Исследование образов X, Y при двойственном отображении к линейным гомеоморфизмам $C_p(X)$, $C_p(Y)$

Видякин В.В., Лазарев В.Р.

2025

Предварительные сведения

Пространством $C_p(X)$ называется пространство непрерывных функций на X с топологией поточечной сходимости.
Пространство $C_p(C_p(X))$ обозначаем просто $C_pC_p(X)$.
Называем пространства X и Y *t-эквивалентными* (*l-эквивалентными*) и пишем $X \overset{t}{\sim} Y$ ($X \overset{l}{\sim} Y$), если пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ гомеоморфны (линейно гомеоморфны). Если X гомеоморфно Y, пишем $X \sim Y$ Очевидно,
$X \sim Y \Rightarrow X \overset{l}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{t}{\sim} Y$.

Предварительные сведения

Двойственное отображение

Пусть $f : X \longrightarrow Y$. Определим двойственное к f отображение $f^{\#} : \mathbb{R}^Y \longrightarrow \mathbb{R}^X$ следующим образом: если $\varphi \in \mathbb{R}^Y$, то $\forall x \in X \quad f^{\#}(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$, то есть $f^{\#}(\varphi) = \varphi \circ f$.

Предложение

Отображение $f^{\#}$ непрерывно.

Отображение вычисления

Пусть даны множество X и семейство $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^Y$. Пусть $\forall x \in X$ определяется отображение $g_x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ правилом $g_x(f) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{F}$. Полагая $\psi_{\mathcal{F}}(x) = g_x$ при $x \in X$, получаем каноническое отображение вычисления $\psi_{\mathcal{F}} : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

Предварительные сведения

Пространство $L_p(X)$

Рассмотрим подпространство $L_p(X) =$

$$= \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in C_p C_p(X) : x_1, \ldots, x_n \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

алгебраически порожденное множеством X в линейном пространстве $C_p C_p(X)$.

Очевидно, по отношению к естественным операциям сложения и умножения на скаляр в $C_p C_p(X)$ пространство $L_p(X)$ - линейная оболочка X в $C_p C_p(X)$.

Новые определения

Введем следующие определения:

Носитель

Носителем Y в $L_p(X)$ при линейном гомеоморфизме $T : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ назовем множество

$$S = \bigcup_{y \in Y} \left\{ x_k \in X \quad | \quad T^{\#}(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

где $T^{\#} : L_p(Y) \longrightarrow L_p(X)$ - двойственное к T отображение.

Новые определения

Длина носителя

Длиной носителя Y в $L_p(X)$ при линейном гомеоморфизме $T : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ назовем $lon(Y, L_p(X), T) =$

$$= \sup_{y \in Y} \left\{ n \in \mathbb{N} \quad | \quad T^{\#}(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

где $T^{\#} : L_p(Y) \longrightarrow L_p(X)$ - двойственное к T отображение. Если такого sup не существует, то считаем $lon(Y, L_p(X), T) = \infty$.

Очевидно, что если $I : C_p(X) \longrightarrow C_p(X)$ - тождественное отображение, то

$$lon(X, L_p(X), I) = 1.$$

Непосредственно о проделанной работе

Существует множество примеров $l-$эквивалентных пространств, свойства которых не совпадают. Далее мы покажем примеры пространств, свойства которых, такие как метризуемость, локальная компактность, вес и другие, не совпадают, но при этом при построенных изоморфизмах длина носителя конечная, и, более того, равна трем.

Далее используются следующие обозначения:

$$n_0, m_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0; \quad n_+, m_+ \in \mathbb{N}; \quad n_{+1}, m_{+1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Далее будут рассмотрены примеры I.1.7 и I.1.8 из работы А.В.Архангельского "Топологические пространства функций".

Описание примера I.1.7

Пусть $X = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}_0\}$, $X_n = \{(n, m) : m \in \mathbb{N}_0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *и топология на* X *определена условиями: 1) каждое* X_n *открыто в* X *и 2) каждое* X_n *— компакт с единственной неизолированной точкой* $(n, 0)$. *Таким образом, пространство* X *— свободная сумма счетного числа экземпляров обычной сходящейся последовательности.*

Рассмотрим разбиение пространства X, *единственный неодноточечный элемент которого — (замкнутое в* X*) множество* $F = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *всех неизолированных точек пространства* X. *Фактор-пространство, отвечающее этому разбиению, обозначим* Y. *Таким образом,* Y *— это так называемый "неметризуемый счетный еж". В* Y *есть единственная неизолированная точка* F. *Прочие точки пространства* Y *обозначаем так же, как и соответствующие точки пространства* X, *т. е.* (n, m).

Пример I.1.7 - явная формула линейного гомеоморфизма

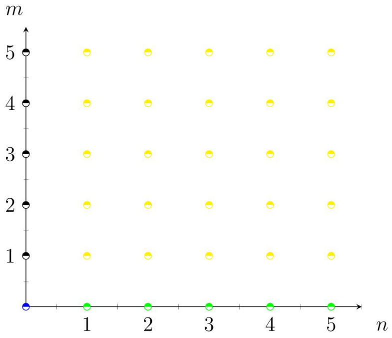
Были получены явные формулы следующих линейных гомеоморфизмов:

$$\alpha : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y), \quad \beta : C_p(Y) \longrightarrow C_p(X)$$

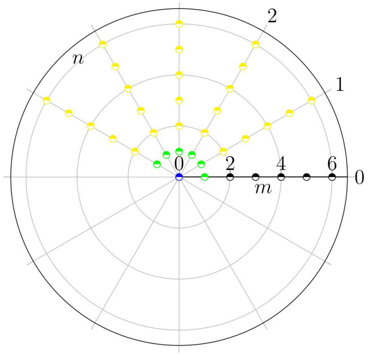
$$\alpha(f)(y) = \begin{cases} \alpha(f)(F) = f(0,0) \\ \alpha(f)(n_0, 1) = f(n_0 + 1, 0) \\ \alpha(f)(0, m_{+1}) = f(0, m_{+1} - 1) \\ \alpha(f)(n_+, m_{+1}) = f(n_+, m_{+1} - 1) - f(n_+, 0) + f(0,0) \end{cases}$$

$$\beta(g)(x) = \begin{cases} \beta(g)(0,0) = g(F) \\ \beta(g)(n_+, 0) = g(n_+ - 1, 1) \\ \beta(g)(0, m_+) = g(0, m_+ + 1) \\ \beta(g)(n_+, m_+) = g(n_+, m_+ + 1) - g(F) + g(n_+ - 1, 1) \end{cases}$$

Пример I.1.7 - схема гомеоморфизма $\alpha : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$



Пространство X



Пространство Y

Описание примера I.1.8

Пусть $Z = X \cup \{\xi\}$, где $\xi \notin X$ и топология на Z такова, что описанное выше пространство X — открытое подпространство пространства Z. Если $\xi \in V \subset Z$, то объявляем V открытым в Z, если $F \setminus V$ конечно и $V \cap X$ открыто в X (где F, как и ранее, множество $\{(n, 0) : \quad n \in \mathbb{N}_0\}$ всех неизолированных точек пространства X).

Пример I.1.8 - явная формула линейного гомеоморфизма

$$\omega : C_p(Z) \longrightarrow C_p(X), \quad \nu : C_p(Z) \longrightarrow C_p(Y)$$

$$\omega(h)(x) = \begin{cases} \omega(h)(0,0) = h(\xi) \\ \omega(h)(1,0) = h(0,0) - h(\xi) \\ \omega(h)(n_{+1},0) = h(n_{+1}-2,1) - h(n_{+1}-2,0) \\ \omega(h)(0,m_+) = h(m_+,0) \\ \omega(h)(1,m_+) = h(0,m_+ + 1) - h(\xi) \\ \omega(h)(n_{+1},m_+) = h(n_{+1}-1,m_+ + 1) - 2h(n_{+1}-1,0) + \\ \quad + h(n_{+1}-1,1) \end{cases}$$

$$\nu(h)(x) = \begin{cases} \nu(h)(F) = h(\xi) \\ \nu(h)(0,1) = h(0,0) - h(\xi) \\ \nu(h)(n_{+1},1) = h(n_{+1}-1,1) - h(n_{+1}-1,0) \\ \nu(h)(0,m_{+1}) = h(m_{+1}-1,0) \\ \nu(h)(n_+,m_{+1}) = h(n_+ - 1,m_{+1}) - h(n_+ - 1,0) + h(\xi) \end{cases}$$

О связи длины носителя с высотой пространства

Высота пространства

Точка x топологического пространства X называется точкой накопления множества $A \subset X$, если $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Множество точек накопления множества A называется производным множеством множества A и обозначается A^d . Для каждого натурального n множество $A^{(n)}$, n-е производное множество подмножества A топологического пространства X, определяется по индукции формулами $A^{(1)} = A^d$, $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^d$. Высотой пространства X называется число $h(X) = \sup \left\{ n | X^{(n)} \neq \varnothing \right\}$

О связи длины носителя с высотой пространства

Можно доказать следующее

Предложение 1

Если $T : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ - линейный гомеоморфизм, то длина носителя $lon(Y, L_p(X), T)$ равна наибольшему количеству слагаемых в формуле $T(f)(y)$, где $f \in C_p(X), y \in Y$.

Из данного предложения и вышепредставленных формул видно, что

$$lon(Y, L_p(X), \alpha) = lon(X, L_p(Y), \beta) = lon(X, L_p(Z), \omega) =$$

$$= lon(Y, L_p(Z), \nu) = 3,$$

что сразу говорит об отсутствии связи длины носителя с высотой пространства, поскольку

$$h(X) = h(Y) = 1, \quad h(Z) = 2.$$

Построение композиции отображений из примеров I.1.7, I.1.8

$$\alpha \circ \omega : C_p(Z) \longrightarrow C_p(Y)$$

$$\begin{cases} \alpha(\omega(h))(F) = h(\xi) \\ \alpha(\omega(h))(0,1) = h(0,0) - h(\xi) \\ \alpha(\omega(h))(n_+,1) = h(n_+ - 1, 1) - h(n_{+1} - 1, 0) \\ \alpha(\omega(h))(0, m_{+1}) = h(m_{+1} - 1, 0) \\ \alpha(\omega(h))(1, m_{+1}) = h(0, m_{+1}) - h(0,0) + h(\xi) \\ \alpha(\omega(h))(n_{+1}, m_{+1}) = h(n_{+1} - 1, m_{+1}) - 2h(n_{+1} - 1, 0) + \\ \quad + h(n_{+1} - 1, 1) - h(n_{+1} - 2, 1) + h(n_{+1} - 2, 0) + h(\xi) \end{cases}$$

Построение композиции отображений из примеров I.1.7, I.1.8

$$\beta \circ \nu : C_p(Z) \longrightarrow C_p(X)$$

$$\begin{cases}
\beta(\nu(h))(0,0) = h(\xi) \\
\beta(\nu(h))(1,0) = h(0,0) - h(\xi) \\
\beta(\nu(h))(n_{+1},0) = h(n_{+1}-2,1) - h(n_{+1}-2,0) \\
\beta(\nu(h))(0,m_{+}) = h(m_{+},0) \\
\beta(\nu(h))(1,m_{+}) = h(0,m_{+}+1) - h(\xi) \\
\beta(\nu(h))(n_{+1},m_{+}) = h(n_{+1}-1,m_{+}+1) - h(n_{+1}-1,0) + \\
\quad + h(n_{+1}-2,1) - h(n_{+1}-2,0)
\end{cases}$$

Изменение длины носителя при полученных композициях

Имеем следующее изменение длин носителей:

$$\alpha : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y); \quad lon(Y, L_p(X), \alpha) = 3;$$

$$\omega : C_p(Z) \longrightarrow C_p(X); \quad lon(X, L_p(Z), \omega) = 3;$$

$$\alpha \circ \omega : C_p(Z) \longrightarrow C_p(Y); \quad lon(Y, L_p(Z), \alpha \circ \omega) = 6;$$

$$\beta : C_p(Y) \longrightarrow C_p(X); \quad lon(X, L_p(Y), \beta) = 3;$$

$$\nu : C_p(Z) \longrightarrow C_p(Y); \quad lon(Y, L_p(Z), \nu) = 3;$$

$$\beta \circ \nu : C_p(Z) \longrightarrow C_p(X); \quad lon(X, L_p(Z), \beta \circ \nu) = 4.$$

Таким образом, путем композиции гомеоморфизмов возможно изменение длины носителя, в частности, в большую сторону.

Некоторые свойства длины носителя

Были доказаны следующие предложения:

Предложение 2

Пусть $\alpha : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ и $\beta : C_p(Y) \longrightarrow C_p(Z)$ - линейные гомеоморфизмы;
$lon(Z, L_p(X), \beta \circ \alpha) = S$,
$lon(Y, L_p(X), \alpha) = M, \quad lon(Z, L_p(Y), \beta) = N$.
Тогда $S \leq M \cdot N$.

Предложение 3

Пусть $T : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ - линейный гомеоморфизм.
Тогда $lon(Y, L_p(X), T) = lon(X, L_p(Y), T^{-1})$.

Теорема Нагаты и её модификация

Напомним формулировку теоремы Нагаты:

Теорема Нагаты

Если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны, то пространства X и Y гомеоморфны.

Было доказано следующее утверждение, являющееся модификацией теоремы Нагаты:

Теорема 1

Пусть X, Y - тихоновские топологические пространства, X - псевдокомпактное, $T : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ - линейный гомеоморфизм, $T^{\#} : L_p(Y) \longrightarrow L_p(X)$ - двойственное к T отображение. Обозначим $\Lambda X = \{\lambda x \quad | \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset C_p C_p(X)$. Пусть $T^{\#}(Y) \subset \Lambda X$. Тогда $X \sim Y$.

Список источников

1. А.В. Архангельский "Топологические пространства функций"
2. Р.Энгелькинг "Общая топология"
3. V.V. Tkachuk "A Cp-Theory Problem Book: Functional Equivalencies"