ДЕНЬ π. КОНКУРС МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАГАДОК!

РЕШЕНИЯ ЗАГАДОК.

Загадка 1. Для изображения окружности на клетчатой бумаги удобно пользоваться правилом: «3-1, 1-1, 1-3». Отметим любую узловую точку (назовем ее A). Отступив от A на 3 клетки вправо и на 1 клетку вниз, получим точку B. Далее, отступив от B на 1 клетку вниз и на 1 клетку вправо, получим точку C. И, наконец, отступив от C на 3 клетки вниз и на 1 вправо, получим точку D. Соединив плавной линией эти точки, мы получим четверть окружности (рис. 1). Повторив аналогичные построения еще три раза, увидим всю окружность целиком (рис. 2).

Обоснуйте правило «3-1, 1-1, 1-3».

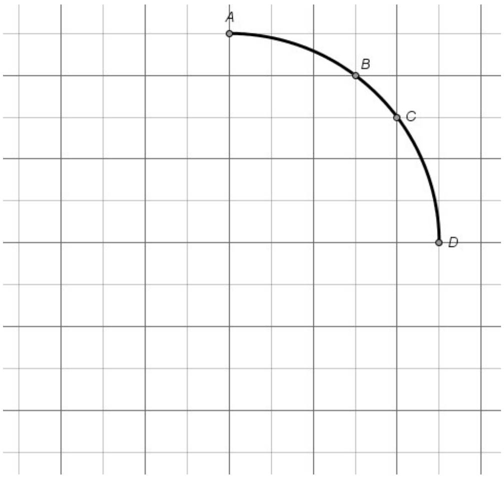


Рис. 1

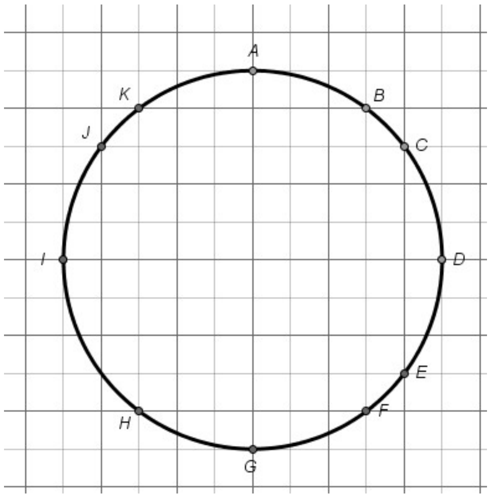
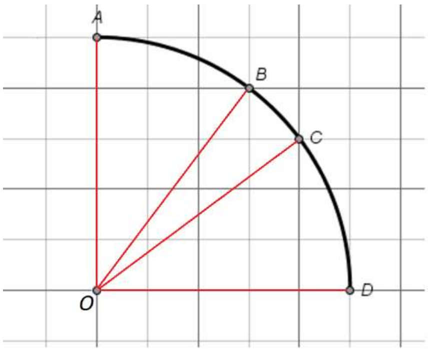


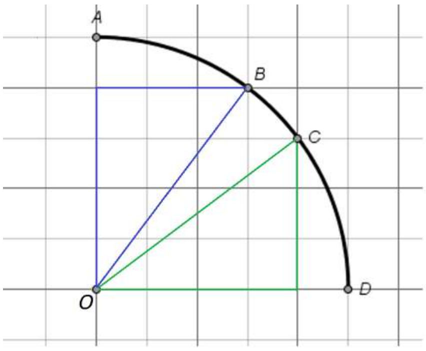
Рис. 2



Решение. Необходимо доказать, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности, причем точки A и D ограничивают четверть этой окружности.

Проведём через точку A вертикальную прямую, а через точку D – горизонтальную. Обозначим через O точку их пересечения. Докажем, что O – центр окружности, на которой лежат точки A, B, C, D, т.е. что $OA = OB = OC = OD$ (эти отрезки выделены красным на рисунке).

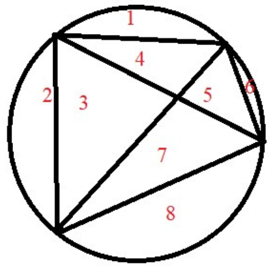
Сложив отдельно первые и вторые координаты из правила «3-1, 1-1, 1-3», видим, что $OA = OD = 5$.



Длины отрезков OB и OC найдём с помощью теоремы Пифагора из треугольников, выделенных синим и зелёным цветами на рисунке: $OB = OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (синий и зелёный треугольники – это примеры так называемых «египетских» прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5).

Осталось заметить, что $\angle AOD = 90°$, а вся окружность составляет 360°. Поэтому точки A и D ограничивают четверть искомой окружности.

Загадка 2. Отметим на окружности четыре различных точки. Затем каждую пару отмеченных точек соединим отрезком. Занумеровав части, на которые проведенные отрезки разделили круг, получим, что образовалось 8 частей.

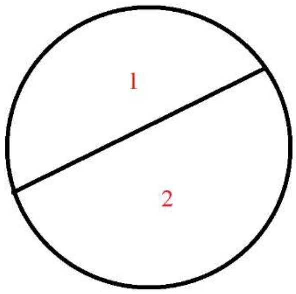


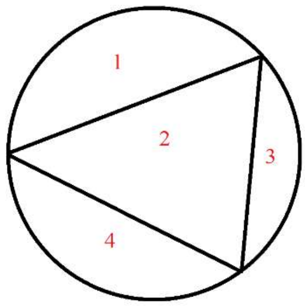
А на сколько частей проведенные отрезки разделили бы круг, если бы точек было не четыре, а две, три или пять? Сделайте аналогичные построения и заполните таблицу.

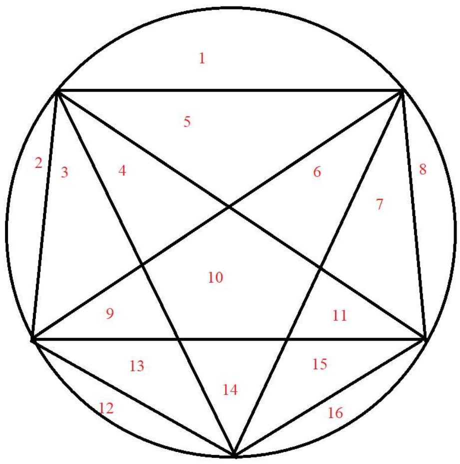
Количество точек на окружности (n)	2	3	4	5
Количество частей, на которые разделился круг (P_n)			8	

Если для n точек на окружности обозначить через P_n количество частей, на которые разделился круг, то на основе данных из таблицы запишите гипотезу об общей форуме, выражающей P_n через n.

Решение. Выполним аналогичные чертежи для двух, трёх и пяти отмеченных на окружности точек.





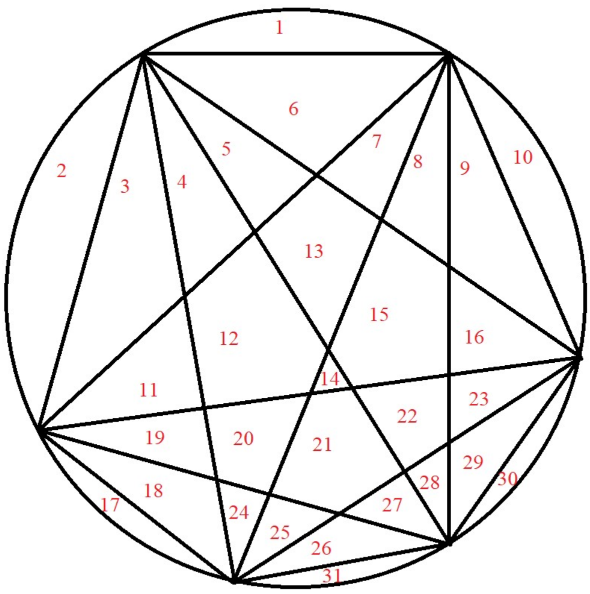


Заполним таблицу.

Количество точек на окружности (n)	2	3	4	5
Количество частей, на которые разделился круг (P_n)	2	4	8	16

Заметив, что во второй строчке таблицы, находятся степени двойки с натуральными показателями, сформулируем гипотезу: $P_n = 2^{n-1}$.

Загадка 3. Отметьте на окружности шесть различных точек. Затем каждую пару отмеченных точек соедините отрезком. Точки должны быть выбраны так, чтобы никакие три из проведенных отрезков не имели общей точки внутри окружности (если это условие не выполняется, то немного сдвиньте одну или несколько точек, отмеченных на окружности). На сколько частей проведенные отрезки разделили круг? Согласуется ли этот результат с гипотезой из загадки 2?



Решение. Выполнив аналогичный чертеж для шести отмеченных на окружности точек, получим, что $P_n = 31$, что не согласуется с гипотезой $P_n = 2^{n-1}$, так как $2^5 = 32$.

Загадка 4. Пусть на окружности отмечено n точек ($n \geq 2$), и через каждую пару отмеченных точек проведён отрезок, причем ни через какую внутреннюю точку не проходят более двух отрезков. Докажите:

а) всего проведено $\dfrac{n(n-1)}{2}$ отрезков;

б) проведённые отрезки пересекаются в $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ точках внутри окружности;

в) проведённые отрезки делят круг на $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ частей.

Решение. **а)** *Первый способ.* Обозначим отмеченные точки как A_1, A_2, A_3, …, A_n. Будем поочередно стирать отрезки и считать количество стёртых отрезков. Сначала сотрём $(n-1)$ отрезков, исходящих из точки A_1 в точки A_2, A_3, …, A_n. Затем сотрём $(n-2)$ отрезков, исходящих из точки A_2 в точки A_3, A_3, …, A_n. Продолжаем далее аналогично стирать отрезки, исходящие из точки A_3, A_4, …, A_{n-1}. Последним сотрём единственный оставшийся отрезок, исходящий из точки A_{n-1} в точку A_n. Таким образом, всего будет стёрто $(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ отрезков. Данную сумму можно вычислить как сумму $(n-1)$ члена арифметической прогрессии, первый член которой $a_1=n-1$, а последний $a_{n-1}=1$:

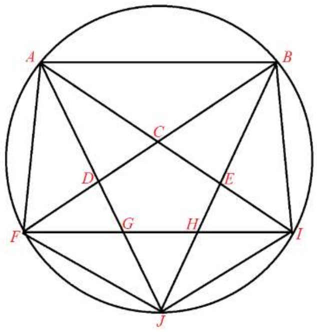
$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{a_1+a_{n-1}}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Второй способ. Из каждой вершины исходит $(n-1)$ отрезков в остальные вершины. Следовательно, для подсчёта общего количества отрезков необходимо вычислить произведение $n(n-1)$. Но при таком подсчёте каждый отрезок будет учтён два раза (на самом деле, отрезок AB один раз учтён среди всех отрезков, исходящих из точки A, и ещё раз учтён среди всех отрезков, исходящих из точки B). Следовательно, общее количество отрезков (без их двойного учёта) равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Третий способ. Количество проведенных отрезков совпадает с количеством способов выбора двух точек из n отмеченных точек, причём порядок перечисления выбранных двух точек неважен, т.е. выбор AB считаем неотличимым от выбора BA. Количество способов такого выбора вычисляется по формуле количества сочетаний из n по два: $C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

б) Покажем, что точкам пересечения проведённых отрезков взаимно однозначно соответствуют неупорядоченные наборы четырёх точек, выбранных среди n отмеченных точек. Действительно, если E – точка пересечения отрезков AB и CD, то точке E соответствует набор $ABCD$. С другой стороны, любые четыре из n отмеченных точек при соединении их по порядку расположения их на окружности образуют выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в искомой точке пересечения. Количество способов неупорядоченного выбора четырёх точек из n отмеченных точек вычисляется по формуле количества сочетаний из n по четыре: $C_n^4=\dfrac{n!}{(n-4)!4!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

в) При доказательстве этого пункта будем опираться на известную формулу Эйлера **В** – **Р** + **Г** = 2, где **В** – количество вершин плоского графа, **Р** – количество рёбер, **Г** – количество граней. Рассмотрим граф, вершинами которого являются как точки, отмеченные на окружности, так и точки пересечения проведённых отрезков (на рисунке показан пример для $n = 5$ отмеченных точек, десять вершин рассматриваемого графа обозначены буквами A, B, …, J).



Из пункта б) следует, что **В** = $n+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Подсчитаем количество рёбер данного графа. Из каждой вершины, являющейся отмеченной точкой на окружности, исходит $(n - 1)$ проведённых отрезков и две дуги исходной окружности, т.е. всего из такой вершины исходит $(n + 1)$ рёбер. Так как имеется n таких вершин, то всего получаем $n(n+1)$ рёбер. А из каждой вершины, являющейся точкой пересечения проведённых отрезков, исходит четыре ребра. Так как имеется $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ таких вершин, то всего получаем $4\cdot\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ рёбер.

Так как при этом подсчёте каждое ребро учитывалось дважды, то общее количество рёбер **Р** = $\dfrac{1}{2}\left(n(n+1)+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\right)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$.

Подставим в формулу Эйлера:

$$n+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}+\textbf{Г}=2.$$

Выразим количество граней:

$$\textbf{Г}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+2.$$

Так как одна из граней является внешней частью плоскости, а остальные грани – это части, на которые разделили круг проведённые отрезки, то количество частей равно

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+1.$$