ДЕНЬ π. КОНКУРС МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАГАДОК!

ПОДСКАЗКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАГАДКИ 4В.

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА.

При решении загадки 4в) можно опираться как на известный факт на ***формулу Эйлера*** для плоских графов: **В** – **Р** + **Г** = 2.

Для более строгих формулировки и доказательства формулы Эйлера нам понадобятся некоторые понятия из теории графов.

Определение 1. ***Граф*** — это конечное множество точек (***вершин***), некоторые из которых соединены линиями (***рёбрами***).

Определение 2. ***Путь*** в графе — это последовательность вершин, в которой каждая пара соседних вершин соединена ребром. Граф называют ***связным***, если для любой пары вершин существует путь, соединяющий эти вершины.

Определение 3. ***Цикл*** — это путь, не проходящий по одинаковым рёбрам, в котором первая и последняя вершина совпадают.

Определение 3. Граф называют ***плоским***, если все его вершины и рёбра принадлежат некоторой плоскости.

Определение 4. Пусть задан плоский граф. Часть плоскости, ограниченную рёбрами этого графа и не содержащую внутри других рёбер, называют ***гранью***.

Заметим, что внешняя часть плоскости тоже образует грань.

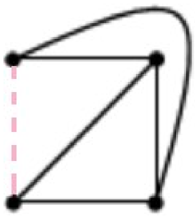
Таким образом, для произвольного плоского графа можно определить три числовые величины:

- количество вершин **В**;
- количество рёбер **Р**;
- количество граней **Г**.

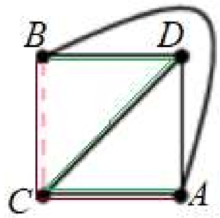
Например, для графа, изображенного на рисунке, **В** = 4, **Р** = 6, **Г** = 4.

Формула Эйлера. Для любого связного плоского графа выполняется равенство

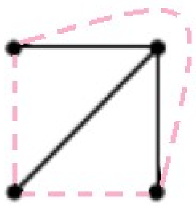
В – **Р** + **Г** = 2.



Доказательство. Рассмотрим произвольный плоский граф. Предположим, что для этого графа **Г** > 1, т.е. имеется хотя бы одна грань, не являющаяся внешней частью плоскости. Тогда имеется ребро, отделяющее внешнюю грань от внутренней. Удалив это ребро, мы получим новый граф, в котором величины **Р** и **Г** уменьшились на единицу, а значит, значение выражения **В** – **Р** + **Г** не изменилось (на рисунке пример удаления такого ребра показан розовым пунктиром).



Заметим, что при таком удалении ребра не нарушается связность графа. Действительно, выберем две произвольные вершины в новом графе и зафиксируем путь, соединявший эти вершины в исходном графе. Если выбранный путь не содержал удалённое ребро, то этот путь будет соединять данные вершины и в новом графе. Пусть теперь выбранный путь содержал удалённое ребро. Обратим внимание, что удалённое ребро принадлежит циклу, ограничивающему внутреннюю грань, а значит, проход по удалённому ребру можно заменить проходом по оставшейся части границы этой грани, и построенный с помощью такой замены путь будет соединять эти вершины уже в новом графе (на рисунке показан пример замены удалённого ребра BC в коричневом пути, соединяющем вершины A и B в исходном графе, на рёбра CD и DB в зелёном пути, соединяющем вершины A и B в новом графе; CBD – это цикл, образующий границу внутренней грани).



Если после удаления ребра по-прежнему **Г** > 1, то повторим процесс удаления ребра, разделяющего внешнюю и внутреннюю грани. В итоге, мы получим граф, образующий только одну внешнюю грань. Для этого нового графа **Г** = 1, а значение выражения **В** – **Р** + **Г** совпадает со значением этого же выражения для исходного графа.

Заметим, что полученный граф связен и не содержит циклов, так как иначе цикл ограничивал бы некие внутренние грани (такой граф называют ***деревом***).

Покажем, что дерево, имеющее более одной вершины, всегда содержит вершину, из которой исходит ровно одно ребро (такую вершину называют ***листом***). Действительно, предположим, что некоторый связный граф без циклов не содержит ни одного листа. Тогда выберем произвольную вершину A_1, и по любому ребру перейдем в соседнюю вершину A_2. Так как A_2 не является листом, то из нее исходит ребро, отлично от ребра A_1A_2. По этому ребру перейдём в вершину A_3 и т.д., из любой вершины A_k можно перейти в следующую вершину A_{k+1}. Все вершины A_1, A_2, A_3, …, A_k, A_{k+1}, … различны, так как граф не содержит циклов. Получили бесконечное множество вершин. Противоречие.

Предположим, что в получившемся у нас дереве **В** > 1. Тогда в нём имеется лист. Удалив эту вершину вместе с единственным ребром, исходящим из этой вершины, мы получим новый граф, в котором величины **В** и **Р** уменьшились на единицу, а значит, значение выражения **В** – **Р** + **Г** не изменилось (на рисунке пример удаления такой вершины вместе с ребром показан синим пунктиром).

Заметим, что при таком удалении не нарушается связность графа. Если после удаления листа вместе с ребром по-прежнему **В** > 1, то повторим процесс удаления листа и соответствующего ему ребра. В итоге, мы получим граф, для которого **В** = 1, **Р** = 0, **Г** = 1, а значит, для этого графа **В** – **Р** + **Г** = 1 – 0 + 1 = 2.

Осталось заметить, что все проведенные преобразования графа не изменяли значение выражения **В** – **Р** + **Г**, поэтому, и для исходного графа это значение равно двум.

Теорема доказана.