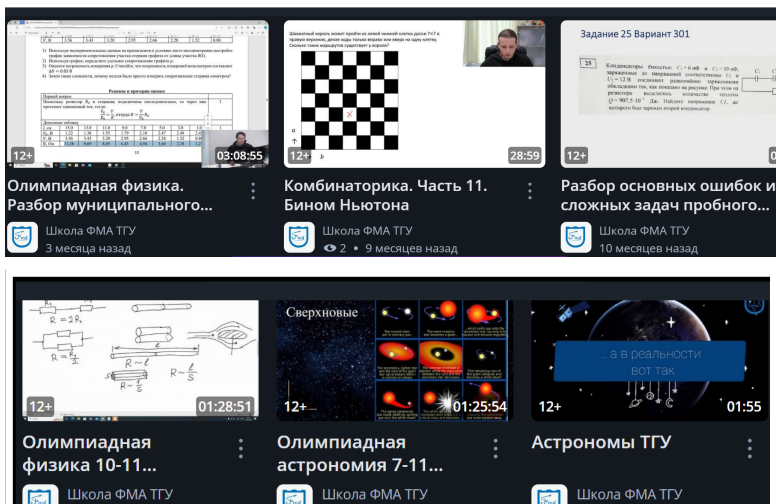
Удачи!

СЕТЕВАЯ ОЛИМПИАДНАЯ ШКОЛА ПО ФИЗИКЕ, МАТЕМАТИКЕ И АСТРОНОМИИ (СОШ ФМА)

СОШ ФМА – это уникальная образовательная площадка для школьников, увлечённых точными науками, которая проводится на базе **физического и механико-математического факультетов Томского государственного университета**.

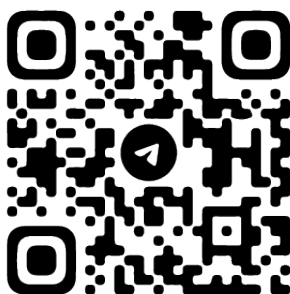
Занятия в СОШ ФМА направлены на решение нестандартных задач и подготовку к олимпиадам по математике и физике различного уровня.

В СОШ ФМА работают опытные преподаватели и олимпиадные тренеры, которые знают, как увлечь наукой. Мы верим, что олимпиадное движение – это не только соревнование, но и возможность глубже понять мир точных наук, развить логическое мышление и научиться решать нестандартные задачи.



Присоединиться к сетевой олимпиадной школе по физике, математике и астрономии, а также найти разборы задач из данного пособия, можно, перейдя по ссылке https://t.me/fma_school или считав QR-код:

Посмотреть все разборы задач СОШ ФМА по олимпиадной физике, математике и астрономии, а также разборы задач из данного пособия, можно на бесплатном канале «Школа ФМА» на YouTube



Желаем успехов в изучении физики, математики и астрономии!

КОМБИНАТОРИКА С СОШ ФМА. *Я.С. Гриншпон,*

Е.А. Сидоровский, А.М. Королева

Данное пособие по комбинаторике создано в рамках программы сетевой олимпиадной школы по физике, математике и астрономии (СОШ ФМА ТГУ). В пособии рассматриваются основные понятия комбинаторики, методы решения задач и примеры их применения. Материал охватывает как базовые темы, так и более сложные разделы, выходящие за рамки школьной программы. Авторы выражают благодарность всем, кто был причастен к созданию этого пособия, и желают читателям успехов в изучении комбинаторики. Пусть этот материал станет полезным инструментом для достижения ваших целей!

ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Решения большинства комбинаторных задач основаны на двух правилах, которые называются правилами суммы и произведения. Для вывода этих правил решим задачу.

Задача. В кафе есть три вида свежей выпечки (булочка, слойка, круассан) и пять видов сладких пирожных (трубочка, корзинка, эклер, маффин, брауни). Сегодня по акции каждому посетителю предлагается бесплатно выбрать произвольную выпечку или пирожное. Сколькими способами могут выбрать себе десерты:

- а) одинокий посетитель кафе;
- б) семейная пара посетителей, если муж предпочитает выпечку, а жена – пирожные;
- в) семья с одним ребёнком, если муж предпочитает выпечку, жена – пирожные, а ребёнку – всё равно?

Как записать ответы на все пункты задачи в общем виде, если имеется m видов выпечки и n видов пирожных?

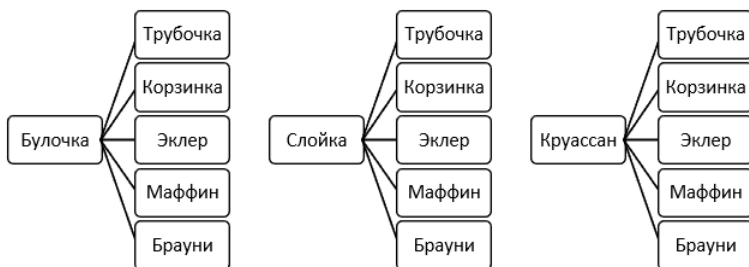
Решение. Представим, что мы посетители этого кафе. Тогда мы видим две витрины. В первой витрине три различных блюда: булочка (для краткости обозначим Бу), слойка (С) и круассан (Кр); во второй витрине пять различных блюд: трубочка (Т), корзинка (Ко), эклер (Э), маффин (М) и брауни (Бр).

В пункте а) по акции мы можем выбрать только одно блюдо из предложенных: *или* выпечку *или* пирожное. Легко перечислить все варианты нашего возможного выбора: Бу, С, Кр, Т, Ко, Э, М, Бр. Всего 8 способов выбора. Очевидно, что мы сложили количество выпечки и количество пирожных: $8 = 3 + 5$. В общем случае решение пункта а) можно записать как сумму $m + n$.

В пункте б) по акции мы уже выбираем два блюда: u выпечку, v пирожное. Попробуем перечислить все варианты выбора: БуТ, БуКо, БуЭ, БуМ, БуБр, СТ, СКо, СЭ, СМ, СБр, КрТ, КрКо, КрЭ, КрМ, КрБр. Всего 15 способов выбора. Как получилось число 15? Для того чтобы это понять, заметим, что имеется по 5 способов, начинающихся на Бу, на С и на Кр. Значит, мы умножили количе-

ство выпечки на количество пирожных: $15 = 3 \cdot 5$. Для большей наглядности можно этот изобразить в виде таблицы размером 3×5 или в виде дерева выбора. В общем случае решение пункта б) можно записать как произведение mn .

	Трубочка	Корзинка	Эклер	Маффин	Брауни
Булочка	БуТ	БуКо	БуЭ	БуМ	БуБр
Слойка	СТ	СКо	СЭ	СМ	СБр
Круассан	КрТ	КрКо	КрЭ	КрМ	КрБр



В пункте в) выбирается три блюда: выпечка u и пирожное v (выпечка *или* пирожное). Будем рассуждать, считая, что сначала свой выбор делают родители, а затем – ребёнок. Тогда мы можем воспользоваться уже готовыми решениями пунктов а) и б): родители свой выбор могут сделать 15 способами, а ребёнок – 8 способами. И тогда аналогично пункту б) мы можем представить либо таблицу с размером 15×8 . Следовательно, ответ $15 \cdot 8 = 120$, а в общем виде: $mn(m + n)$.

Ответ: а) 8; б) 15; в) 120.

Внимательный взгляд на решение этой задачи позволит нам сформулировать два основных правила, на которых будут основаны всё дальнейшее изучение комбинаторики.

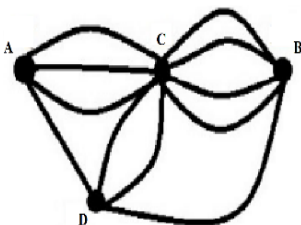
Правила суммы и произведения. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами (независимо от выбора элемента a), то:

а) выбор « a *или* b » можно сделать $m + n$ способами;

б) выбор «*a* и *b*» можно сделать *mn* способами.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно добраться из города А в город В, если двигаться по дорогам можно только слева направо? На схеме каждая линия обозначает одну дорогу.



2. У Маши четыре пары джинсов, пять блузок и три платья.
- а) Сколько у неё различных нарядов?
- б) Сколько у неё станет нарядов, если она ещё купит себе две юбки?
- (Маша не носит одновременно платье с джинсами или блузкой).
3. В математический кружок ходят 8 семиклассников и 12 восьмиклассников. Сколькими способами преподаватель может выбрать двух участников:
- а) двух олимпиад для 7-8 классов, проходящих в разные дни;
- б) двух олимпиад для 7-8 классов, проходящих одновременно;
- в) двух олимпиад: одна – для 7 класса; вторая – для 8 класса;
- г) двух олимпиад: одна – для 7 класса; вторая – для 7-8 классов, проходящих одновременно?
4. В столовой предлагается на выбор четыре салата, два супа, три вторых блюда и два напитка. Обед состоит из блюд разных категорий (т.е. нельзя выбрать несколько салатов или

несколько супов и т.д., напиток тоже считается блюдом). Сколькими способами можно выбрать себе обед, состоящий:

- а) ровно из одного блюда;
- б) из четырёх блюд;
- в) хотя бы из одного блюда?

5. Алфавит некого языка состоит из трёх букв α , β , γ . Словом является любая последовательность, содержащая не более пяти букв.

- а) Сколько слов в этом языке?
- б) Сколько слов в этом языке не содержат удвоенных букв (т.е. двух одинаковых букв подряд)?

6. Повреждённый робот R2 помнит только пять цифр: 1, 2, 3, 4, 5. Сколько пятизначных чисел он может написать:

- а) в которых чётные и нечётные цифры чередуются;
- б) которые одинаково читаются слева направо и справа налево (палиндромы)?

7. Язык иврит имеет 5 гласных звуков, но пишутся только согласные буквы (гласные пропускаются). Любое слово содержит хотя бы один гласный звук. Ударение может падать на любой слог, на письме оно не указывается. Сколькими способами можно прочесть слово, записанное на иврите четырьмя буквами, если гласные звуки можно вставлять только между согласными?

Ответы. 1. 21. 2. а) 23; б) 33. 3. а) 400; б) 380; в) 96; г) 152.
4. а) 11; б) 48; в) 179. 5. а) 363; б) 93. 6. а) 180; б) 125. 7. 540.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановки – одно из фундаментальных понятий комбинаторики. *Перестановкой* называется упорядоченная последовательность элементов, полученная путём их переупорядочивания. Для того

чтобы лучше понять это определение и научиться его применять на практике, решим следующие задачи.

Задача 1. В тесте по математике требуется установить соответствие между числами и их свойствами, указав в таблице под каждой буквой соответствующий номер. Числа: 1) 21; 2) 6; 3) 16; 4) 17. Свойства: А) простое; Б) совершенное; В) точный квадрат; Г) треугольное. Школьник отвечает наугад. Какое наибольшее количество неверных попыток он может сделать, если каждый свой вариант заполнения таблицы он проверяет один раз?

А	Б	В	Г

Решение. Представим, что школьник вовсе не знает, какими из указанных свойств обладают данные числа. Тогда для того чтобы правильно ответить на тест, ему нужно перебрать все возможные варианты. Как произвести полный перебор (т.е. указать все возможные варианты ответов на тест)? Для этого зафиксируем первое число. Пусть это будет число под номером 1). Тогда таблица ответа будет выглядеть следующим образом:

А	Б	В	Г
1			

Несложно записать все возможные варианты ответов, начинающихся с номера 1).

А	Б	В	Г
1	2	3	4

А	Б	В	Г
1	2	4	3

А	Б	В	Г
1	3	2	4

А	Б	В	Г
1	3	4	2

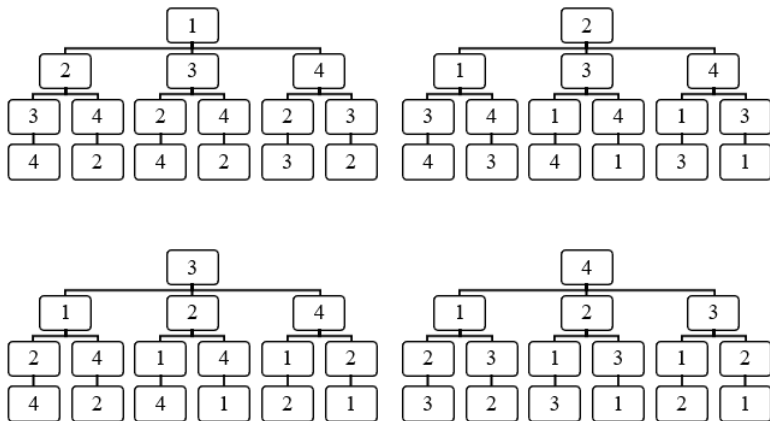
А	Б	В	Г
1	4	2	3

А	Б	В	Г
1	4	3	2

Таким образом, имеем шесть ответов, начинающихся с номера 1). Несложно убедиться, что ответов, начинающихся с номера 2), 3) или 4), – также по шесть. Таким образом, всего вариантов: $24 = 4 \cdot 6$.

Приведём другое решение. Первое число мы можем выбрать четырьмя способами. На второе место можем поставить одно из трёх

оставшихся чисел (так как числа не могут повторяться). Далее, на третье место можем поставить одно из двух оставшихся чисел. И, наконец, на последнее место остаётся одно число. Таким образом, всего вариантов ответов $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Это решение удобно представить в виде дерева вариантов (мы разбили его на четыре для экономии места).



Таким образом, всего вариантов ответов 24, и лишь один из них правильный. Значит, наибольшее количество попыток, которое может сделать школьник перед тем, как запишет верный ответ, равно 23.

Заметим, что в этой задаче нам, как и школьнику, не потребовались знания об указанных свойствах чисел. Мы предлагаем читателю самостоятельно ответить на дополнительный вопрос: какой вариант ответа является правильным?

Ответ: 23; доп.вопрос: 4231.

Задача 2. Сколько существует четырёхзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4? Тот же вопрос, если все цифры должны быть различными. Те же вопросы для пяти цифр и пятизначных чисел. А если цифр будет n и числа будут n -значными?

Решение. Приведём решение, аналогичное предыдущей задаче. Так как мы пишем числа слева направо, можем каждое число пред-

ставить в виде строки длины 4, которую мы начинаем заполнять слева направо. На первое место (в разряд тысячных) можем поставить одну из четырёх цифр (1, 2, 3 или 4). На второе также можем поставить одну из четырёх цифр (так как цифры в числе могут повторяться). На третье и четвёртое места также приходится по четыре варианта постановки цифры. Это решение также можно представить в виде дерева и подсчитать количество элементов нижнего уровня. Но на практике зачастую дерево вариантов бывает слишком громоздким. Поэтому для иллюстрации этого решения заполним строку (в данном случае длины 4), указывая количество способов заполнить ту или иную ячейку.

4	4	4	4
---	---	---	---

Затем остаётся только перемножить числа в данной строке. Таким образом, четырёхзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4 – $256 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

Если все цифры должны быть различными, то, заполняя строку, будем учитывать то, что числа не могут повторяться (т.е. если первую цифру мы можем выбрать четырьмя способами, то вторую – всего тремя, так как одна цифра уже занята).

4	3	2	1
---	---	---	---

Получаем ответ: $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Для пяти цифр и пятизначных чисел увеличится лишь длина строки, которую мы заполняем. Поэтому всего пятизначных чисел: $3125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$, пятизначных чисел с различными цифрами: $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Теперь рассмотрим случай, если цифр будет n и числа будут n -значными. Очевидно, что n не превышает 10, так как всего существует 10 цифр.

Пусть $n \leq 9$. Тогда решение строится аналогично предыдущим случаям. Всего n -значных чисел: $n \cdot \dots \cdot n = n^n$; n -значных чисел с различными цифрами: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Пусть $n = 10$. Тогда для подсчёта количества десятизначных чисел заполним строку длины 10:

9	10	10	...	10
---	----	----	-----	----

Заметим, что так как числа не могут начинаться с цифры 0, количество способов выбрать первую цифру равно 9. Получили, что всего имеется $9 \cdot 10^9$ десятизначных чисел. Рассуждая аналогично, количество десятизначных чисел с различными цифрами равняется $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Ответ: 256, 24; 3125, 120; n^n , $n!$ при $n \leq 9$.

Обобщая подход к решению предыдущих задач, получим следующее правило для подсчёта числа перестановок.

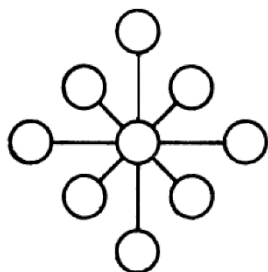
Если дано n различных элементов, то количество способов расположения этих элементов в некотором порядке вычисляется по формуле

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Выражение $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ называют *факториалом* числа n .

Задачи для самостоятельного решения

1. Первоклассник, знающий только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, записывает в тетрадь все возможные шестизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. а) Сколько всего чисел он может записать? б) Сколько из них кратны трём? в) Сколько из них кратны пяти? г) Сколько из них кратны шести? д) Сколько из них кратны четырём?
2. В каждый из кружочков на схеме надо записать по одному из чисел от 1 до 9, причём ни одно из чисел нельзя использовать несколько раз. Сколькими способами это можно сделать, если: а) нет никаких дополнительных ограничений; б) в центральном кружке должно стоять число 5; в) в центральном кружке должно стоять нечётное число; г) на горизонтальной линии должны стоять в некотором порядке числа 1, 2, 3; д) на горизонтальной линии должны стоять в некотором порядке три последовательных числа; е) сумма трёх чисел вдоль каждой линии должна равняться 15?



3. Компания из восьми друзей, придя в кафе, заспорила, кому на какое место садиться. Подошедший владелец кафе предложим, что он их сегодня сам рассадит за столом и запишет, кто на каком месте сидит. А когда в следующий раз они придут в кафе, они сядут как-нибудь по-другому, и владелец опять запишет их расположение за столом. Если же через несколько посещений окажется, что они перепробовали все возможные варианты рассадки, то с этого момента в кафе их будут кормить за счёт заведения. Предложение всем понравилось. Было решено ежедневно собираться в этом кафе, чтобы как можно быстрее начать питаться бесплатно. Сколько полных лет должно пройти, чтобы перебрать все способы рассадки за столом?
4. На танцплощадке собрались восемь юношей и восемь девушек.
- а) Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?
 - б) Сколько суток им потребовалось бы танцевать без перерыва, чтобы перебрать все варианты разбивки на пары, если каждый танец длится две минуты?
5. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга, если:
- а) ладьи одинаковы;
 - б) ладьи окрашены в восемь различных цветов?

6. Сколькими способами можно расставить на полке:
- а) пять учебников по разным предметам;
 - б) пять учебников по разным предметам и три одинаковых учебника по математике так, чтобы математические книги стояли рядом;
 - в) пять учебников по разным предметам и три учебника по математике (по алгебре, геометрии и комбинаторике) так, чтобы математические книги стояли рядом;
 - г) пять учебников по математике (по алгебре, геометрии, комбинаторике, логике и вероятности) и три учебника по физике (по механике, термодинамике и электромагнетизму) так, чтобы и математические и физические книги стояли рядом?
7. Сколькими способами можно рассадить десять учеников класса за пять двухместных парт так, чтобы Ваня Иванов и Петя Петров не сидели за одной партой?
8. Сколькими способами десять учеников могут выстроиться в очередь в столовую, если Ваню Иванова и Петю Петрова нельзя ставить друг за другом, чтобы они не подрались?
9. Сколькими способами можно поставить шесть человек:
- а) в шеренгу;
 - б) в хоровод?
10. Сколькими способами можно поставить трёх девочек и трёх мальчиков так, чтобы мальчики и девочки чередовались:
- а) в шеренгу;
 - б) в хоровод?
11. Сколькими способами можно поставить трёх девочек и трёх мальчиков так, чтобы все мальчики стояли подряд друг за другом и все девочки стояли подряд друг за другом:
- а) в шеренгу;
 - б) в хоровод?

12. Сколькими способами можно поставить трёх девочек и трёх мальчиков так, чтобы все мальчики стояли подряд друг за другом:
- а) в шеренгу;
 - б) в хоровод?
13. Сколько различных слов, не обязательно имеющих смысл, можно составить, переставляя буквы слова:
- а) «БАРОН»;
 - б) «БАРАН»;
 - в) «ДОВОД»;
 - г) «КАРАБАС»;
 - д) «БАРАБАН».
14. Бабушка испекла три пирожка с яблоком, две ватрушки и пять булочек с сахаром. Каждые полчаса она угощает внука своей выпечкой. Сколькими способами она может это сделать?
15. Сколькими способами можно нанизать на нить 9 одинаковых по форме и размеру бусинок, если среди них равное число синих, зеленых и красных бусинок?
16. Имеется три синих, пять красных и два жёлтых бантика. Бантики одного цвета считаются одинаковыми. Сколько существует способов:
- а) каждой из девяти русалок завязать по бантику (один бантик останется неиспользованным);
 - б) каждой из восьми русалок завязать по бантику (два бантика останутся неиспользованными)?

Ответы. 1. а) 720; б) 720; в) 120; г) 360; д) 192. 2. а) 362880; б) 40320; в) 201600; г) 4320; д) 30240; е) 384. 3. 110. 4. а) 40320; б) 56. 5. а) 40320; б) 1625702400. 6. а) 120; б) 720; в) 4320; г) 1440. 7. 3225600. 8. 2903040. 9. а) 720; б) 120. 10. а) 72; б) 12. 11. а) 72; б) 36. 12. а) 144; б) 36. 13. а) 120; б) 60; в) 30; г) 840; д) 420. 14. 2520. 15. 1680. 16. а) 2520; б) 1512.

РАЗМЕЩЕНИЯ

Иногда в комбинаторике встречаются задачи, в которых требуется найти количество способов выбрать несколько элементов из множества и разместить их в некотором порядке. Такие задачи решаются с помощью размещений. В комбинаторике *размещением* (из n по k) называется упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов. Попробуем разобраться с этим определением на примере следующей задачи.

Задача. Перечислите все не кратные одиннадцати двузначные числа, произведение цифр которых нечётно. Как можно было найти количество таких чисел, не перечисляя их?

Решение. Для начала решим задачу полным перебором. Решим задачу от обратного: выпишем все двузначные числа, которые делятся на 11 или произведение цифр которых чётно. Числа, делящиеся на 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Числа, произведение цифр которых чётно: 10, 12, 14,...,18, 20, 21, 22,..., 90, 92,..., 98. (Числа, имеющие в записи чётную цифру). Тогда все числа, не перечисленные выше, будут ответом на задачу.

Сколько их? Всего двузначных чисел $99 - 9 = 90$. Чисел, произведение цифр которых чётно: $10 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 65$ (чисел, начинающихся с чётной цифры: $4 \cdot 10 = 40$; чисел, начинающихся с нечётной цифры: $5 \cdot 5 = 25$). Чисел, делящихся на 11: 9. Но некоторые из них имеют чётное произведение цифр (22, 44, 66, 88), поэтому их второй раз считать не будем. Таким образом, чисел, делящихся на 11 и имеющих нечётное произведение цифр: 5. Получаем, что чисел, которые нам не подходят, всего: $65 + 5 = 70$. А, значит, подходящих: $90 - 70 = 20$.

Посчитаем количество двузначных чисел, не кратных 11, произведение которых нечётно, не прибегая к перечислению таковых.

Заметим, что для записи подходящих чисел нужно выбирать лишь нечётные цифры (чтобы произведение цифр было нечётным), причём различные (чтобы избежать кратности 11).

На первое место можем поставить любую нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9). На второе место можем поставить одну из оставшихся

четырёх цифр. Тогда всего подходящих чисел: $5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

Сформулируем правило для решения аналогичных задач:

Если дано n различных элементов, то количество способов выбрать из них k элементов и расположить эти k элементов в некотором порядке равняется

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Здесь и далее через A_n^k обозначаем количество размещений из n по k .

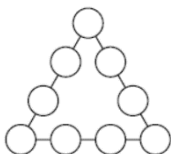
Задачи для самостоятельного решения

1. В игру «Мафия» играет компания из десяти человек. Сколькими способами могут им достаться роли Мафии, Шерифа и Доктора, если каждая роль даётся только одному игроку? А если в мафию входят два игрока? А если в мафию входят три игрока?
2. Модница сороконожка купила три цветных носка. Каждый день она одевает их на какие-то из своих ножек, причём так, чтобы её наряд не совпадал ни с одним из нарядов предыдущих дней. Сколько различных нарядов есть у сороконожки?
3. В турнире математических боёв участвовали шесть команд из Москвы, пять команд из Новосибирска, три из Красноярска и две из Томска, причём все команды набрали разное количество баллов. Сколькими способами могли быть определены:
а) команды, занявшие три призовых места; б) три лучшие московские команды, если первая из них поедет на турнир в Париж, вторая ?- в Пекин, а третья -? в Минск; в) список победителей (по одному для каждого города); г) места, занятые командами из Новосибирска; д) места, занятые сибирскими командами?

4. Президент некоторой страны объявил конкурс на создание нового флага. Каждому участнику конкурса выдается одинаковый набор из кусков материи пяти цветов: белый, синий, красный, зелёный и чёрный. По условию конкурса флаг должен состоять из трёх горизонтальных или трёх вертикальных прямоугольных полос одинакового размера и разных цветов.
- а) Какое наибольшее количество различных флагов могут сплести участники конкурса?
 - б) Сколько флагов не будут содержать белой полосы?
 - в) У скольких флагов первая полоса (самая верхняя или самая левая) будет синей или зелёной?
 - г) Сколько флагов будут содержать красную полосу?
5. Первоклассник, знающий только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записывает в тетрадь все возможные четырёхзначные числа, не содержащие одинаковых цифр.
- а) Сколько всего чисел он может записать?
 - б) Сколько из них кратны пяти?
 - в) Сколько из них кратны двум?
 - г) Сколько из них меньше 7000?
6. По школьному регламенту никакой предмет не может занимать более двух уроков за день, причём, если он занимает два урока, то эти уроки идут непосредственно друг за другом. В восьмом классе изучается девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание 8А класса на день из шести уроков, если:
- а) все предметы должны быть разными;
 - б) все предметы должны быть сдвоенными;
 - в) ровно один предмет должен быть сдвоенным;
 - г) ровно два предмета должны быть сдвоенными?
7. В каждый из кружочков на схеме (изображена на рисунке справа) надо записать по одному из чисел от 1 до 9, причём

ни одно из чисел нельзя использовать несколько раз. Сколькими способами при этом может оказаться заполненной нижняя горизонтальная сторона треугольника:

- а) нет никаких дополнительных ограничений;
- б) число 5 должно находиться в верхней вершине треугольника;
- в) число 5 должно находиться на нижней горизонтальной стороне треугольника;
- г) в вершинах треугольника должны стоять числа 1, 2, 3;
- д) в вершинах треугольника должны стоять три последовательных числа;
- е) сумма четырёх чисел вдоль каждой стороны треугольника должна равняться 17?



8. Студент должен сдать четыре зачёта (алгебра, геометрия, вероятность и комбинаторика) за восемь дней, причём он не может сдавать несколько зачётов в один день. Сколькими способами он может составить расписание зачётов, если он планирует сдать комбинаторику:
- а) в первый день;
 - б) первой из всех предметов;
 - в) раньше, чем сдать вероятность?
9. а) В классе из 10 человек каждый день в течение учебной недели (с понедельника по пятницу) награждают Лучшего Математика. Сколькими способами можно это сделать?
- б) В классе из 10 человек выбирают пять Лучших Математиков и составляют их рейтинг (т.е. распределяют с первого места по пятое). Сколькими способами можно это сделать?

- в) В классе из 10 человек выбирают пять Лучших Математиков для участия в командном соревновании. Сколькими способами можно это сделать?
10. Плейлист Пети содержит семь мультиков, десять музыкальных клипов и шесть видеоуроков. Известно, что в течение дня он никогда не смотрит одно видео дважды. Сколькими способами Петя может запланировать себе для просмотра на сегодня три мультика, три клипа и три видеоурока, если:
- а) он хочет их посмотреть именно в таком порядке: сначала мультики, затем клипы и в конце видеоуроки;
 - б) ролики одинакового жанра он хочет смотреть подряд;
 - в) сначала он хочет посмотреть все видеоуроки, а затем в произвольном порядке мультики и клипы;
 - г) он смотрит ролики в произвольном порядке.
11. В некотором городе имеется пять памятников, семь музеев и девять театров. Турист не любит посещать одну и ту же достопримечательность несколько раз, при этом вокруг памятников он всегда гуляет только по утрам, музеи он посещает днём, а в театры ходит исключительно по вечерам. Сколькими способами он может:
- а) составить маршрут для осмотра всех памятников (стартует у одного из памятников, финиширует у другого);
 - б) составить расписание посещения трёх музеев и трёх театров за три дня пребывания в городе, если каждый день он планирует посетить один музей и один театр;
 - в) составить расписание посещения двух музеев и трёх театров за пять дней пребывания в городе, если каждый день он планирует только одно посещение;
 - г) составить расписание посещения всех достопримечательностей за девять дней пребывания в городе, если за один день он может посетить не более одного памятника, не более одного музея и не более одного театра?

12. Сколько различных чисел можно получить, записывая дроби, числителем и знаменателем которых являются числа из набора:
- а) 1, 2, 3, 5, 7, 11;
 - б) 1, 3, 5, 7, 9, 11;
 - в) 1, 2, 3, 4, 5, 6?
13. Из букв слова «БАРАН» составляются слова, не обязательно имеющие смысл. Сколько можно составить слов, состоящих:
- а) из двух букв;
 - б) из трёх букв;
 - в) из четырёх букв;
 - г) из любого количества букв?
14. Из букв слова «ДОВОД» составляются слова, не обязательно имеющие смысл. Сколько можно составить слов, состоящих:
- а) из двух букв;
 - б) из трёх букв;
 - в) из четырёх букв;
 - г) из любого количества букв?

Ответы. 1. 720; 2520. 2. 59280. 3. а) 3360; б) 120; в) 180; г) 524160; д) 29059430400. 4. а) 120; б) 48; в) 48; г) 72. 5. а) 840; б) 120; в) 360; г) 720. 6. а) 60480; б) 504; в) 75600; г) 18144. 7. а) 2160; б) 960; в) 960; г) 120; д) 180; е) 1260; ж) 48. 8. а) 210; б) 420; в) 840. 9. а) 100000; б) 30240; в) 252. 10. а) 181440000; б) 1088640000; в) 3628800000; г) 182891520000. 11. а) 120; б) 105840; в) 211680; г) 995515121664000. 12. а) 31; б) 29; в) 23. 13. а) 13; б) 33; в) 60; г) 170. 14. а) 8; б) 18; в) 30; г) 89.

СОЧЕТАНИЯ

Задача. При розыгрыше лотереи из ящика с пятью шарами с буквами А, Б, В, Г, Д, наугад одновременно достают два шара. Выиг-

рывает тот, кто в лотерейном билете верно укажет обе выпавшие буквы.

а) Сколько билетов надо заполнить, чтобы гарантированно получить выигрыш? Перечислите все варианты.

б) Организаторы поменяли правила. Теперь два шара достаются поочередно: сначала – один, затем – другой. Для победы надо указать буквы в порядке их появления. Во сколько раз увеличится количество билетов, гарантирующих выигрыш? Проверьте перечислением.

в) В каком из пунктов, а) или б), ответ можно найти по формуле размещений?

г)-д) Сколько билетов надо заполнить по старым и по новым правилам при вытаскивании трёх шаров?

е)-ж) Сколько билетов надо заполнить по старым и по новым правилам при вытаскивании четырёх шаров?

Решение. В пункте а), для того, чтобы гарантировано получить выигрыш, нужно заполнить все билеты, имеющие две различные буквы. Таких билетов $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Здесь делим на 2, так как порядок неважен (т.е. билеты АБ и БА для нас неразличимы). Перечислим все билеты: АБ, АВ, АГ, АД, БВ, БГ, БД, ВГ, ВД, ГД.

В пункте б) порядок записи букв в билете важен (т.е. теперь билеты АБ и БА для нас различны). Тогда, очевидно, билетов станет в 2 раза больше.

Нетрудно проверить, что формула размещений применяется в пункте б): $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ (размещением называется упорядоченный набор).

Для начала решим пункт д). Для гарантированного выигрыша нужно заполнить $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ билетов. Теперь необходимо посчитать, сколько среди них билетов повторяются содержательно (т.е. имеют в составе одни и те же буквы). Для этого необходимо сосчитать количество перестановок из трёх букв: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Приведём для примера все такие перестановки для букв А, Б, В: АВВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА. Таким образом, если мы играем

по старым правилам, то нужно заполнить $\frac{60}{6} = 10$ билетов.

Аналогично решаются пункты е) и ж). Если играем по новым правилам: $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$; если по старым: $\frac{A_5^4}{4!} = \frac{120}{24} = 5$.

Ответ: а) 10; б) 2; в) 6; г) 10; д) 60; е) 5; ж) 120.

Если дано n различных элементов, то количество способов выбрать из них k элементов, причём порядок выбора неважен, равняется

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Здесь и далее через C_n^k обозначается количество сочетаний из n по k .

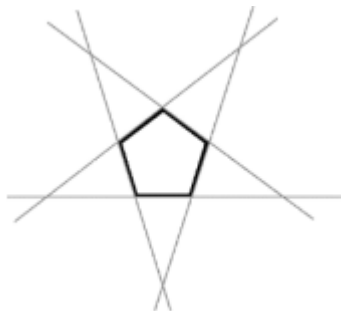
Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно выбрать три дня в неделю для проведения факультативов по математике, если: а) в воскресенье занятие проводить нельзя; б) проводить занятия можно в любые дни, но ровно одно занятие нужно поставить на выходные (субботу или воскресенье); в) проводить занятия можно в любые дни, но на выходные можно поставить не более одного занятия? Проверьте ответы перечислением всех вариантов.
2. В канцелярском магазине продаются восемь видов двенадцатистовых (тонких) тетрадей и одиннадцать видов сорокавосемистовых (толстых). Ученица, чтобы не путаться в школе, покупает только внешне разные тетради. Сколькими способами она может купить восемь тетрадей, если ей нужны: а) только толстые тетради; б) одна толстая тетрадь, а остальные – тонкие; в) поровну тонких и толстых тетрадей; г) k толстых тетрадей?
3. В летнем лагере работают двадцать сотрудников. Четверым из них надо съездить в город за оборудованием для занятий. Сколькими способами можно составить группу отъезжающих, если директор лагеря, старший вожатый и завуч одновременно покинуть лагерь не могут?

4. В турнире математических боёв участвовали пять команд из Красноярска, шесть из Томска и несколько из Новосибирска. Каждая команда сыграла с каждой один раз. а) Сколько боёв было проведено между томскими командами? б) В скольких боях не участвовали новосибирские команды? в) Сколько команд из Новосибирска участвовало, если было проведено 36 боёв между новосибирскими командами? г) Сколько всего боёв состоялось за время турнира?
5. В математический кружок ходят 8 пятиклассников и 12 шестиклассников. Сколькими способами преподаватель может выбрать составы двух команд по четыре человека для участия в двух математических абак, если: а) это абак для 5 классов, проходящие одновременно; б) это абак для 5 классов, проходящие в разные дни; в) это абак для 6 классов, проходящие одновременно; г) одна из абак для 5 классов, а другая – для 6 классов; д) одна из абак для 5 классов, а другая – для 5-6 классов, проходящие в разные дни; е) одна из абак для 5 классов, а другая – для 5-6 классов, проходящие одновременно?
6. В цветочном киоске имеются в продаже розы, тюльпаны, лилии, гвоздики и хризантемы (цветы одного вида считаем неразличимыми). Сколькими способами можно:
- а) составить букет из трёх различных цветов;
 - б) составить букет из трёх цветов, не все из которых одинаковые;
 - в) составить произвольный букет из трёх цветов;
 - г) выбрать три цветка, чтобы подарить их маме, бабушке и сестре;
 - д) выбрать три различных цветка, чтобы подарить их маме, бабушке и сестре?
7. Монету подбрасывают тринадцать раз и записывают в порядке их выпадения последовательность «орлов» и «решек». Сколько всего существует таких последовательностей, в которых:

- а) «орёл» выпал ровно три раза;
 - б) «орёл» выпал менее трёх раз;
 - в) «орлов» меньше, чем «решек» более чем в три раза;
 - г) количество «орлов» кратно пяти;
 - д) «орлов» больше, чем «решек»
8. а) На тренировку десяти молодых баскетболистов пришли тренеры команд «Динамо» и «Спартак». Каждый из тренеров должен отобрать по пять баскетболистов в состав своей команды. Сколькими способами тренеры могут провести такой отбор?
- б) Сколькими способами можно разбить десять баскетболистов на две команды по пять человек для проведения товарищеского матча?
- в) Сколькими способами можно разбить десять баскетболистов на пять пар для отработки игры в пас?
9. Трое юношей и семь девушек хотят поплавать на двух лодках, причём на каждой лодке должен быть хотя бы один юноша. Сколькими способами их можно поровну распределить по лодкам, если:
- а) одна из лодок моторная, а другая – вёсельная;
 - б) лодки одинаковы?
10. Сколько существует четырёхзначных натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей, если эти числа:
- а) больше, чем число 2023;
 - б) меньше, чем число $3 \cdot 2023$;
 - в) кратны пяти;
 - г) кратны четырём;
 - д) записываются только нечётными цифрами;
 - е) содержат в своей записи поровну чётных и нечётных цифр?

11. У Маши десять пар джинсов и десять блузок. Она, собираясь в длительную командировку, кладёт в чемодан равное число джинсов и блузок. Сколькими способами она может выбрать одежду (джинсы и блузки), которые возьмёт с собой?
12. Из колоды в тридцать шесть карт выбирают четыре карты. Оказалось, что:
- а) одна из них пиковая дама;
 - б) ровно одна из них туз;
 - в) ровно две из них тузы;
 - г) хотя бы одна из них туз;
 - д) ровно одна из них туз и ровно одна из них король;
 - е) хотя бы одна из них туз и хотя бы одна из них король.
- Сколько существует таких наборов?
13. Девятиклассник нарисовал пятиугольник без параллельных сторон и продлил все его стороны до пересечения с остальными прямыми. Сколько на этом чертеже образовалось:
- а) точек пересечения прямых?
 - б) треугольников?
 - в-г) Те же вопросы для шестиугольника;
 - д-е) Те же вопросы для n -угольника.



14. а) Девятиклассник нарисовал пятиугольник и провёл в нём все возможные диагонали. Какое наибольшее число точек пересечения диагоналей могло при этом образоваться?
- б) Тот же вопрос для шестиугольника.
- в) Тот же вопрос для n -угольника.
15. Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна:
- а) 3;
- б) 4;
- в) 88?
16. Шахматный король может пройти из левой нижней клетки доски 7×7 в правую верхнюю, делая ходы только вправо или вверх на одну клетку. Сколько таких маршрутов существует у короля, если:
- а) нет никаких дополнительных ограничений;
- б) королю нельзя заходить на правую нижнюю клетку и три соседние с ней клетки (т.е. на левый нижний квадрат 2×2);
- в) король обязательно должен пройти через центральную клетку?
17. На день рождения Светы каждая из семи её подруг приготовила поздравительное слово. Сколькими способами Света может услышать эти семь слов (кто их говорит, значения не имеет; важна последовательность), если:
- а) из списка «здоровья», «счастья», «удачи», «благополучия», «достатка», «любви», «успехов», «радости», «добра», «тепла» было выбрано семь различных слов;
- б) произносили только слова «здоровья» и «счастья», причём здоровья желали чаще, чем счастья;
- в) произносили только слова «здоровья» и «счастья»;
- г) три раза произнесли слово «здоровья», два раза – «счастья» и два раза – «удачи»;

д) произносили только слова «здоровья», «счастья» и «удачи», причём здоровья желали чаще, чем счастья, а счастья – чаще, чем удачи;

е) произносили только слова «здоровья», «счастья» и «удачи», причём все слова произносили разное количество раз;

ж) произносили только слова «здоровья», «счастья» и «удачи»

Ответы. 1. а) 20; б) 20; в) 30. 2. а) 165; б) 88; в) 23100; г) $C_{11}^k \cdot C_8^k$. 3. 4828. 4. а) 15; б) 55; в) 9; г) 190. 5. а) 70; б) 4900; в) 34650; д) 339150; е) 127400. 6. а) 10; б) 30; в) 35; г) 125; д) 60. 7. а) 286; б) 92; в) 378; г) 1574; д) 4096. 8. а) 252; б) 126; в) 945. 9. а) 210; б) 105. 10. а) 70; б) 125; в) 4; г) 20; д) 5; е) 60. 11. 923. 12. а) 6545; б) 19840; в) 2976; г) 22945; д) 6048; е) 7460. 13. а) 10; б) 10; в) 15; г) 20; д) $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$; е) $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. 14. а) 5; б) 15; в) $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. 15. а) 55; б) 220; в) 46. 16. а) 924; б) 887; в) 400. 17. а) 181440; б) 63; в) 126; г) 210; д) 105; е) 630; ж) 1806.

БИНОМ НЬЮТОНА

Бином Ньютона – это формула сокращённого умножения, левая часть которой имеет вид $(a + b)^n$ при некотором натуральном n .

Выведем формулы бинома Ньютона при небольших n и обобщим их на случай произвольного натурального n двумя способами (рассмотрение сразу двух способов важно не с точки зрения дополнительной проверки правильности полученных результатов, а с точки зрения обнаружения различных закономерностей в формулах бинома Ньютона при изменении n).

I способ. При выводе формулы для степени n будем опираться на уже известную формулу для степени $n-1$. Например, с помощью

известной формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ получим

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\
 &= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
 (a + b)^4 &= (a + b)^3(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) = \\
 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\
 (a + b)^5 &= (a + b)^4(a + b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a + b) = \\
 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
 \end{aligned}$$

и т.д. Отметим, что также как в записанных уже формулах, всюду в дальнейшем подобные слагаемые в правой части формулы $(a + b)^n$ мы будем перечислять по убыванию степеней множителя a . Так как общая степень каждого слагаемого постоянна и равна n , то при такой записи степени множителя b будет возрастать. Видно, что правая часть формулы определяется коэффициентами, стоящими перед слагаемыми вида $a^{n-k}b^k$. Эти коэффициенты называют *биномиальными* и обозначают C_n^k . Так как правые части формул $(a + b)^n$ и $(b + a)^n$ должны совпадать, то должны совпадать коэффициенты при слагаемых $a^{n-k}b^k$ и $b^{n-k}a^k$, т.е. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (другими словами, симметричные коэффициенты в бинOME Ньютона равны). При этом, очевидно, $C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

С использованием обозначения биномиальных коэффициентов формула бинOMA Ньютона записывается в виде

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

или более кратко $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}b^k$, где $\sum$ — знак суммирования.

Выразим коэффициент C_{n+1}^k из формулы $(a + b)^{n+1}$ через коэффициенты разложения $(a + b)^n$. Имеем

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \dots + C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k + \dots + b^{n+1}, \\
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n(a + b) = \\
 &= (a^n + \dots + C_n^{k-1} a^{n-k+1}b^{k-1} + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + b^k)(a + b) = \\
 &= a^{n+1} + \dots + (C_n^{k-1} + C_n^k) a^{n-k+1}b^k + \dots + b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, то есть коэффициент из разложения степени $(n+1)$ равен сумме двух коэффициентов из разложения степени n . Действительно, в записанных выше формулах $C_4^2 = 6 = 3 + 3 = C_3^1 + C_3^2$ и $C_5^2 = C_5^3 = 10 = 4 + 6 = C_4^1 + C_4^2$.

Наглядно данную закономерность получения биномиальных коэффициентов записывают в виде так называемого *треугольника Паскаля*, где каждый элемент равен сумме двух элементов, расположенных над ним:

$(a+b)^0$	1					
$(a+b)^1$	1			1		
$(a+b)^2$	1		2		1	
$(a+b)^3$	1	3	3	1		
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1

Упражнения

1. С помощью треугольника Паскаля выведите формулы $(a+b)^{10}$ и $(a-b)^{10}$.
2. Раскройте скобки в выражении $(2x-3)^8$.
3. Упростите $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2$.
4. Решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 7 = 0$.
5. Решите уравнение $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 244 = 0$.
6. Решите уравнение $(1+x)^4 + (2+x)^4 = 49$.

II способ. Первый способ неудобен тем, что для вывода формулы бинома Ньютона необходимо знать коэффициенты при всех меньших степенях. Попробуем получить формулу, позволяющую сразу находить биномиальные коэффициенты при заданном n .

Распишем степень n как произведение n одинаковых сомножителей и раскроем скобки. Это несложно сделать при $n = 2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Чуть более затруднительно – при $n = 3$, так как придётся рассматривать 8 слагаемых (в предложенном варианте, сначала выбирают первые слагаемые a из каждой скобки, потом, начиная с третьего сомножителя, они постепенно заменяются на b):

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Чтобы не запутаться при перечислении всех возможных вариантов выбора сомножителей из скобок при $n \geq 4$, надо каким-либо образом упорядочить этот процесс. Возможен следующий подход: будем обозначать отрезком, идущим влево, выбор слагаемого a , а отрезком, идущим вправо, – выбор b (как на Рис. 1 для $n = 4$). Получим чертёж, называемый *бинарным деревом*. Тогда каждой точке самого низкого уровня (они отмечены кружками) соответствует единственный маршрут от верхней точки (отмеченной ромбом) до данной точки, не проходящий ни по какому ребру дважды.

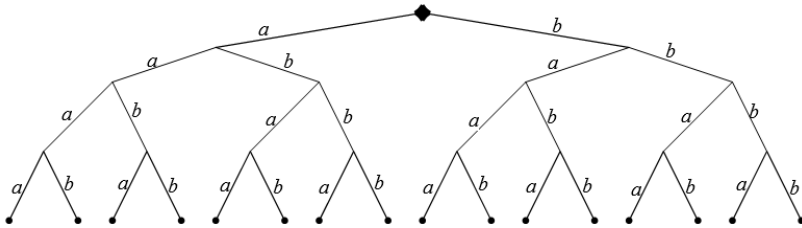


Рис. 1: Бинарное дерево для $n = 4$

Перебрав точки нижнего уровня слева направо, записав буквы a и b вдоль каждого маршрута и поставив знак сложения при переходе к следующей точке, мы получим выражение после раскрытия

скобок в произведении

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = aaaa + aaab + aaba + \dots$$

Остаётся привести подобные и получить окончательную формулу

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

При упорядочивании процесса раскрытия скобок можно было воспользоваться двоичной системой счисления. Закодируем выбор слагаемого a в скобке символом 0, а выбор слагаемого b – символом 1. Тогда каждому n -значному двоичному числу (при этом в случае необходимости в начало числа дописывают нули) будет соответствовать слагаемое из формулы $(a + b)^n$. Расположив числа в порядке возрастания, сможем записать все необходимые слагаемые. Приведём пример для $n = 4$:

Десятичное число	Двоичное число	Слагаемое
0	0000	$aaaa$
1	0001	$aaab$
2	0010	$aaba$
3	0011	$aabb$
4	0100	$abaa$
5	0101	$abab$
6	0110	$abba$
7	0111	$abbb$

Десятичное число	Двоичное число	Слагаемое
8	1000	$baaa$
9	1001	$baab$
10	1010	$baba$
11	1011	$babb$
12	1100	$bbaa$
13	1101	$bbab$
14	1110	$bbba$
15	1111	$bbbb$

Задание. Составьте подобную таблицу для $n = 5$ и проверьте формулу $(a + b)^5$.

Сведём в таблицу полученные результаты о формулах бинома Ньютона при $n \leq 4$ и на их основе выскажем гипотезы об общем виде формул (для более точного вида закономерностей в начало таблицы добавим строчку для формулы $(a + b)^0 = 1$).

Степень n	Правая часть формулы	Общее количество слагаемых	Количество слагаемых после приведения подобных	Коэффициенты при подобных слагаемых
0	1	1	1	1
1	$a + b$	2	2	1 1
2	$a^2 + 2ab + b^2$	4	3	1 2 1
3	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	8	4	1 3 3 1
4	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	16	5	1 4 6 4 1
...	...	...	...	...
n	$a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n$	2^n	$n + 1$	1 n ... n 1

Формулы в последней строке таблицы пока являются лишь предположениями. Для их обоснования полезно воспользоваться комбинаторным языком. *Комбинаторика* – это раздел математики, занимающийся подсчётом количества способов, которыми можно из некоторого конечного набора элементов выбрать часть элементов и расположить их в определённом порядке.

Рассмотрим, например, задачу подсчёта общего количества слагаемых в формуле бинома Ньютона. Фактически из двух элементов a и b составляется строка длиной n . На языке комбинаторики это означает, что из двух различных элементов, имеющих в неограниченном количестве, выбирают n элементов. То есть наша теоретическая алгебраическая задача эквивалентна такой бытовой задаче:

В ящике имеется два шара: на одном написано a , а на другом b . Наугад из ящика вытаскивается шар, записывается его надпись, и шар возвращается обратно. Так поступают n раз. Какое количество различных комбинаций букв a и b можно получить таким способом?

В общем случае, способы выбора из k элементов l элементов, таким образом, что элементы могут повторяться, и порядок их выбора важен, называются *размещениями с повторениями из k по l* ,

а их количество обозначается $\bar{A}_k^l$. Значит, с точки зрения комбинаторики наше предположение можно записать так: $\bar{A}_2^l = 2^l$.

Задача подсчёта количества слагаемых после приведения подобных отличается от предыдущей задачи тем, что слагаемые, содержащие a и b в одинаковых степенях, объединялись в одно слагаемое. Другими словами, если после очередного извлечения n шаров получалась комбинация с тем же количеством букв a и b , как и до этого, то эта комбинация не считается новой. В математике говорят, что строки с равным числом букв a и b отождествляются. Способы выбора из k элементов l элементов таким образом, что элементы могут повторяться, и порядок их выбора неважен, называются *сочетаниями с повторениями из k по l* , а их количество обозначается $\bar{C}_k^l$. Получаем гипотезу: $\bar{C}_2^l = l + 1$.

Итак, мы сформулировали две комбинаторные гипотезы. Доказательство первой из них тривиально вытекает из одного из основных комбинаторных законов – правила произведения: если элемент A можно выбрать p способами, а элемент B – q способами, то выбор пары элементов A и B можно осуществить pq способами. Для обоснования этого правила достаточно заметить, что каждый из p способов выбора элемента A комбинируется с q способами выбора элемента B . Наглядно это можно представить с помощью таблицы, каждая строка которой соответствует определённому выбору $A_1, A_2, \dots, A_p$ элемента A , а каждый столбец – выбору $B_1, B_2, \dots, B_q$ элемента B . Таблицу такого вида называют матрицей:

A_1B_1	A_1B_2	...	A_1B_q
A_2B_1	A_2B_2	...	A_2B_q
...	...	...	...
A_pB_1	A_pB_2	...	A_pB_q

Вторая же гипотеза еще более просто вытекает из того замечания, что различные сочетания с повторениями отличаются друг от друга только числом букв a . Количество же букв a в одном сочетании колеблется от нуля до n , т.е. может принимать одно из $n + 1$ различных значений.

Теперь можно перейти к наиболее важному для нас вопросу о коэффициентах при подобных слагаемых, так как именно эти числа

и определяют вид формулы бинома Ньютона. Пока затруднительно даже сделать какие-то предположения о том, что находится между первыми двумя и последними двумя коэффициентами, можно лишь отметить, что сумма всех этих коэффициентов должна равняться общему числу слагаемых, то есть 2^n .

Попытаемся опять переформулировать данную задачу на языке комбинаторики. Мы уже выяснили, что правая часть формулы $(a + b)^n$ содержит $n + 1$ слагаемое степени n . Следовательно, нам необходимо найти коэффициенты при слагаемых $a^{n-m}b^m$, где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Каждый такой коэффициент равен количеству строк из букв a и b длины n (т.е. количеству размещений из двух по n), содержащих в точности m букв b (значит, и в точности $n - m$ букв a). Эти размещения отличаются друг от друга только позициями, на которых находятся буквы b . Если позиции занумеровать, то для нахождения нужного коэффициента придется перебрать все возможные варианты выбора m чисел (номеров позиций) из набора чисел $1, 2, \dots, n$. При этом выбранные числа не должны повторяться (на одну и ту же позицию нельзя дважды записать символ), и порядок выбора не важен. Способы такого выбора называются *сочетаниями (без повторений) из n по m* , а их количество обозначается C_n^m . Конечно, мы могли выбирать не m позиций, занятых буквой b , а $n - m$ позиций, занятых буквой a , и так как коэффициент от этого не изменится, то должно выполняться равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$. Рассмотрим, например, как при $n = 4$ и $m = 2$, получился коэффициент 6. Для этого переберём все возможные варианты выбора двух позиций из четырёх:

Выбранные позиции буквы a	12	13	14	23	24	34
Выбранные позиции буквы b	34	24	23	14	13	12
Слагаемое	$aabb$	$abab$	$abba$	$baab$	$baba$	$baaa$

Для подсчёта количества сочетаний в общем виде сначала решим аналогичную задачу для размещений (без повторений), т.е. для ситуаций, когда нам важен порядок выбора. Итак, пусть из n цифр надо выбрать m (или, другими словами, записать m -значное

число, используя n различных цифр). Первую цифру можно выбрать n способами, вторую – уже $n - 1$ способами, так как мы не имеем права повторять первую выбранную цифру, и т.д., последней, m -ю цифру, – $n - m + 1$ способами, так как $m - 1$ цифр уже выбрано. Остаётся воспользоваться правилом умножения и записать

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$$

или, используя понятие факториала, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

В нашем примере, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Действительно, возможны числа 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43. Теперь очевидно, что каждое сочетание мы повторили два раза, так как две выбранные цифры A и B можно расположить как AB и как BA . Поэтому общее количество сочетаний из 4 по 2 равно $12 : 2 = 6$. А сколько раз мы повторим каждое сочетание в общем случае? Конечно же, столько раз, сколькими способами можно расположить m выбранных цифр, то есть сколько мы сумеем составить m -значных чисел из m различных цифр. А такое количество мы уже умеем вычислять – это $A_m^m = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot 1 = m!$.

Таким образом, окончательно получаем

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)}{m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n - m)! \cdot m!}.$$

Это и есть формула коэффициентов при слагаемых вида $a^m b^{n-m}$ и $a^{n-m} b^m$ (эти коэффициенты часто называют *биномиальными*).

Отметим, что полученная формула согласуется с подмеченной нами закономерностью, что каждая формула бинома Ньютона начинается с коэффициентов 1 и n и заканчивается коэффициентами n и 1. Действительно,

$$\begin{aligned} C_n^0 &= \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1, & C_n^1 &= \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n, \\ C_n^{n-1} &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n, & C_n^n &= \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1. \end{aligned}$$

Также для неё верно обоснованное выше тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$.

С учётом выведенной нами закономерности по совпадению биномиальных коэффициентов с числом сочетаний формулу бинома Ньютона можно записать следующим образом:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n.$$

Полученная формула бинома Ньютона при $a = 1$ и $b = 1$ даёт подмеченное выше равенство

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n;$$

а при $a = 1$ и $b = -1$ – равенство

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Упражнения

1. Пользуясь правилом вычисления биномиальных коэффициентов, найдите коэффициенты при слагаемых $a^{17}b^3$ и $a^{98}b^2$ в формулах $(a + b)^{20}$ и $(a + b)^{100}$ соответственно.
2. Вычислите коэффициент при x^6 при раскрытии скобок и приведении подобных в выражении $(x + 2)^9$.
3. Запишите четыре слагаемых с наибольшими степенями многочлена $(x + 1)^{100}$.
4. Запишите три слагаемых с наибольшими степенями многочлена $(x - 2)^{2n}$.
5. Вычислите коэффициент при x^{12} при раскрытии скобок и приведении подобных в выражении

$$(1 + 2x)^{14} + (3 - x)^{10}(x^3 - 5x^2 + x - 7).$$

6. Вычислите коэффициент при x^{17} при раскрытии скобок и приведении подобных в выражении

$$(3 - x)^{19} + (5 + x)^{16}(7x - 1).$$

7. Используя очевидное равенство $(a+b)^{2n} = ((a+b)^n)^2$, докажите тождество

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Задачи для самостоятельного решения

По определению $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$ и $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$.

1. Упростить $\frac{(n+1)!}{n!}, \frac{(n+5)!}{(n+3)!}, \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}, \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!}, \frac{(2n)!}{(2n)!!}$.

2. Решить уравнение $C_x^{x-2} = 45$.

3. Найти все допустимые x , если $C_n^{n-k} = C_n^k C_n^x$.

4. Найти все допустимые n , если $C_{n+3}^n - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$.

5. Записать по формуле бинома Ньютона:

$$(1-x^2)^3 = ?, \quad (2+x)^4 = ?, \quad (a-b)^n = ?, \quad (1+y)^{2022} = ?$$

6. Записать по формуле бинома Ньютона $(1-x)^b$, где b – число букв вашей фамилии.

7. Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3 .

8. $(a+b+c)^2 =$
 $(a+b+c)^3 =$
 $(*) (a+b+c)^n =$

9. Найти коэффициент многочлена $(1-x+x^2)^3$ при x^3 .

10. (*) Доказать, что $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$, используя бином Ньютона.

11. (*) Доказать, что $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$, используя бином и оценку геометрической прогрессией.

12. Найдите сумму:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \sum_{k=1}^n 1; & \text{(e)} \sum_{k=0}^n \frac{2^k + 3^k}{6^k}; & \text{(i)} \sum_{k=0}^b C_b^k a^k, \text{ где } a \\
& & \text{— число букв ва-} \\
\text{(b)} \sum_{k=1}^n k; & \text{(f)} \sum_{k=0}^n (-1)^k; & \text{шего имени, } b \text{ —} \\
& & \text{число букв вашей} \\
\text{(c)} \sum_{k=0}^n 2^k; & \text{(g)} \sum_{k=0}^n C_n^k; & \text{фамилии.} \\
\text{(d)} \sum_{k=0}^n (2^k - 3^k); & \text{(h)} \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k; &
\end{array}$$

Ответы. 2. 10 (−9 не подходит). 3. 0, n . 4. 28. 6. $\sum_{k=0}^b (-1)^k C_b^k x^k$.

7. $C_{16}^6 x^3$. 8. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$;

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$;

$(a+b+c)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$. 9. −7. 12. (a) n ; (b) $\frac{n(n+1)}{2}$;

(c) $2^{n+1} - 1$; (d) $\frac{2^{n+2} - 3^{n+1} - 1}{2}$; (e) $\frac{7}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$; (f) $\frac{1 + (-1)^n}{2}$;

(g) 2^n ; (h) 3^n ; (i) $(1 + a)^b$.

ЧТО ИЗУЧАЕТ СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА?

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ НА ММФ



01.03.01 Современная математика и математическое моделирование

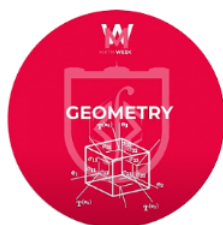
01.03.03 Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика

02.03.01 Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Отборочная комиссия ММФ ТГУ:
+7 960 971 47 41
pk.mmf.tsu@mail.ru



ПУТЕШЕСТВИЕ НА КАФЕДРЫ ММФ



ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Козловская Татьяна Анатольевна

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ГЕОМЕТРИИ ММФ ТГУ
СТАРШИЙ НАУЧНЫЙ СОТРУДНИК НОМЦ ТГУ

Кафедра геометрии: [ВИДЕО](#)



ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Гурина Елена Ивановна

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ММФ ТГУ
ИНЖЕНЕР НОМЦ ТГУ

Кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования: [ВИДЕО](#)



ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Пчелинцев Евгений Анатольевич

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ММФ ТГУ

Кафедра математического анализа и теории функций (теория вероятности и математическая статистика): [ВИДЕО](#)



ПУТЕШЕСТВИЕ НА КАФЕДРЫ ММФ

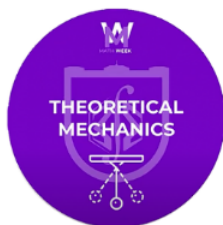


ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Лазарев Вадим Ремирович

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ММФ ТГУ

Кафедра математического анализа и теории функций (функциональный и комплексный анализ): [ВИДЕО](#)



ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Мирошниченко Игорь Валерьевич

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ММФ ТГУ
СТАРШИЙ НАУЧНЫЙ СОТРУДНИК НОМЦ ТГУ

Кафедра теоретической механики: [ВИДЕО](#)



ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Лобода Егор Леонидович

ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ММФ ТГУ

Кафедра физической и вычислительной механики: [ВИДЕО](#)

Тьюториалы

Машинное обучение простым языком. Ч.1
Машинное обучение простым языком. Ч.2



Построение финансовой стратегии
для опциона



Теплообмен в повседневной жизни



Кейс «Знакомство с пакетом OpenFOAM»



Тьюториалы погружают в направления подготовки, реализуемые на механико-математическом факультете, и помогают заложить фундамент будущей учебы и работы в области теоретической и прикладной математики.

После прохождения этого модуля Вы:

- 1) Получите представление о том, чем занимается современная математика;
- 2) Сравните несколько специальностей, относящихся к современной математике и ее приложениям, и выберете ту, которая больше подходит Вам.

По запросу обучающихся возможно провести занятия в дистанционном формате с преподавателями ММФ ТГУ для более детального погружения в тематику машинного обучения, теории теплообмена или финансовой математики!

РАБОЧАЯ ПРОФЕССИЯ НА ММФ – «Помощник программиста»



Код профессии 06.001 (по приказу от 20.07.2022 № 424н)
Квалификационный разряд: 3

Трудоемкость: 148 ч.

Форма обучения: очная.

Чем занимается помощник программиста: разработка, отладка, проверка работоспособности, модификация компьютерного программного обеспечения.

ПРОФЕССИЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ НА ММФ – УЧИТЕЛЬСКИЙ ТРЕК



В рамках программы 01.03.01. Математика. «Современная математика и математическое моделирование» сроком обучения 5 лет реализуется Учительский трек с присвоением в дипломе квалификации: «Математик. Преподаватель.»

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ МАГИСТРАТУРА НА ММФ – «МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЦИФРОВЫЕ ДВОЙНИКИ»

Профессиональная магистратура «Моделирование и цифровые двойники» («Simulation and DTwins»). Это программа для тех, кто хочет работать с цифровыми двойниками – виртуальными копиями реальных объектов и процессов, помогающими оптимизировать производство, прогнозировать неисправности и снижать затраты на их профилактику и устранение. Навыки, которые получают студенты, уже сейчас востребо-

ваны в энергетике, транспорте, промышленности и здравоохранении.

Подробнее в телеграм-канале:

