



Национальный
исследовательский

**Томский
государственный
университет**

Пространства двузначных функций на
счётных метризуемых компактах

Определение. Пространство X будем называть однородным, если $\forall x, y \in X$ существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$ такой, что $h(x) = y$.

Теорема. (van Mill, 2015) Канторово множество однородно.

Определение. Пространство X называется однородным, если $\forall A, B \subset X$, где A, B – счётные плотные, существует гомеоморфизм h такой, что $h(A) = B$.

Пример. Топологическая сумма S_1 и S_2 счётно плотно однородна, но не однородна.

Теорема. (van Mill, 2015) Канторово множество счётно плотно однородно.



Известно, что канторово множество есть произведение двоеточий $D^{\aleph_0}$. Ясно, что $D^{\aleph_0} = C_p(\mathbb{N}, D)$.

В произведении вещественных прямых известны подпространства c и c_0 . Известно, что $C_p[1, \omega] \sim c_0$.

Мартишевский и Добровольский в 1995 году доказали, что c_0 и c не являются линейно гомеоморфными.

В $C_p(\mathbb{N}, D)$ рассмотрим аналоги пространств c и c_0 :

- d_0 - пространство двузначных последовательностей, сходящихся к нулю
- d – пространство сходящихся двузначных последовательностей.



Рассмотрим базисы пространств d и d_0 :

$$\begin{array}{ll} t_1 = (1,1,1,1, \dots) & b_1 = (1,0,0,0, \dots) \\ t_2 = (1,0,0,0, \dots) & b_2 = (0,1,0,0, \dots) \\ t_3 = (0,1,0,0, \dots) & b_3 = (0,0,1,0, \dots) \\ t_4 = (0,0,1,0, \dots) & b_4 = (0,0,0,1, \dots) \end{array}$$

Используя данный базис нельзя установить линейный гомеоморфизм. Базис $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ не является ω -независимый, а $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ ω -независимый.



Рассмотрим другой базис:

$$\begin{array}{ll} t_1 = (1, 0, 0, 0, \dots) & b_1 = (1, 1, 1, 1, \dots) \\ t_2 = (1, 1, 0, 0, \dots) & b_2 = (1, 0, 0, 0, \dots) \\ t_3 = (0, 1, 1, 0, \dots) & b_3 = (0, 1, 0, 0, \dots) \\ t_4 = (0, 0, 1, 1, \dots) & b_4 = (0, 0, 1, 0, \dots) \end{array}$$

Тогда отображение $T: d \rightarrow d_0$, заданное по правилу $T(b_i) = t_i$ является линейным гомеоморфизмом.

Общий вид отображение T и T^{-1}

$$\begin{aligned} Tx &= (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, \dots) \quad \forall x \in d \\ T^{-1}y &= \left(y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots, \sum_{i=1}^n y_i, \dots \right) \quad \forall y \in d_0 \end{aligned}$$



Линейный гомеоморфизм $T: C_p([1, \omega], D) \rightarrow d$ действует по правилу

$$Tx = T(x_1, x_2, \dots, x(\omega)) = \left(x(\omega), x_1, x_1 + x_2 + x(\omega), \dots, \sum_{i=1}^{2n} x_i + x(\omega), \sum_{i=1}^{2n+1} x_i, \dots \right)$$

$$T^{-1}y = ((y_1 + y_2) + y_1, (y_2 + y_3) + y_1, \dots, (z_n + z_{n+1}) + z_1, \dots)$$

Базисы пространств $C_p([1, \omega], D)$ и d соответственно:

$$\begin{array}{ll} p_1 = (1, 1, 1, 1, \dots, 1) & t_1 = (1, 1, 1, 1, \dots) \\ p_2 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0) & t_2 = (0, 1, 1, 1, \dots) \\ p_3 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0) & t_3 = (0, 0, 1, 1, \dots) \\ p_4 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0) & t_4 = (0, 0, 0, 1, \dots) \end{array}$$



Теорема. Пусть L бесконечномерное подпространство в d_0 , тогда существует подпространство $L_0 \subset L$ такое, что L_0 дополняемо в L и L_0 линейно гомеоморфно d_0 .

Теорема. Пусть L дополняемо в d_0 . Тогда L линейно гомеоморфно d_0 .

Доказательство. Из прошлой теоремы следует, что d_0 дополняемо в L , $L = d_0 \times X$.
Из условий теоремы имеем $d_0 = L \times Y$.

$$\begin{aligned} d_0 &\sim (d_0 \times d_0 \times \dots)_0 \sim ((L \times Y) \times (L \times Y) \times \dots)_0 \sim (L \times L \times \dots)_0 \times (Y \times Y \times \dots)_0 \\ &\sim L \times (L \times L \times \dots)_0 \times (Y \times Y \times \dots)_0 \sim L \times (d_0 \times d_0 \times \dots)_0 \sim \\ &\sim d_0 \times X \times (d_0 \times d_0 \times \dots)_0 \sim X \times d_0 \sim L. \end{aligned}$$



Теорема. Для любого ординала $\alpha < \omega_1$ пространства $C_p([1, \alpha], D)$ и d_0 линейно гомеоморфны.

Известно, что если X компакт веса m , то количество открыто-замкнутых множеств не превосходит m .

Теорема. $C_p(D^{\aleph_0}, D)$ и d_0 не являются линейно гомеоморфными. Так как мощность $L(D^{\aleph_0})$ - континуально, а $L([1, \omega])$ является счётным.



Теорема. Пусть Y – нульмерное метрическое не локально компактное пространство. Тогда пространство $(C_p(\mathbb{N}_1, D) \times C_p(\mathbb{N}_2, D) \times \cdots)_0$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(Y, D)$.

Теорема. Пусть X σ -компактное локально компактное метрическое пространство, а Y – не локально компактное нульмерное метрическое пространство. Тогда $C_p(X, D)$ и $C_p(Y, D)$ не являются линейно гомеоморфными.



Спасибо за внимание

