



3.1415926535897932384626433832795
02884197169399375105820974944592307816
406286208590569572714679821480865
1328230664709384460955048251725359408128
4811174502841027019385211055596446229489549
30
5
3819644
6659334
5648233
86005
6485669
86005
1350000
1412737
6606315
81520920
5409115
92590000
548820466
9519415116
7036575959
3819326117
462379962
752724

День числа π

Число π в теории
вероятностей

Е.А. Пчелинцев

Томск 2024

462379962

752724

2881097

4612847

7867831

2346034

2458700

5881748

9628292

7643678

1053

5213841

0943305

195309218

6117

93105118548074

749567351885

89122793

0
46
72
0
Russian Bear



Число π - это

- обычно наши знания о числе π заканчиваются на этом: **3,14**;
 - математическая константа, равная отношению длины окружности к её диаметру;
 - иррациональное число, т.е. оно бесконечно и является непериодической десятичной дробью.
-



Вычисление числа π

- *Архимед* (≈ 220 г. до н.э.): $S = \pi R^2$;
 - *Цзу Чунчжи* (5 в. н.э.): $\pi \approx 355/113$;
 - *Иоганн Генрих Ламберт* (18 в.):
доказал **иррациональность** числа,
которая выражается в том, что мы никогда не
знаем реальную длину окружности.
 - *Жорж-Луи Леклерк де Бюффон*
(1777 г.): **задача об игле.**
 - **Методы Монте-Карло**
-



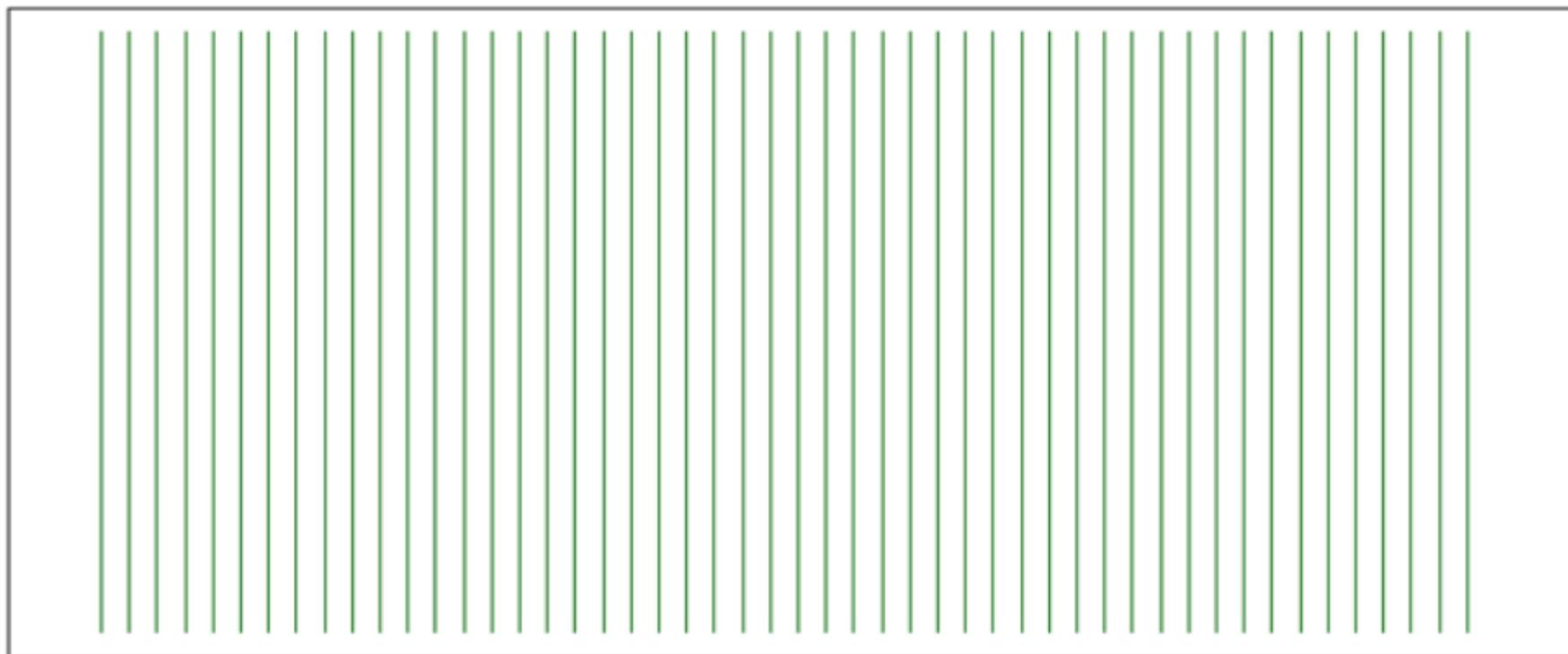
Задача на вычисление π (кейс)

У вас есть моток ниток и иголка длины $l > 0$, и Вас просят посчитать приблизительное значение числа π , используя лишь эти предметы?



Распределяем нить

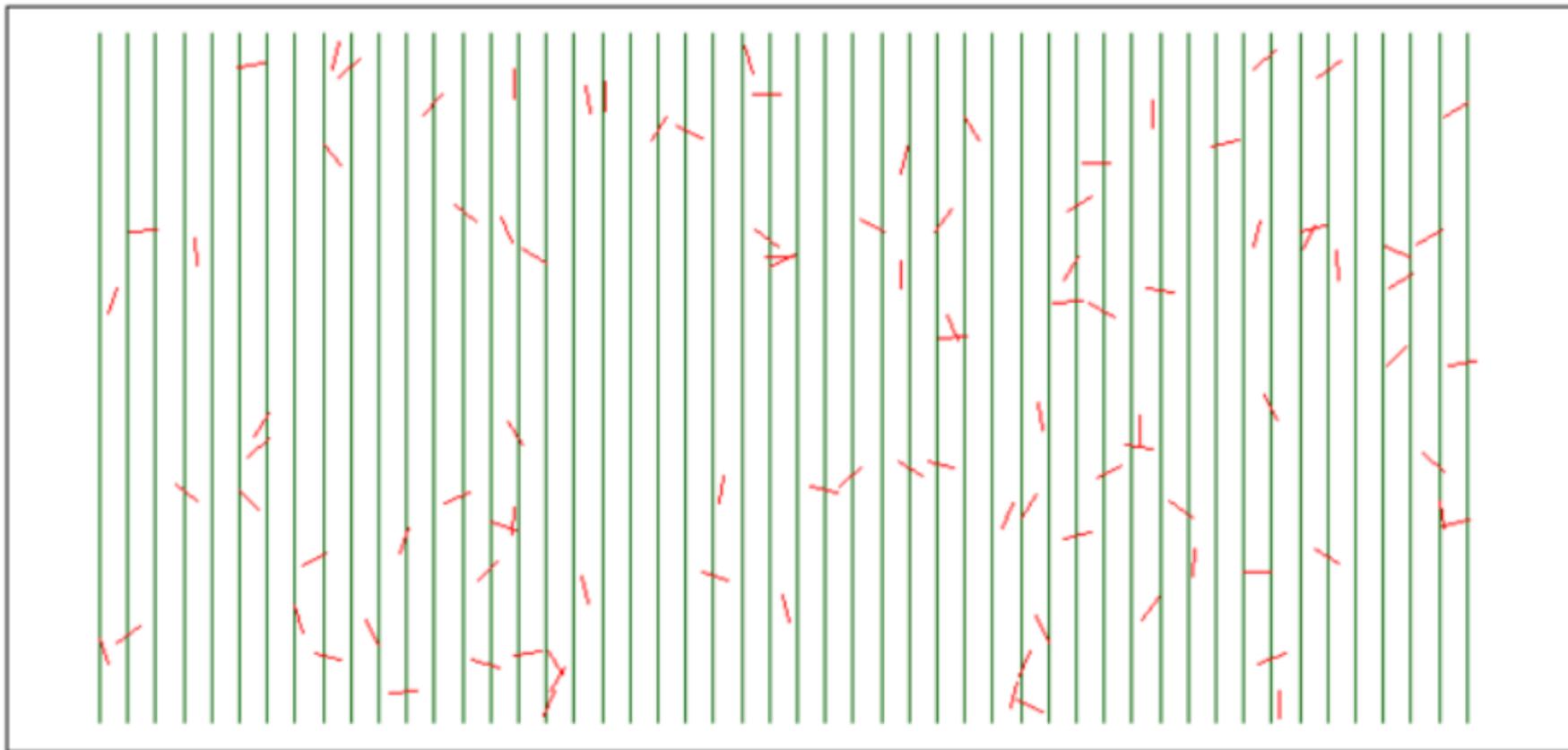
Нанесем на плоскость некоторое количество параллельных отрезков (из нитей) одинаковой длины на расстоянии l друг от





Бросаем иглу

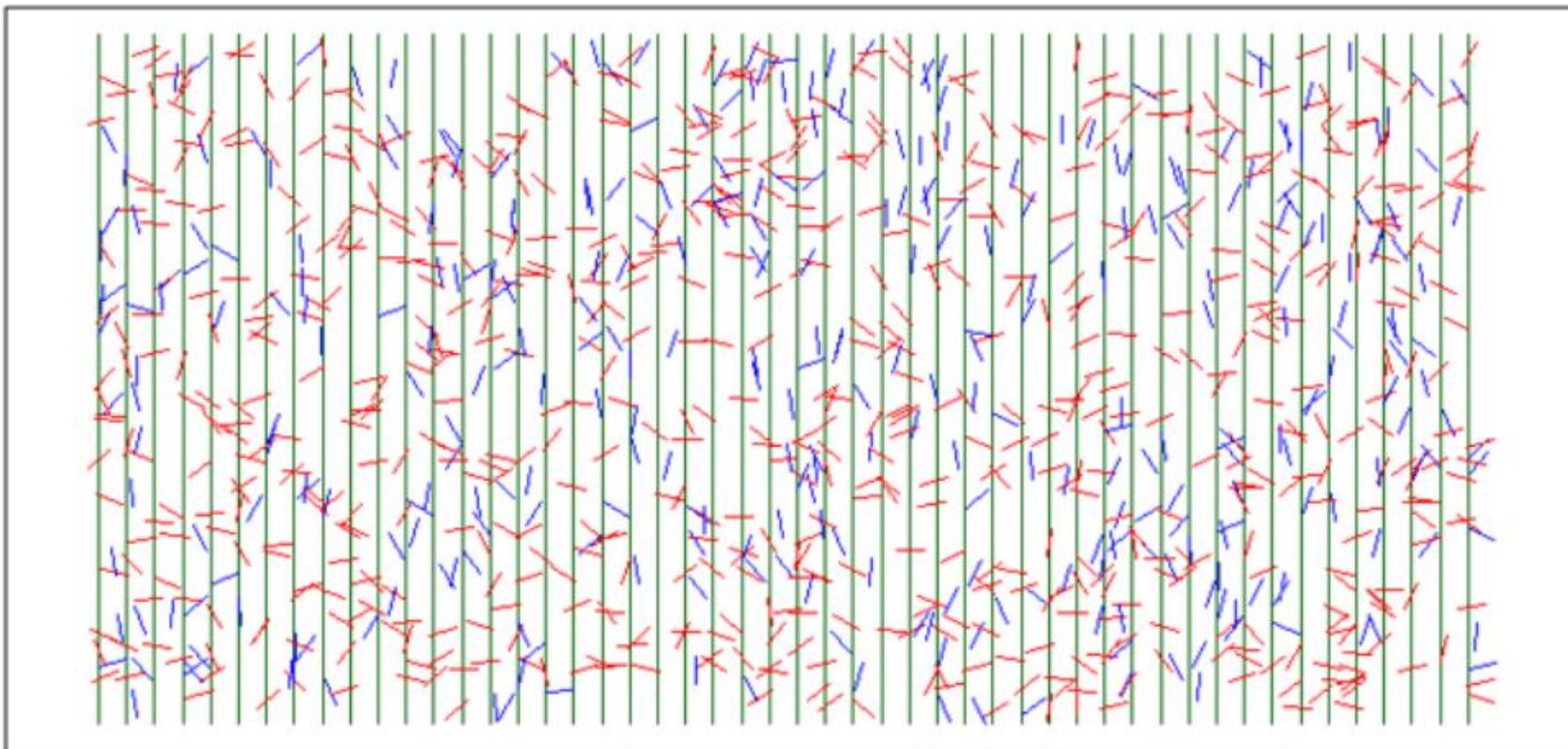
Кинем на это поле **100** раз иголку.





И еще бросаем

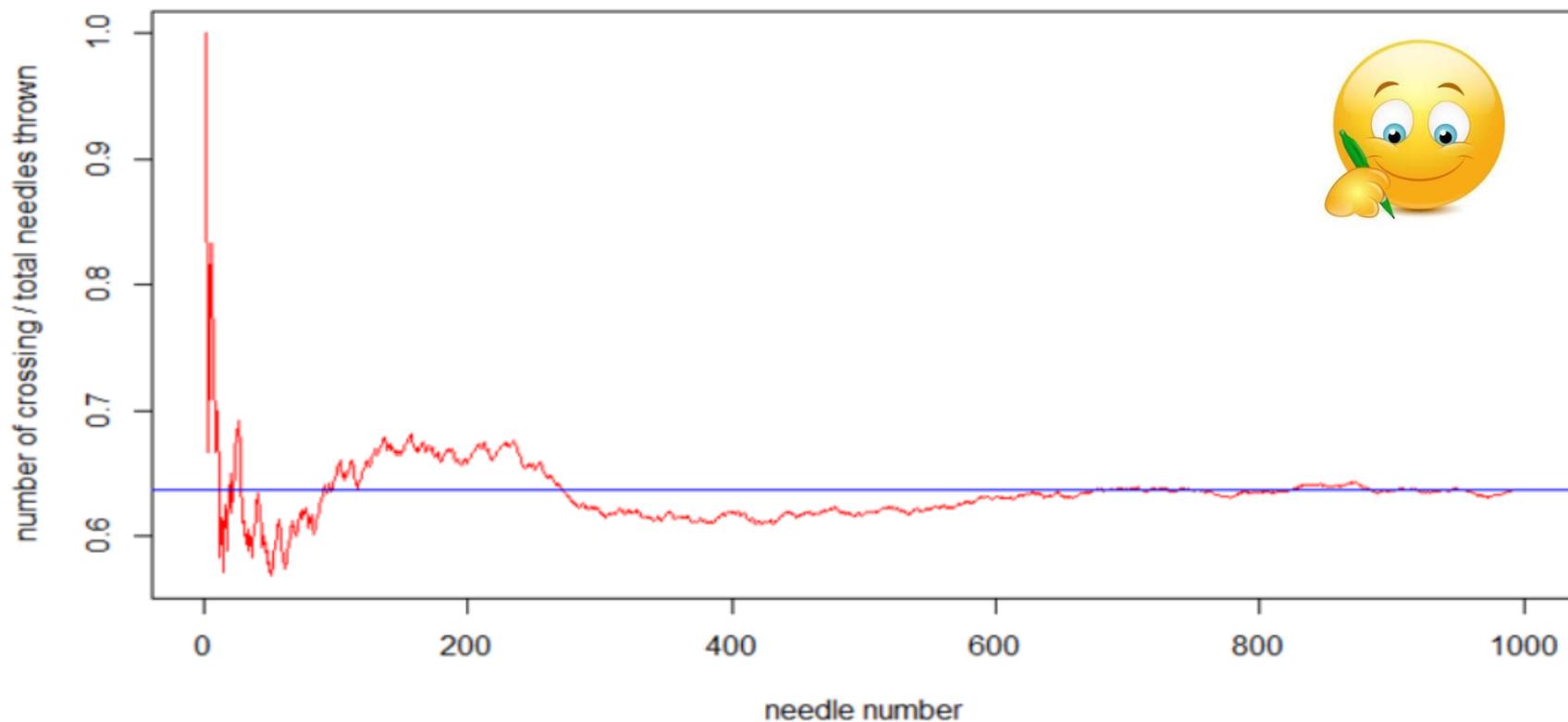
Добавим еще **900** и отметим те иголки, которые пересекают нити, красным цветом





Подсчет последовательности

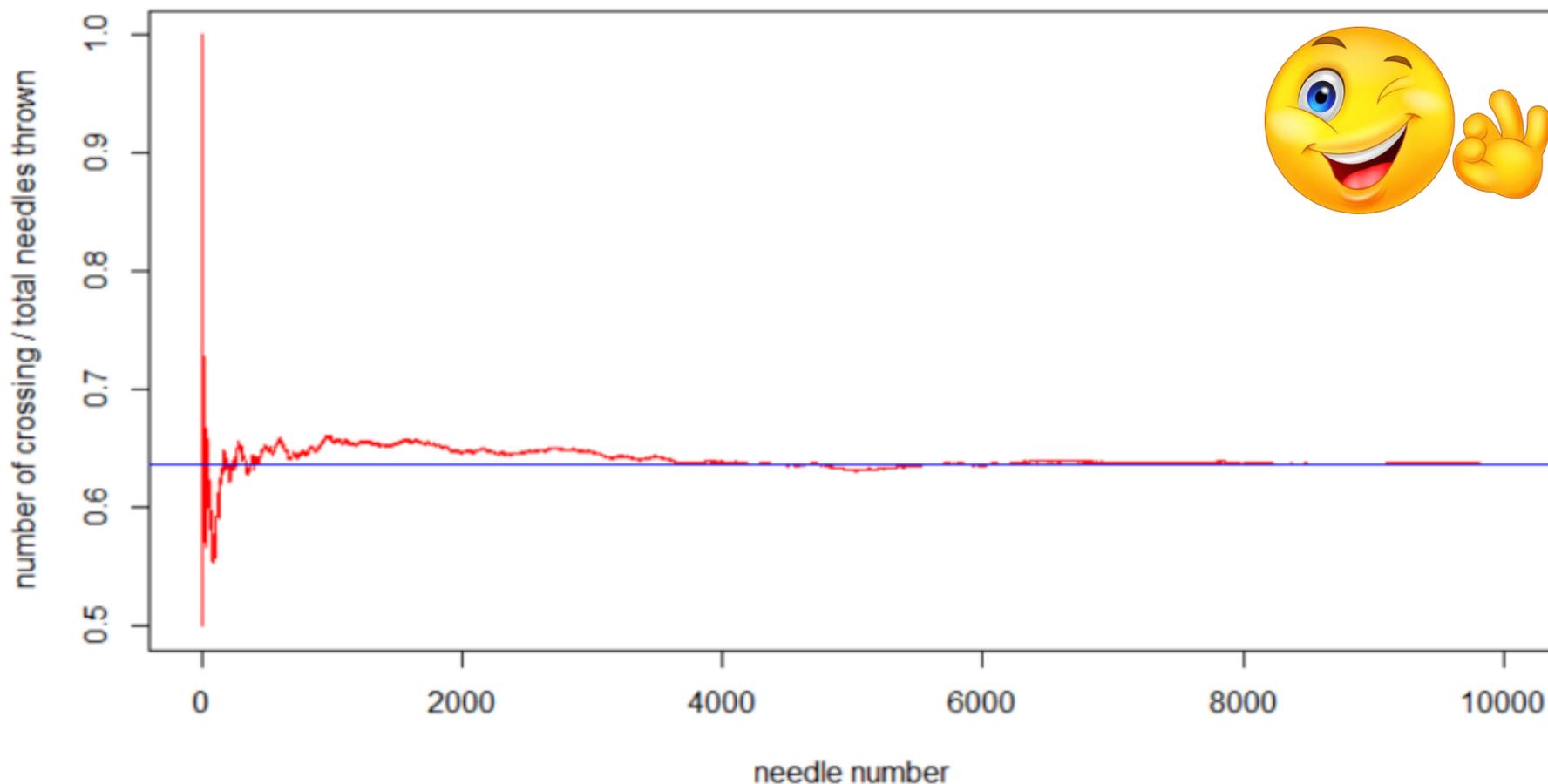
Записываем на каждом шаге отношение количества иголок, попавших на нити, к общему количеству брошенных иголок





Удлиним последовательность

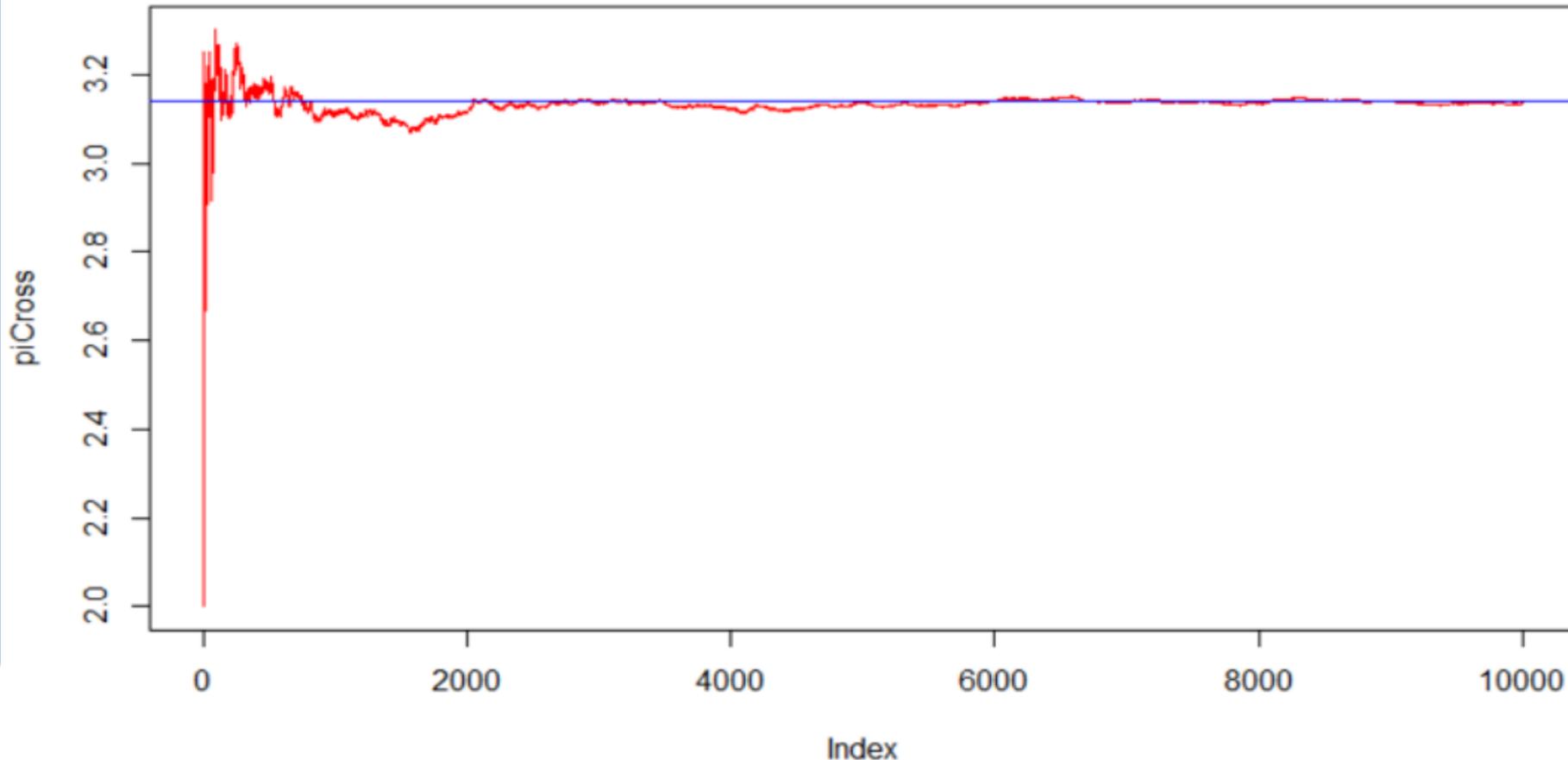
Если бросить иголку 10000 раз, то картина будет более точной





Преобразование последовательности

А теперь разделим двойку на каждое число полученной последовательности





Вычисление числа π

Если найти среднее из последних пяти тысяч элементов послед-ти, получим **3.141585**, в то время как число $\pi \approx$ **3.141593...**



В общем, не секрет, что полученная последовательность сходится к числу π . Но как такое могло произойти?



π и задача Бюффона

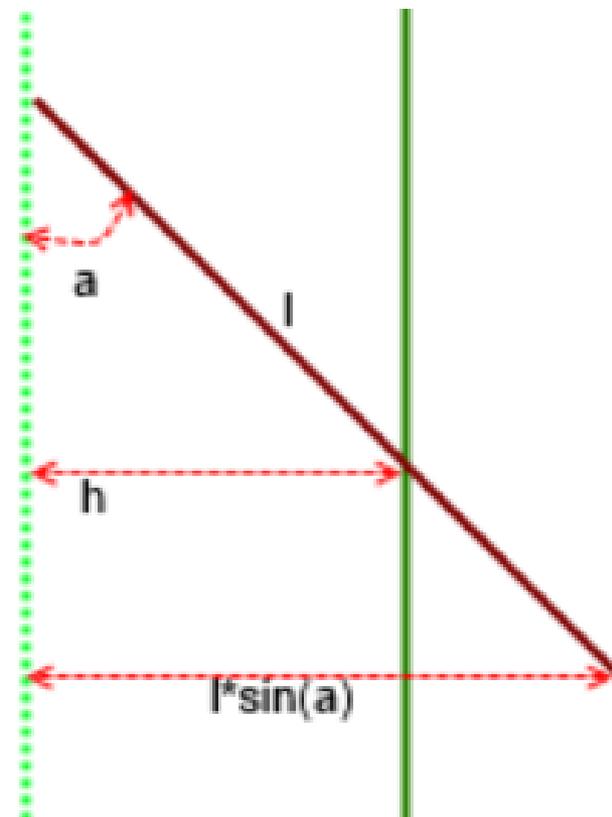
Бросается иголка длины l на лист бумаги, на котором начерчены линии на таком же расстоянии l . Какова вероятность того, что иголка пересечёт одну из линий?



Решение задачи Бюффона

Будем рассматривать иголку и ближайшую от нее линию справа. В бросании иголки две переменные:

- 1) угол падения α ($0 \leq \alpha \leq \pi$)
- 2) расстояние от левого конца иглы h .

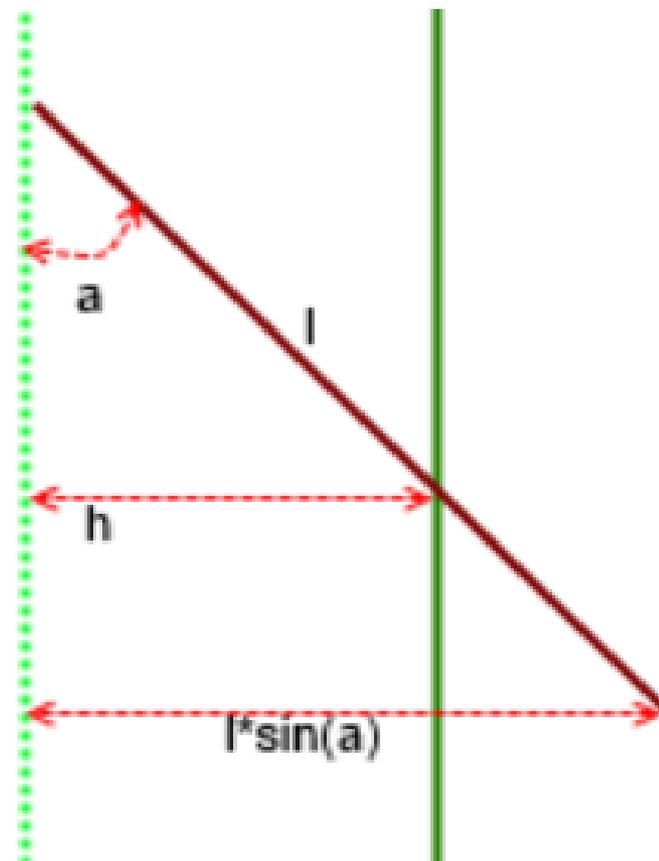




Решение задачи Бюффона

Длина противоположного катета от угла α будет равна синусу угла, умноженного на длину гипотенузы l .

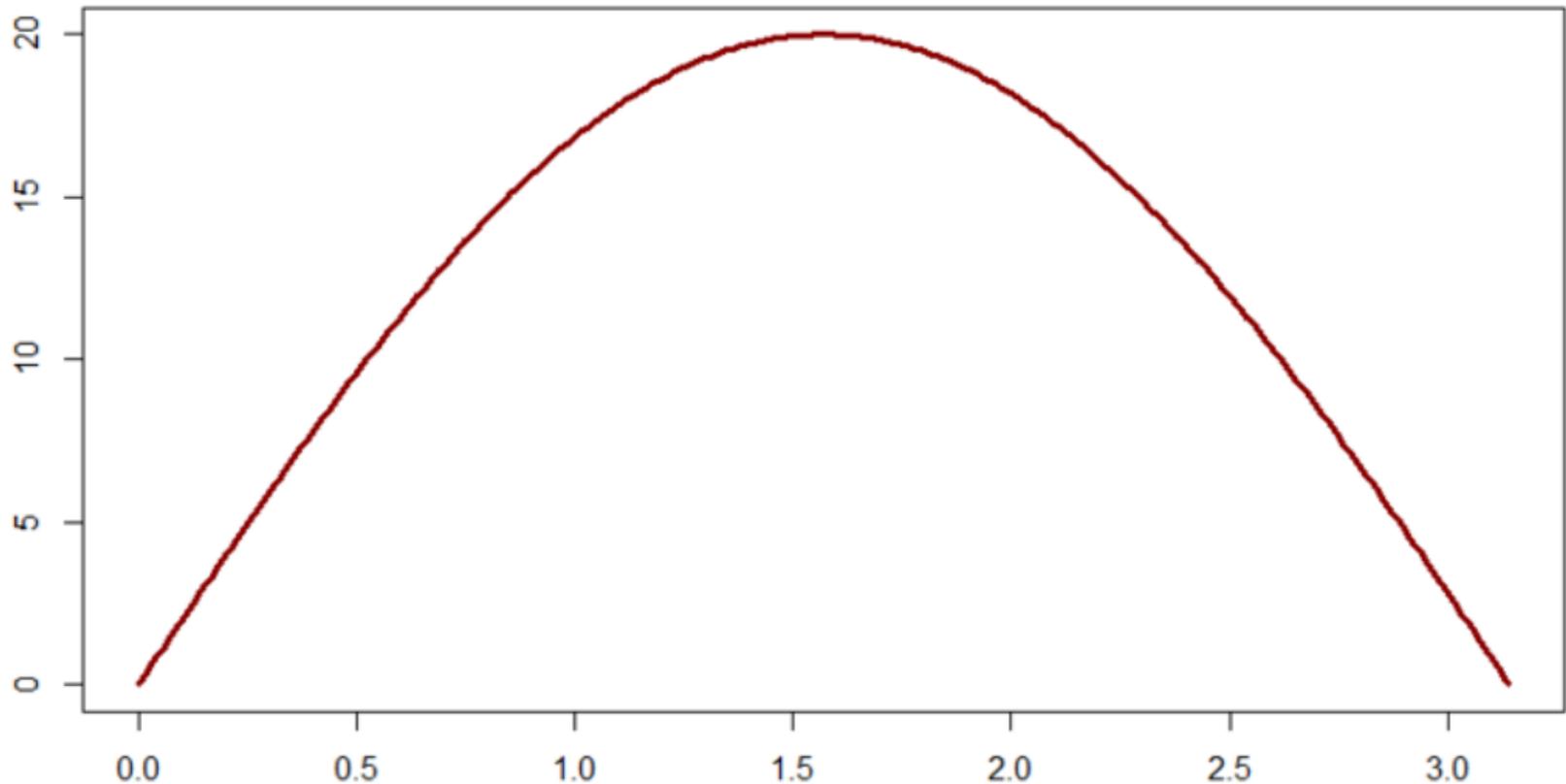
Если h меньше либо равна катета напротив угла α , то игла пересекает линию.





Решение задачи Бюффона

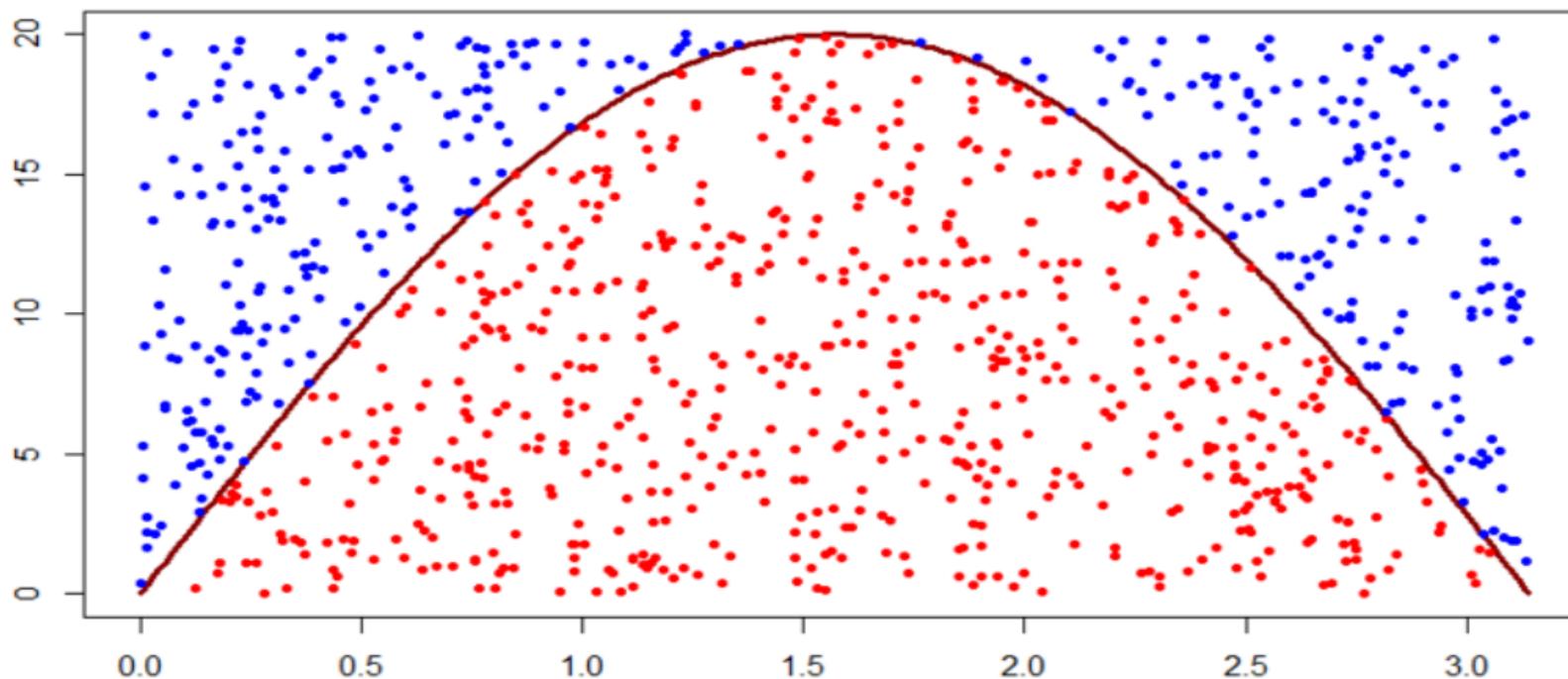
Изобразим график: $h = l \cdot \sin(\alpha)$





Решение задачи Бюффона

Если мы посчитаем для каждой брошенной иголки h и a и отметим эти точки на графике, то картина будет следующая:





Решение задачи Бюффона

Таким образом, вероятность того, что иголка пересечет линию, будет равна отношению площади фигуры под графиком $2 \cdot l$ к площади прямоугольника $\pi \cdot l$:

$$\mathbb{P}(\text{пересечения}) = \frac{2}{\pi}$$

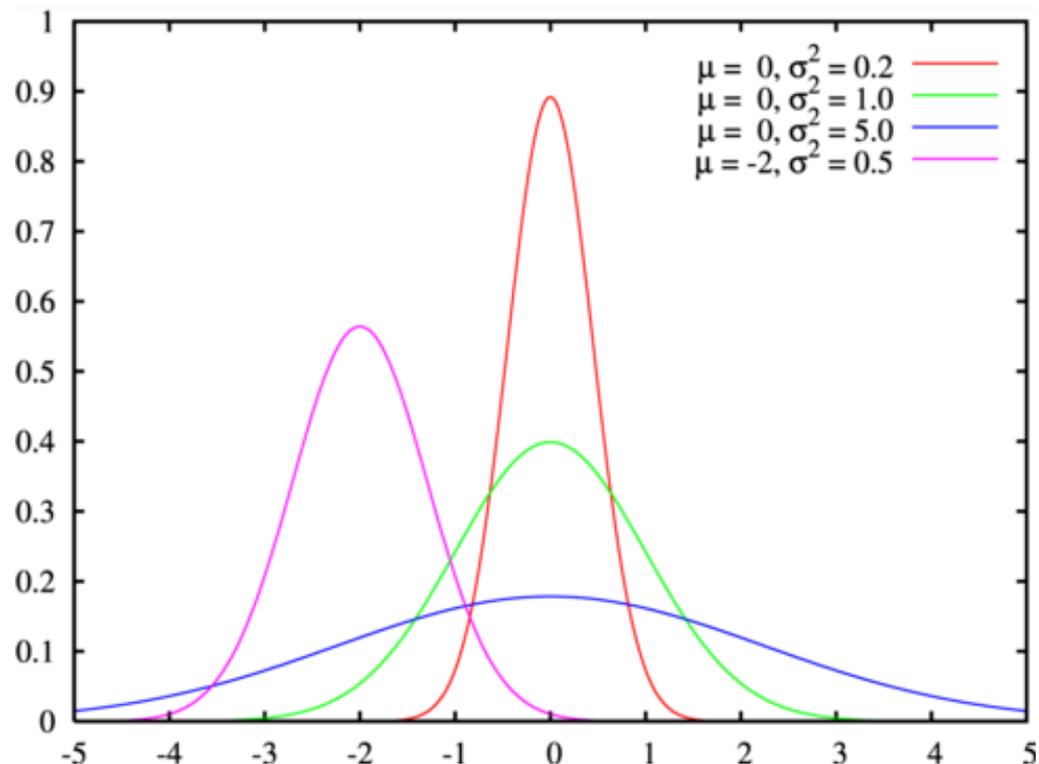
Итак, π можно вычислить, используя эту технику, хотя и муторный эксперимент. Важно, что здесь никак **не фигурирует окружность**.



Законы распределения вероятностей и π

Нормальное (гауссовское) распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

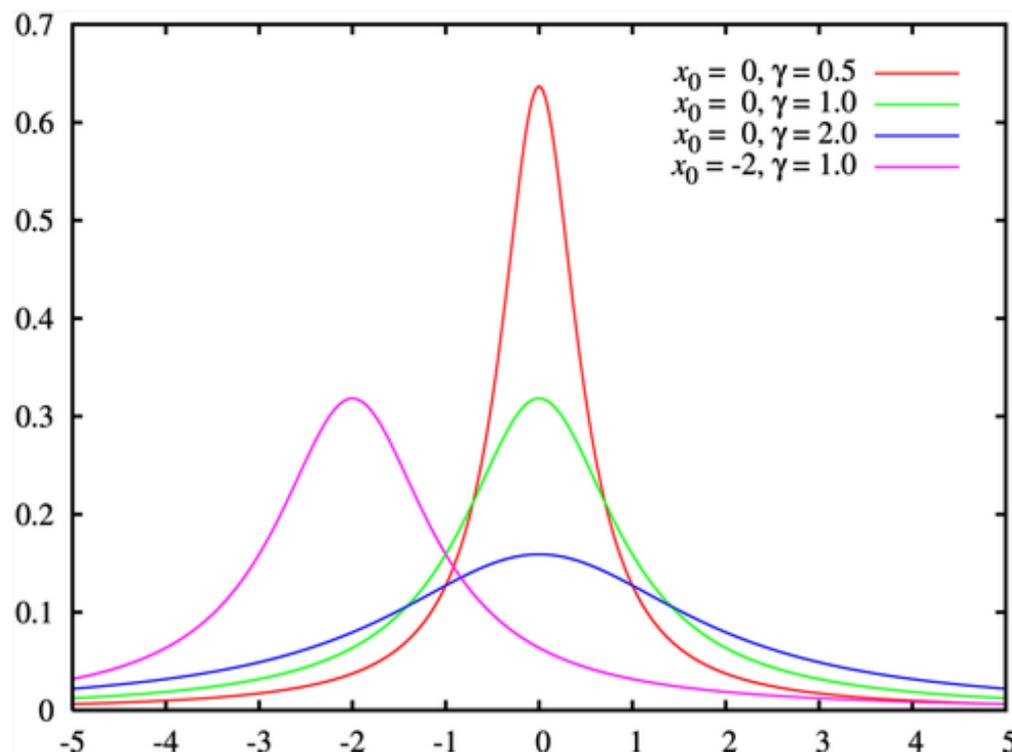




Законы распределения вероятностей и π

Распределение Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \right]$$





Метод Монте-Карло

– простой и понятный численный метод, суть которого сводится к перебору точек на площади.

Расчет заключается в том, что мы берем квадрат со стороной $a = 1$, вписываем в него четверть круга радиуса $R=1$. И начинаем наугад ставить точки внутри квадрата.



Геометрические вероятности и π

Геометрически, вероятность P того, что точка попадет в круг, равна отношению площадей круга и квадрата, т.е. $\pi/4$.



Геометрические вероятности, метод Монте-Карло и π

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Pi_monte_carlo_all.gif/435px-Pi_monte_carlo_all.gif





3.1415926535897932384626433832795
02884197169399375105820974944592307816
4062862089986280348253421170679821480865
13282306647093844609550582231725359408128
4811174502841027019385211055596446229489549

30
5

3819644

2881097

6659334

4612847

5648233

7867831

6527120

1909145

6485669

6034

8610454

3266482

1339360

7260249

1412737

2458700

6606315

5881748

81520920

9628292

54091715

3643678

925903600

133053

548820466

5213841

9519415116

07758

7036575959

07758

3819326117

07758

462379962

749567351885

752724

89122793

Успехов!!!

Контакты:

ТГУ, корп. 2, ауд. 320

Тел.: +7 382 252-9740

E-mail: e.pchelintsev@math.tsu.ru