День числа π

Число π в теории вероятностей

Е.А. Пчелинцев

Томск 2024

Число π - это

- обычно наши знания о числе π заканчиваются на этом: **3,14**;
- математическая константа, равная отношению длины окружности к её диаметру;
- иррациональное число, т.е. оно бесконечно и является непериоди-ческой десятичной дробью.

Вычисление числа π

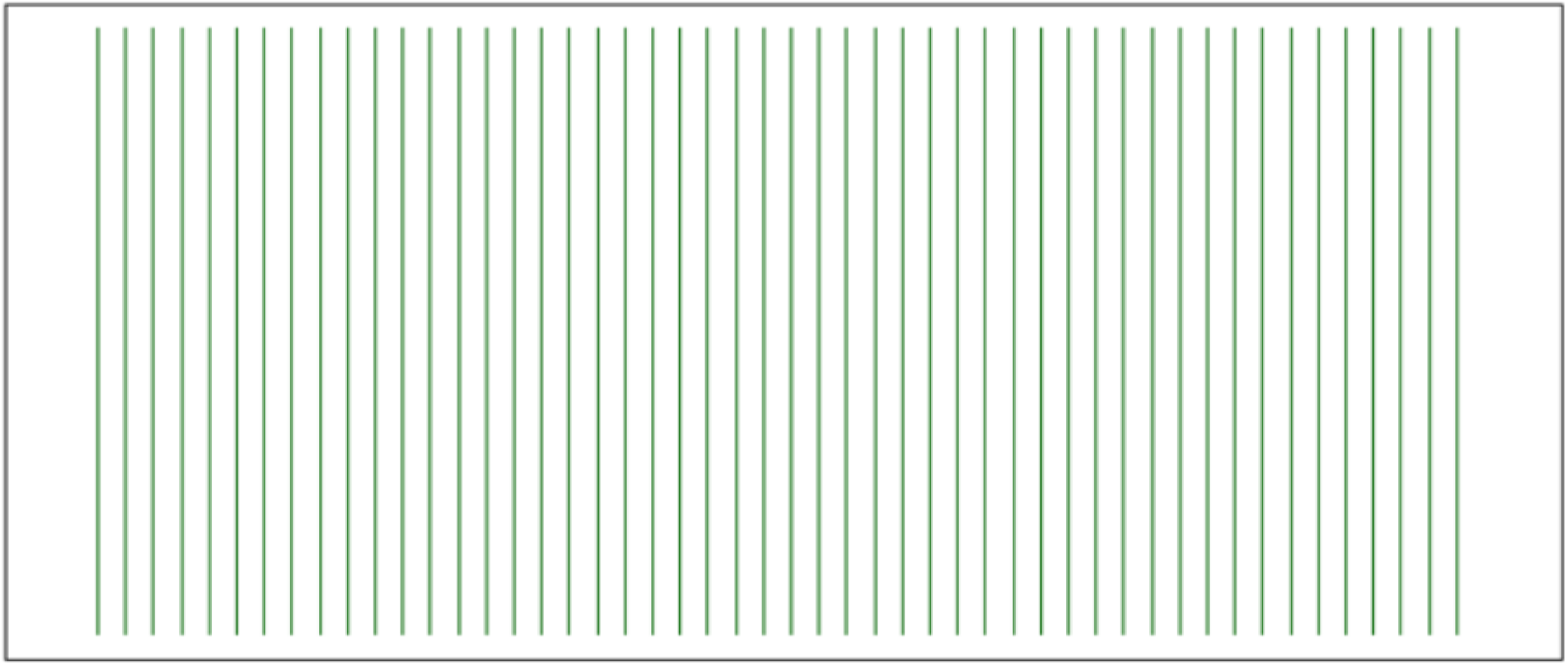
- *Архимед* (≈220 г. до н.э.): $\boldsymbol{S = \pi R^2}$;
- *Цзу Чунчжи* (5 в. н.э.): $\boldsymbol{\pi} \approx {}^{\mathbf{355}}/_{\mathbf{113}}$;
- *Иоганн Генрих Ламберт* (18 в.): доказал **иррациональность** числа, которая выражается в том, что мы никогда не знаем реальную длину окружности.
- *Жорж-Луи Леклерк де Бюффон* (1777 г.): **задача об игле**.
- **Методы Монте-Карло**

Задача на вычисление π (кейс)

У вас есть моток ниток и иголка длины ***l*>0**, и Вас просят посчитать приблизительное значение числа π, используя лишь эти предметы?

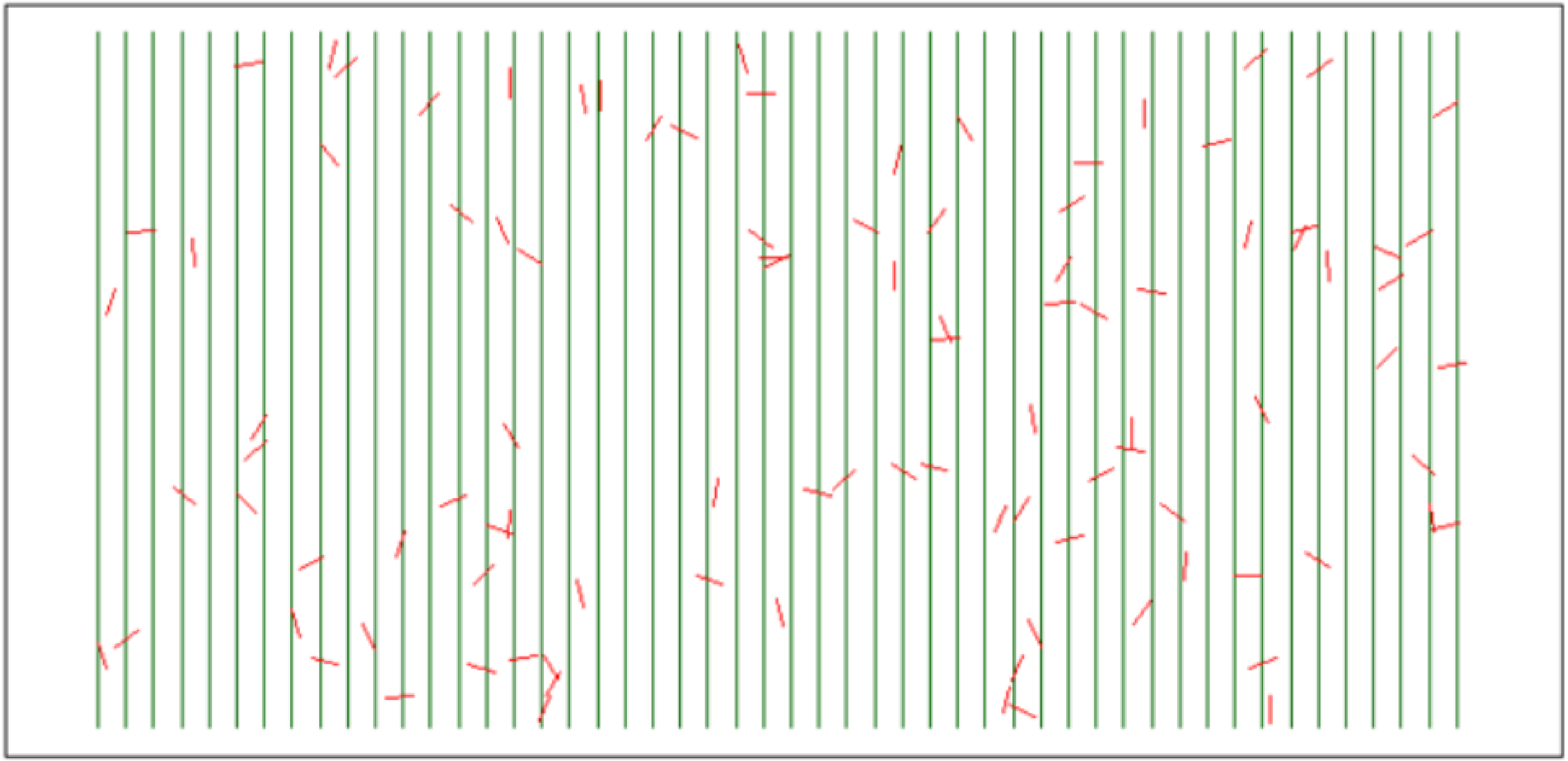
Распределяем нить

Нанесем на плоскость некоторое количество параллельных отрезков (из нитей) одинаковой длины на расстоянии ***l*** друг от



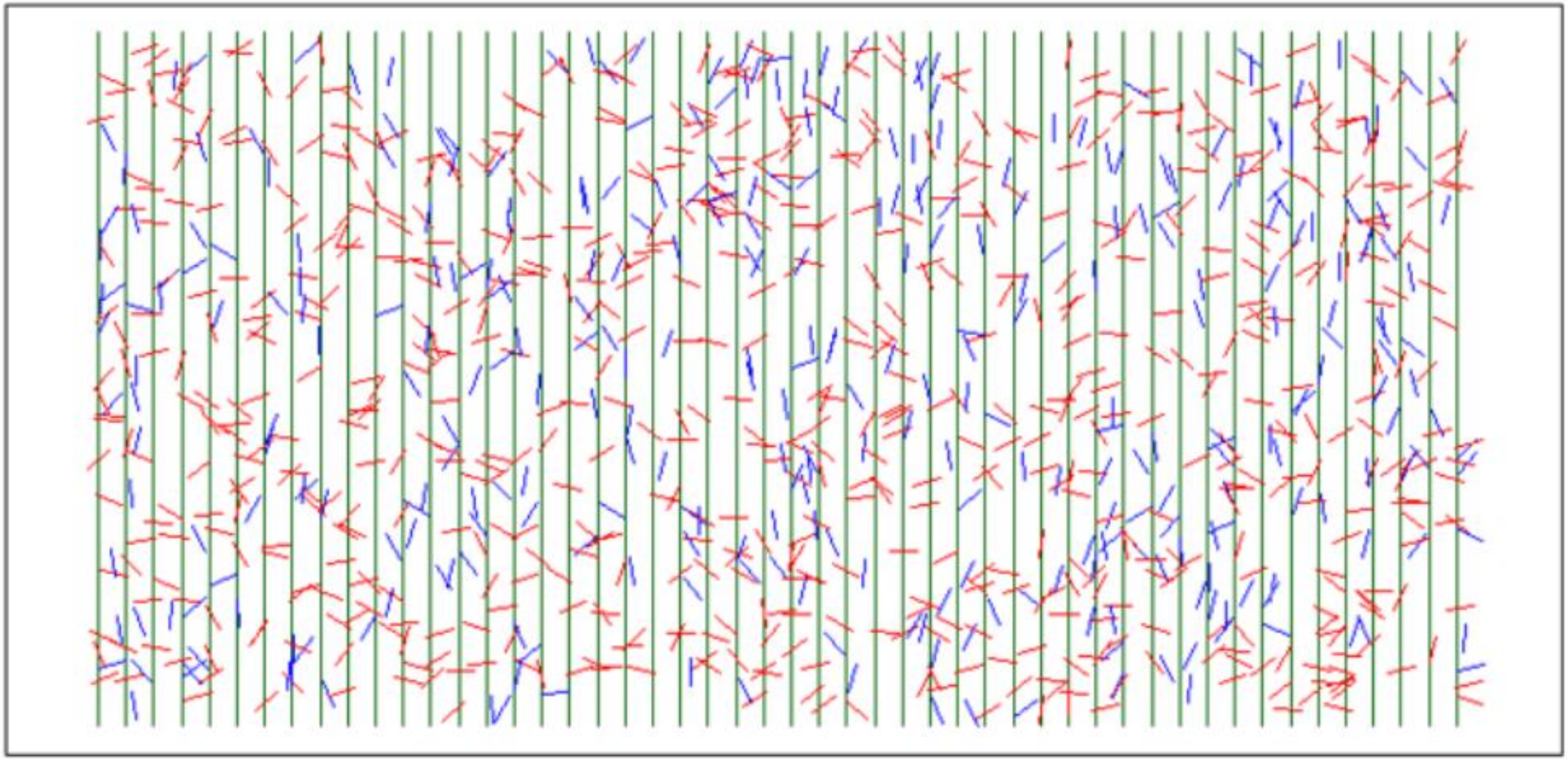
Бросаем иглу

Кинем на это поле **100 раз** иголку.



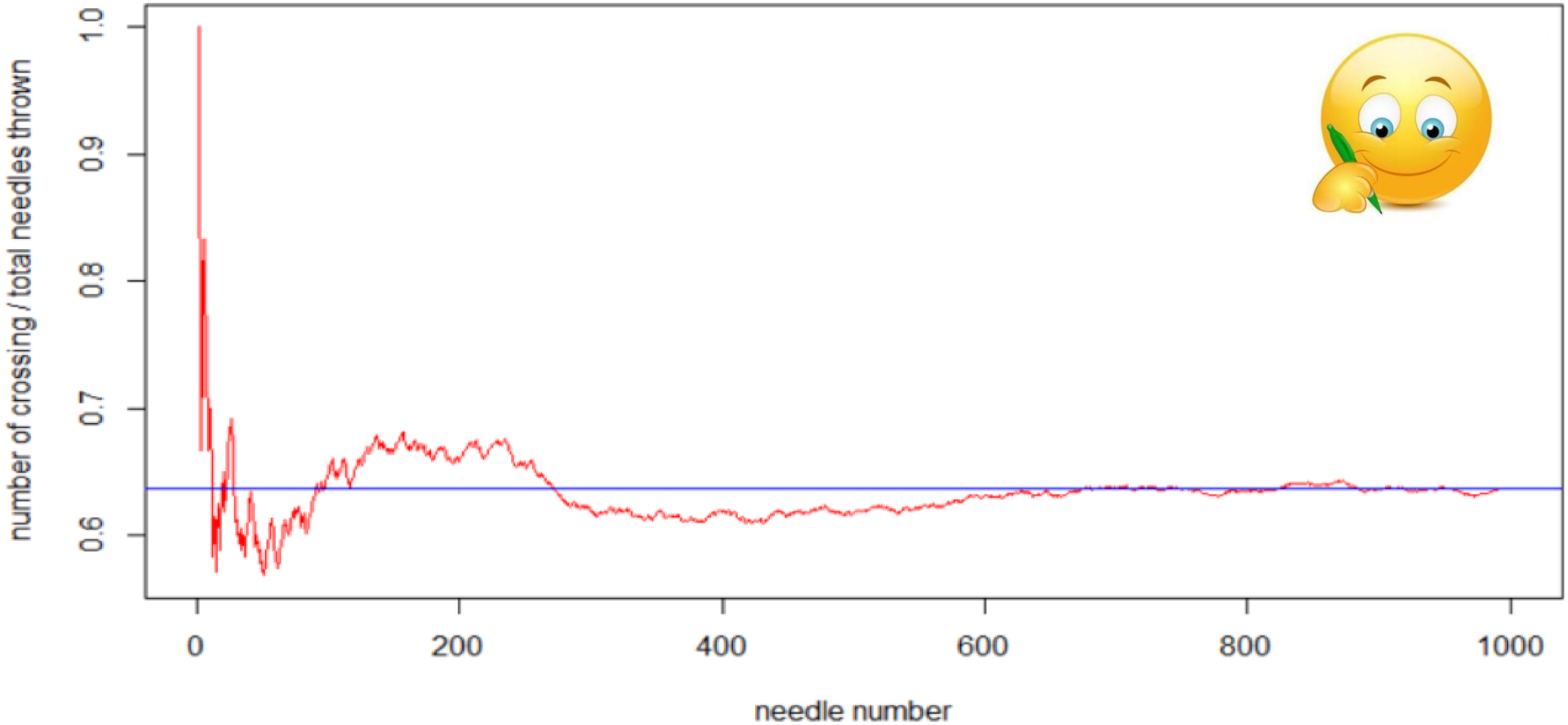
И еще бросаем

Добавим еще **900** и отметим те иголки, которые пересекают нити, красным цветом



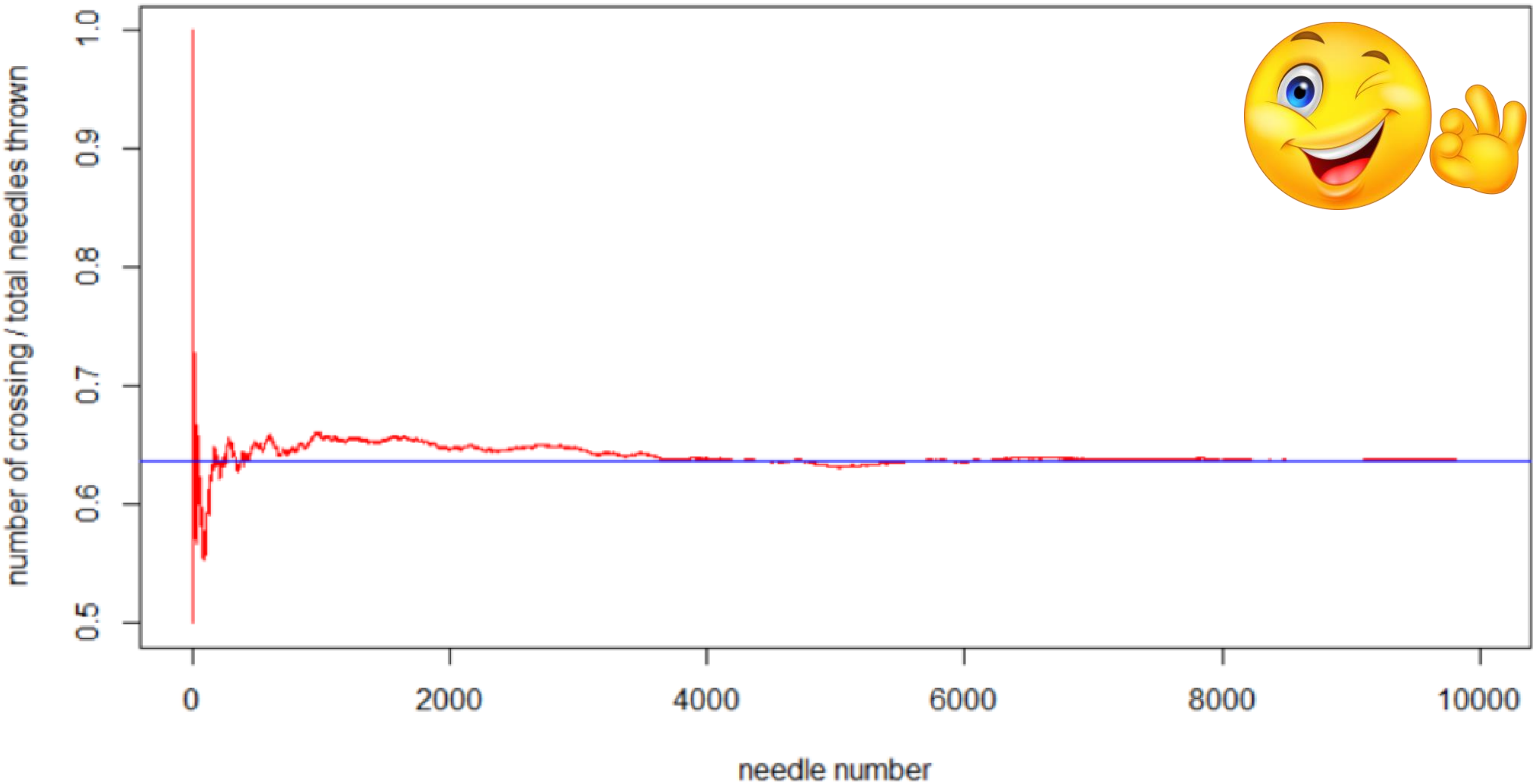
Подсчет последовательности

Записываем на каждом шаге отношение количества иголок, попавших на нити, к общему количеству брошенных иголок



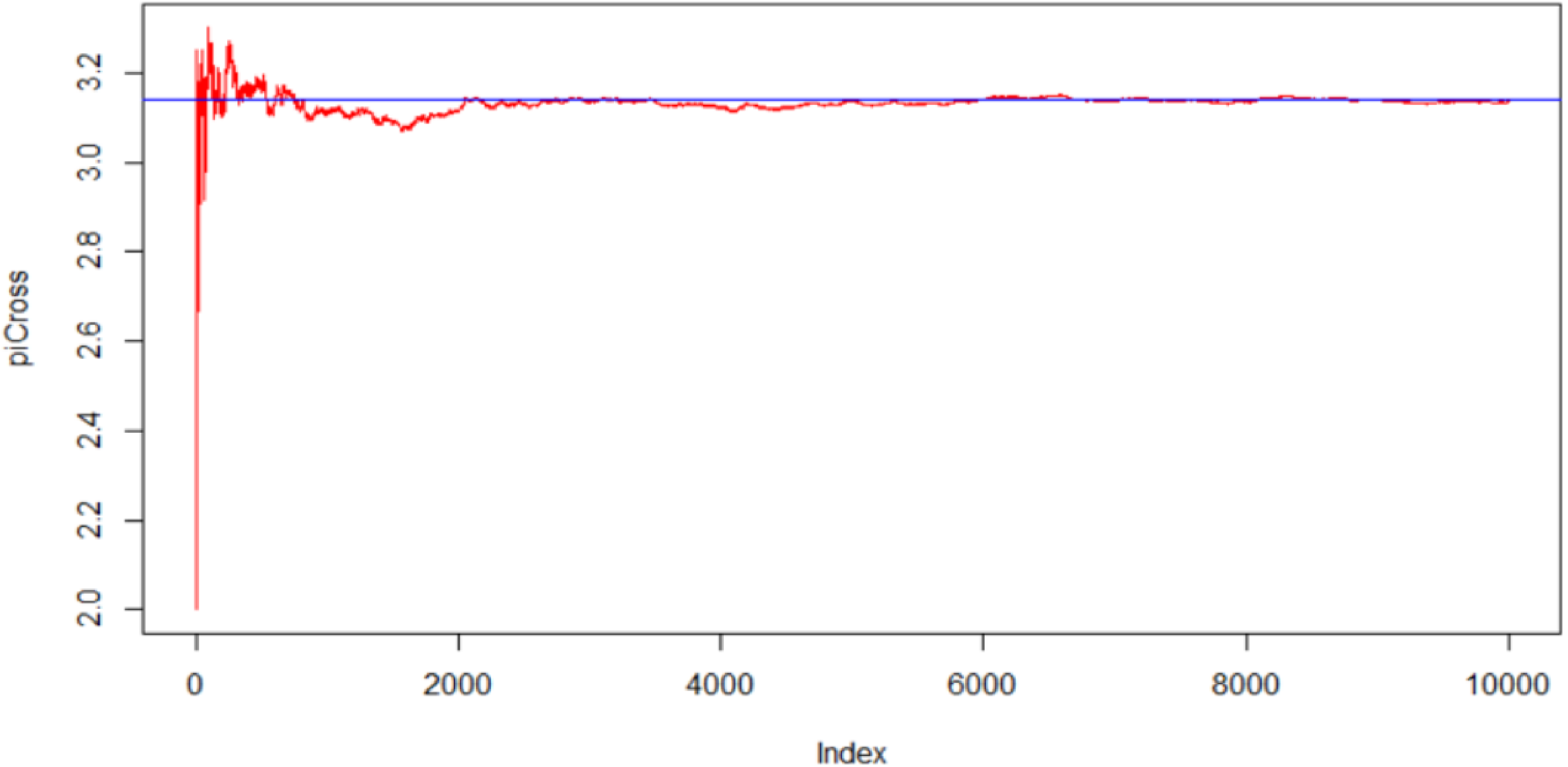
Удлиним последовательность

Если бросить иголку 10000 раз, то картина будет более точной



Преобразование последовательности

А теперь разделим двойку на каждое число полученной последовательности



Вычисление числа π

Если найти среднее из последних пяти тысяч элементов послед-ти, получим **3.141585**, в то время как число $\pi \approx$ **3.141593**…

В общем, не секрет, что полученная последовательность сходится к числу π. Но как такое могло произойти?

π и задача Бюффона

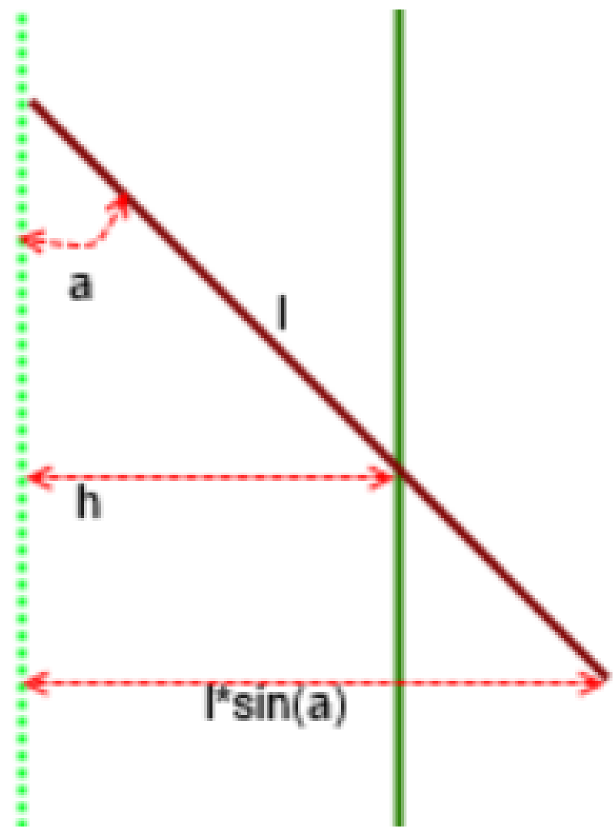
Бросается иголка длины ***l*** на лист бумаги, на котором начерчены линии на таком же расстоянии ***l***. Какова вероятность того, что иголка пересечёт одну из линий?

Решение задачи Бюффона

Будем рассматривать иголку и ближайшую от нее линию справа. В бросании иголки две переменные:

1) угол падения **α** (**0**≤**α**≤**π**)

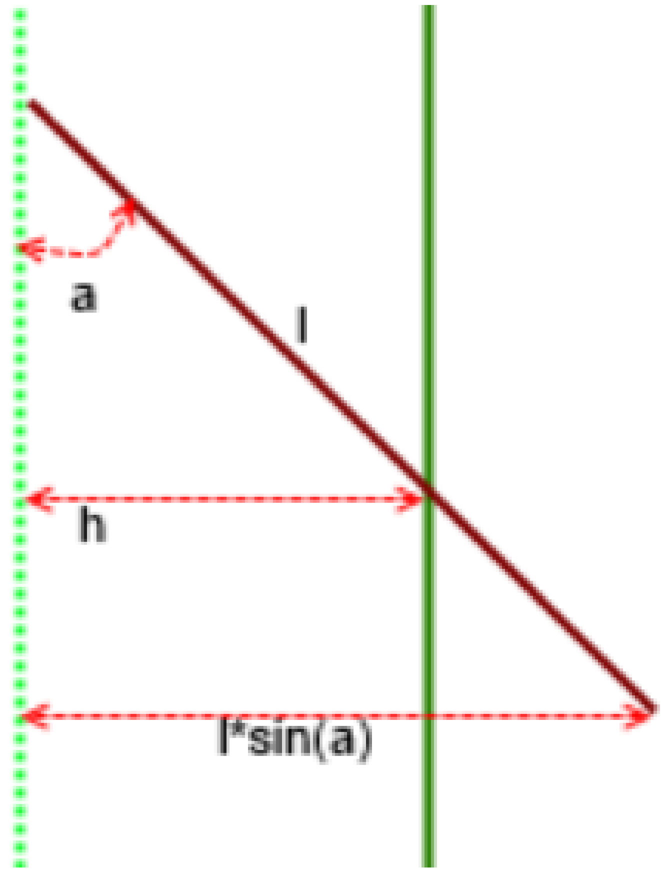
2) расстояние от левого конца иглы **h**.



Решение задачи Бюффона

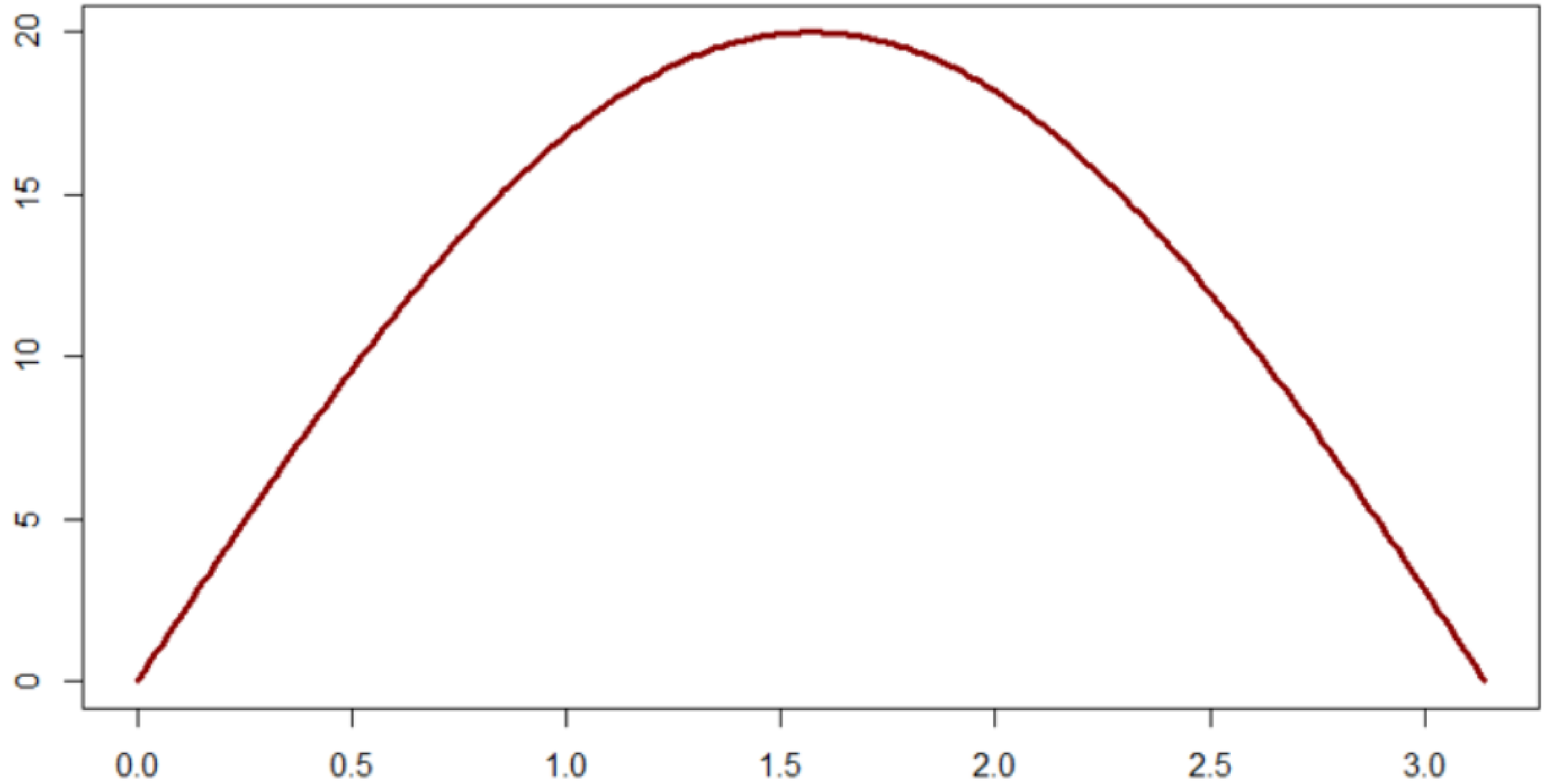
Длина противоположного катета от угла **a** будет равна синусу угла, умноженного на длину гипотенузы ***l***.

Если **h** меньше либо равна катета напротив угла **a**, то игла пересекает линию.



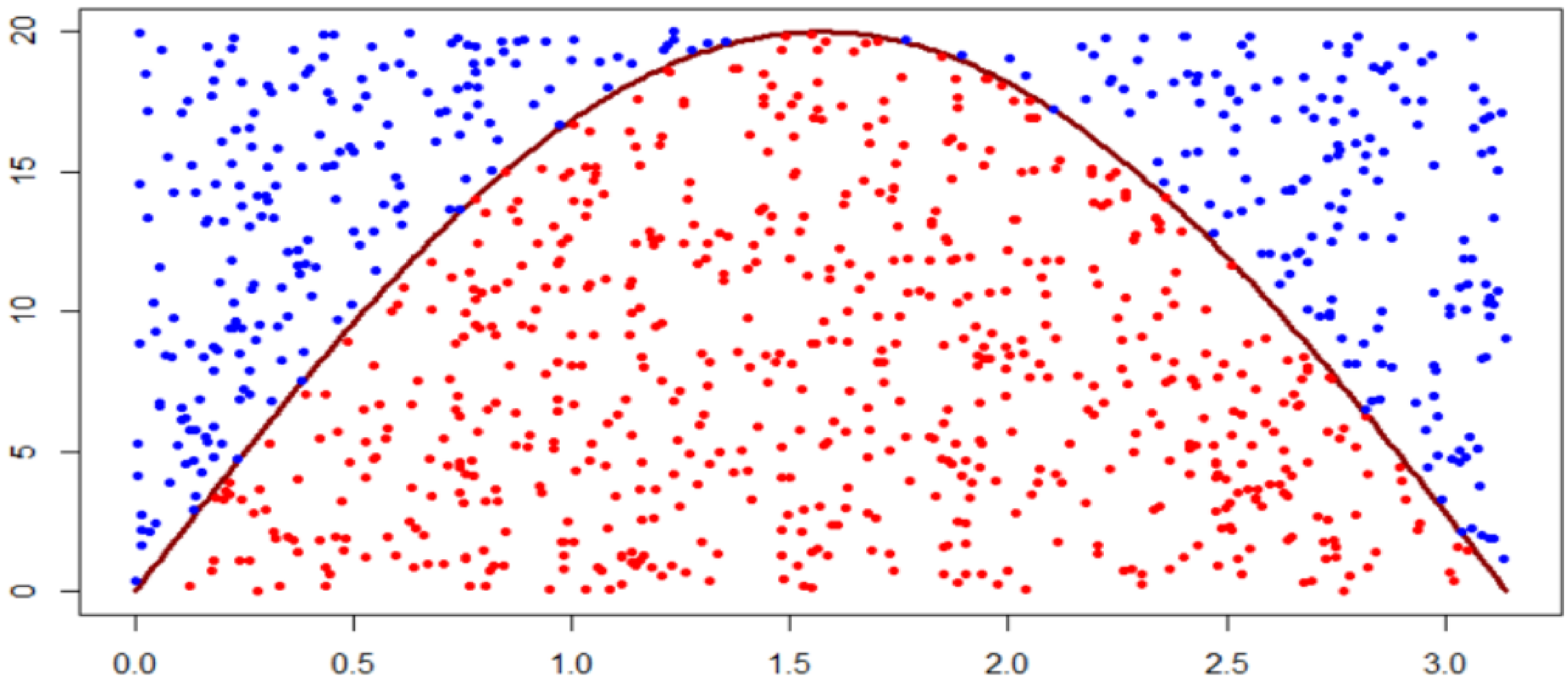
Решение задачи Бюффона

Изобразим график: **h=*l*·sin(α)**



Решение задачи Бюффона

Если мы посчитаем для каждой брошенной иголки **h** и **α** и отметим эти точки на графике, то картина будет следующая:



Решение задачи Бюффона

Таким образом, вероятность того, что иголка пересечет линию, будет равна отношению площади фигуры под графиком ***2·l*** к площади прямоугольника ***π·l*** :

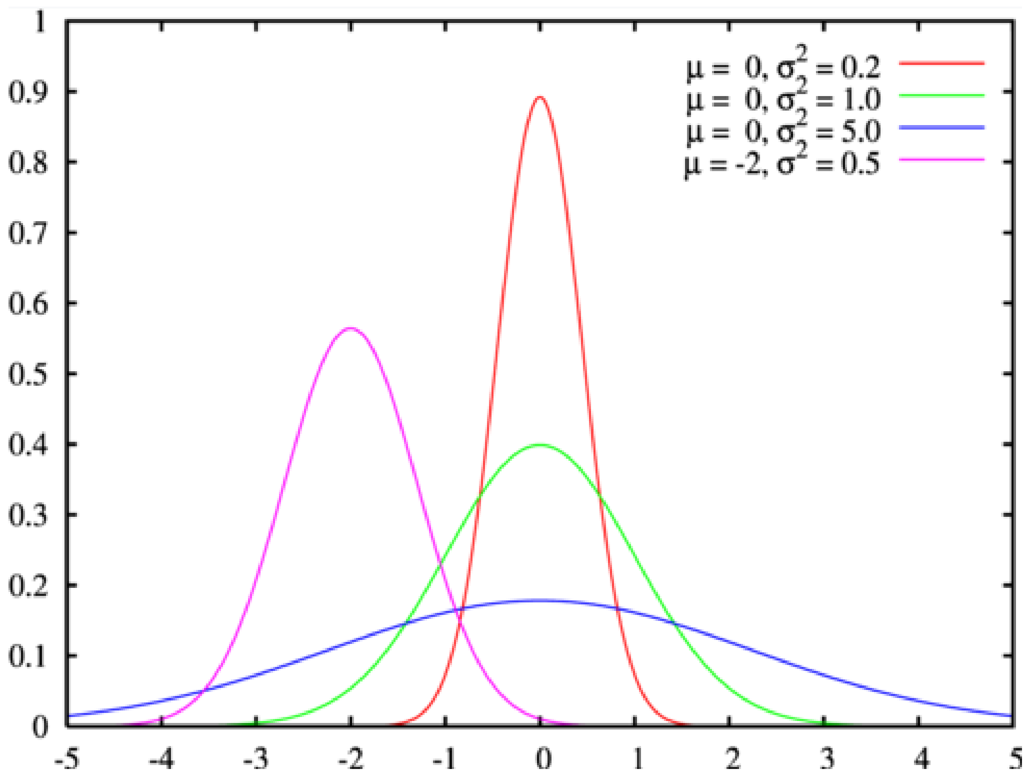
$$\mathbb{P}(\text{пересечения}) = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}$$

Итак, ***π*** можно вычислить, используя эту технику, хотя и муторный эксперимент. Важно, что здесь никак **не фигурирует окружность.**

Законы распределения вероятностей и π

Нормальное (гауссовское) распределение:

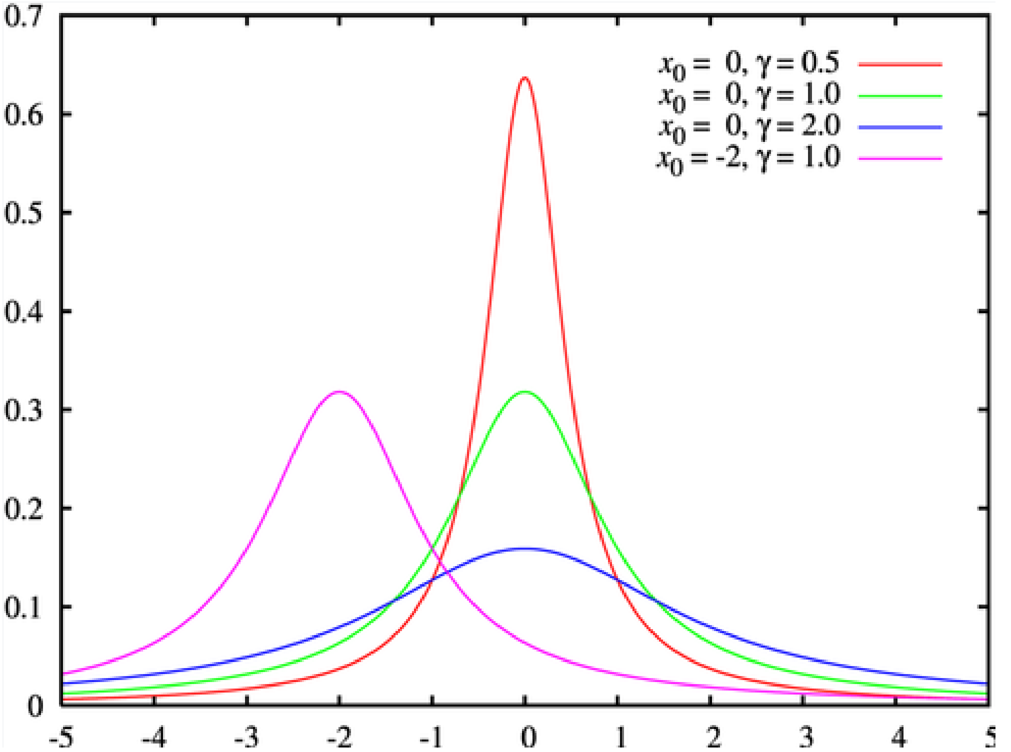
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Законы распределения вероятностей и π

Распределение Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right]$$



Метод Монте-Карло

– простой и понятный численный метод, суть которого сводится к перебору точек на площади.

Расчет заключается в том, что мы берем квадрат со стороной $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, вписываем в него четверть круга радиуса $\boldsymbol{R}=\mathbf{1}$. И начинаем наугад ставить точки внутри квадрата.

Геометрические вероятности и *π*

Геометрически, вероятность **P** того, что точка попадет в круг, равна отношению площадей круга и квадрата, т.е. **π/4**.

Геометрические вероятности, метод Монте-Карло и π

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Pi_monte_carlo_all.gif/435px-Pi_monte_carlo_all.gif

Усπехов!!!

Контакты:

ТГУ, корп. 2, ауд. 320
Тел.: +7 382 252-9740
E-mail: e.pchelintsev@math.tsu.ru