

# ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛЕЖАНДРОВЫХ УЗЛОВ

Иван Дынников

Математический институт имени В.А.Стеклова

Декабрьские чтения в Томске

Томский государственный университет, 13 декабря 2018 г.

Соавторы: Максим Прасолов, Владимир Шастин

*Стандартной контактной структурой* в  $\mathbb{R}^3$  называется двумерное распределение плоскостей

$$\xi_+ = \ker(x \, dy + dz).$$

Стандартной контактной структурой в  $\mathbb{R}^3$  называется двумерное распределение плоскостей

$$\xi_+ = \ker(x dy + dz).$$

Гладкая (или кусочно гладкая, но без каспов) кривая в  $\mathbb{R}^3$  называется *лежандровой*, если она всюду касается стандартной контактной структуры  $\xi_+$

Стандартной контактной структурой в  $\mathbb{R}^3$  называется двумерное распределение плоскостей

$$\xi_+ = \ker(x dy + dz).$$

Гладкая (или кусочно гладкая, но без каспов) кривая в  $\mathbb{R}^3$  называется *лежандровой*, если она всюду касается стандартной контактной структуры  $\xi_+$

Узел, представленный лежандровой кривой, называется *лежандровым*.

Стандартной контактной структурой в  $\mathbb{R}^3$  называется двумерное распределение плоскостей

$$\xi_+ = \ker(x dy + dz).$$

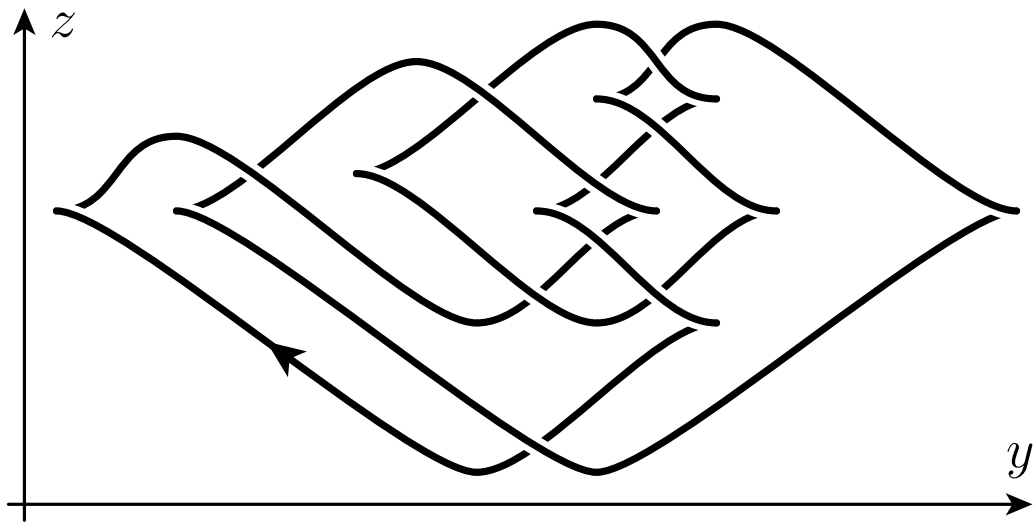
Гладкая (или кусочно гладкая, но без каспов) кривая в  $\mathbb{R}^3$  называется *лежандровой*, если она всюду касается стандартной контактной структуры  $\xi_+$

Узел, представленный лежандровой кривой, называется *лежандровым*.

Лежандровы узлы *эквивалентны*, если (после канонического сглаживания) они изотопны в классе гладких лежандровых узлов.

Лежандров узел полностью определяется своей проекцией на плоскость  $yz$  (так как вдоль лежандровой кривой выполнено  $x = -dz/dy$ ). Такая проекция называется *фронтальной*.

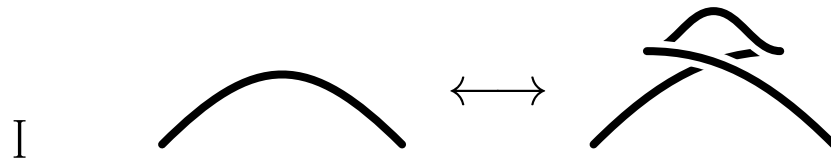
Лежандров узел полностью определяется своей проекцией на плоскость  $yz$  (так как вдоль лежандровой кривой выполнено  $x = -dz/dy$ ). Такая проекция называется *фронтальной*.



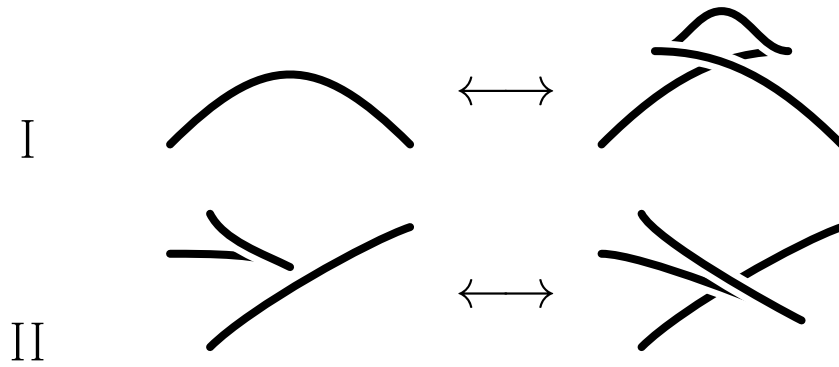


# Движения Райдемайстера для фронтальных проекций

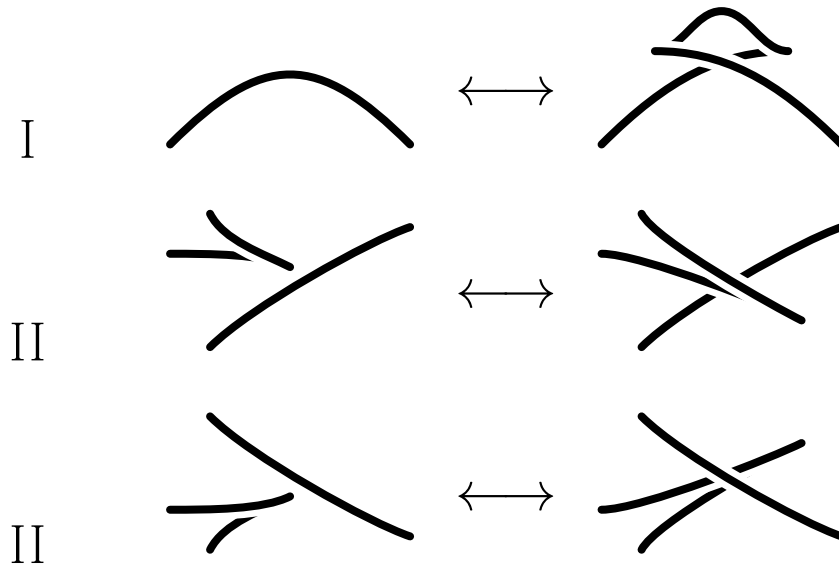
# Движения Райдемайстера для фронтальных проекций



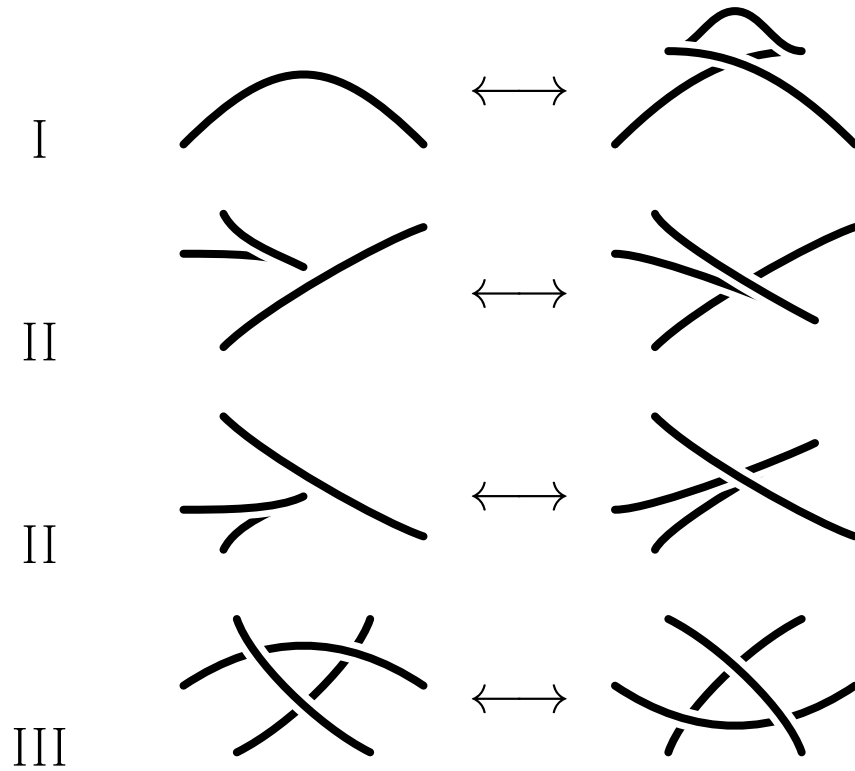
# Движения Райдемайстера для фронтальных проекций



# Движения Райдемайстера для фронтальных проекций



# Движения Райдемайстера для фронтальных проекций



# Классические инварианты лежандровых узлов

# Классические инварианты лежандровых узлов

Число Торстона–Беннекена  $\text{tb}(K)$  узла  $K$  определяется как

$$\text{tb}(K) = w - c/2,$$

# Классические инварианты лежандровых узлов

Число Торстона–Беннекена  $\text{tb}(K)$  узла  $K$  определяется как

$$\text{tb}(K) = w - c/2,$$

где  $w$  есть алгебраическое число самопересечений, а  $c$  — число каспов фронтальной проекции.



## Классические инварианты лежандровых узлов

*Число Торстона–Беннекена*  $\text{tb}(K)$  узла  $K$  определяется как

$$\text{tb}(K) = w - c/2,$$

где  $w$  есть алгебраическое число самопересечений, а  $c$  — число каспов фронтальной проекции.

*Число вращения*  $r(K)$  ориентированного лежандрова узла  $K$  есть

$$\frac{1}{2}(c_- - c_+),$$

## Классические инварианты лежандровых узлов

Число Торстона–Беннекена  $\text{tb}(K)$  узла  $K$  определяется как

$$\text{tb}(K) = w - c/2,$$

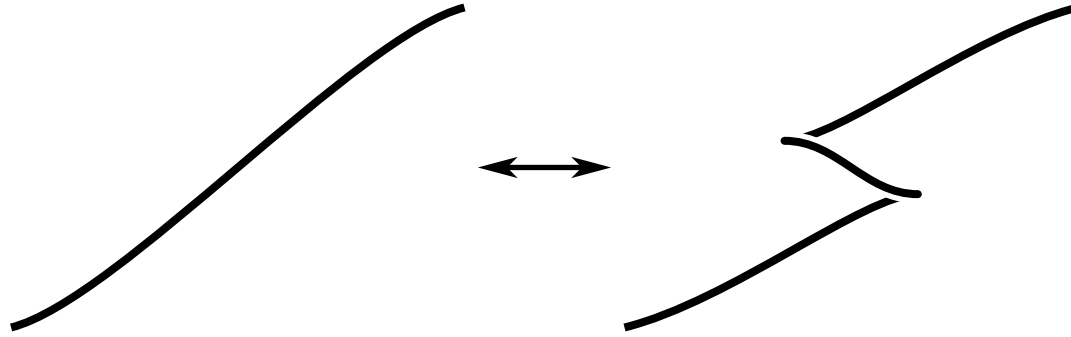
где  $w$  есть алгебраическое число самопересечений, а  $c$  — число каспов фронтальной проекции.

Число вращения  $r(K)$  ориентированного лежандрова узла  $K$  есть

$$\frac{1}{2}(c_- - c_+),$$

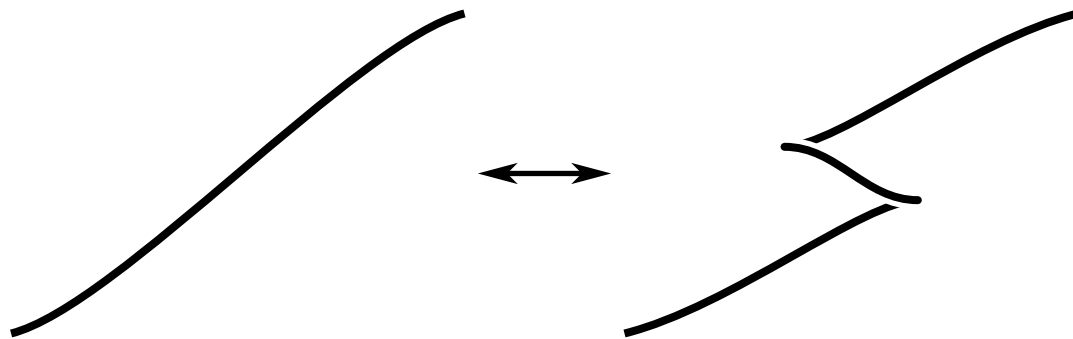
где  $c_+$  ( $c_-$ ) — число каспов, ориентированных вниз (соответственно, вверх).

*Стабилизации и дестабилизации лежандровых узлов*



изменяют  $tb$  и  $r$  на  $\pm 1$ .

## Стабилизации и дестабилизации лежандровых узлов



изменяют  $tb$  и  $r$  на  $\pm 1$ .

Два топологически эквивалентных лежандрова узла становятся лежандрово эквивалентны после некоторого числа стабилизаций (Д.Фукс–С.Табачников, 1997).

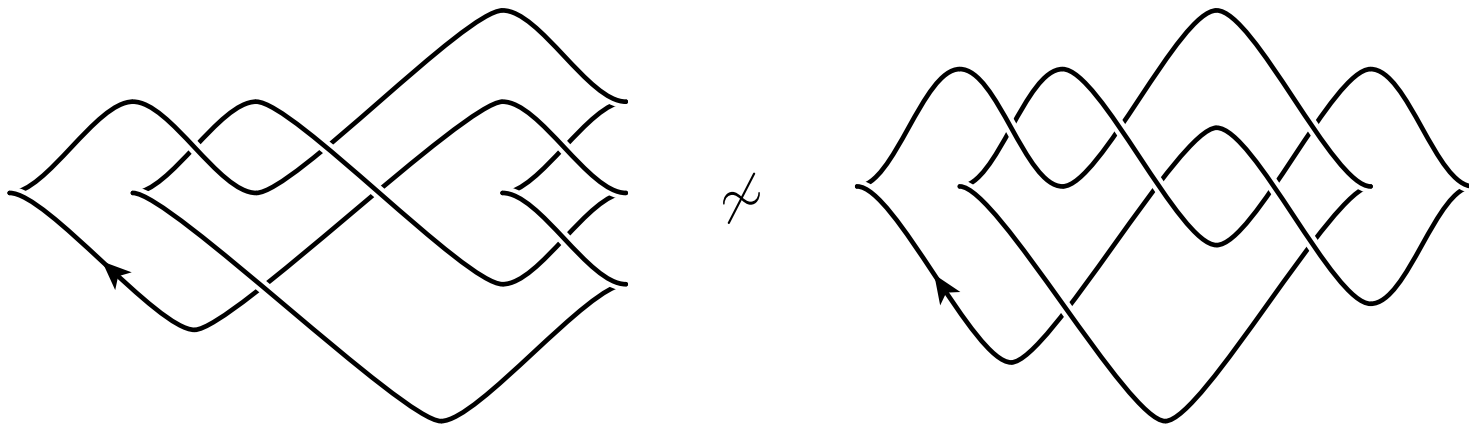
Я.Элиашберг, М.Фрейзер, 1995: два лежандровых узла, имеющие тривиальный топологический тип и одинаковые классические инварианты, лежандрово эквивалентны.

Я.Элиашберг, М.Фрейзер, 1995: два лежандровых узла, имеющие тривиальный топологический тип и одинаковые классические инварианты, лежандрово эквивалентны.

Ю.Чеканов, 1997: для нетривиальных узлов это неверно.

Я.Элиашберг, М.Фрейзер, 1995: два лежандровых узла, имеющие тривиальный топологический тип и одинаковые классические инварианты, лежандрово эквивалентны.

Ю.Чеканов, 1997: для нетривиальных узлов это неверно. Пример:



**Вопрос.** Пусть  $A \cong S^1 \times [0; 1]$  — вложенное в  $\mathbb{R}^3$  кольцо, касающееся контактной структуры  $\xi_+$  вдоль всего края. Верно ли, что две компоненты  $\partial A$  эквивалентны как лежандровы узлы?



**Вопрос.** Пусть  $A \cong S^1 \times [0; 1]$  — вложенное в  $\mathbb{R}^3$  кольцо, касающееся контактной структуры  $\xi_+$  вдоль всего края. Верно ли, что две компоненты  $\partial A$  эквивалентны как лежандровы узлы?

Такие кольца являются «строительными блоками» для выпуклых поверхностей в смысле Э.Жиру.

**Вопрос.** Пусть  $A \cong \mathbb{S}^1 \times [0; 1]$  — вложенное в  $\mathbb{R}^3$  кольцо, касающееся контактной структуры  $\xi_+$  вдоль всего края. Верно ли, что две компоненты  $\partial A$  эквивалентны как лежандровы узлы?

Такие кольца являются «строительными блоками» для выпуклых поверхностей в смысле Э.Жиру.

Г.Господинов (arXiv:0909.4326): ответ «да», но без полного доказательства.

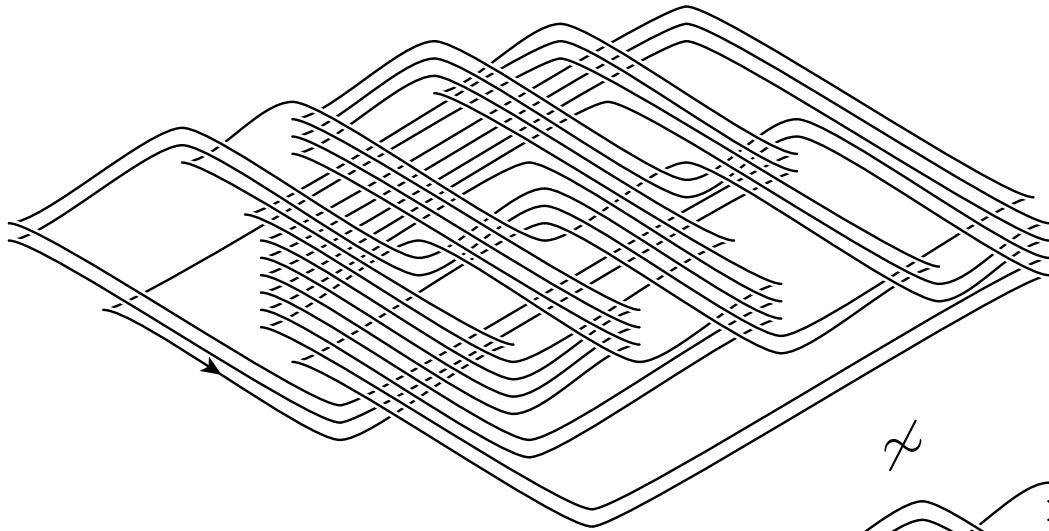
**Вопрос.** Пусть  $A \cong \mathbb{S}^1 \times [0; 1]$  — вложенное в  $\mathbb{R}^3$  кольцо, касающееся контактной структуры  $\xi_+$  вдоль всего края. Верно ли, что две компоненты  $\partial A$  эквивалентны как лежандровы узлы?

Такие кольца являются «строительными блоками» для выпуклых поверхностей в смысле Э.Жиру.

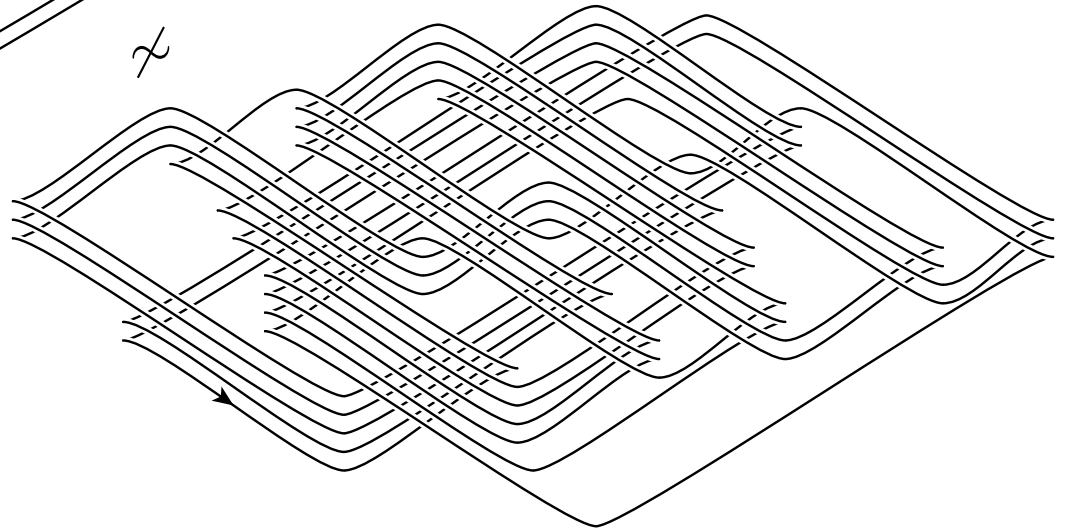
Г.Господинов (arXiv:0909.4326): ответ «да», но без полного доказательства.

На самом деле — нет.

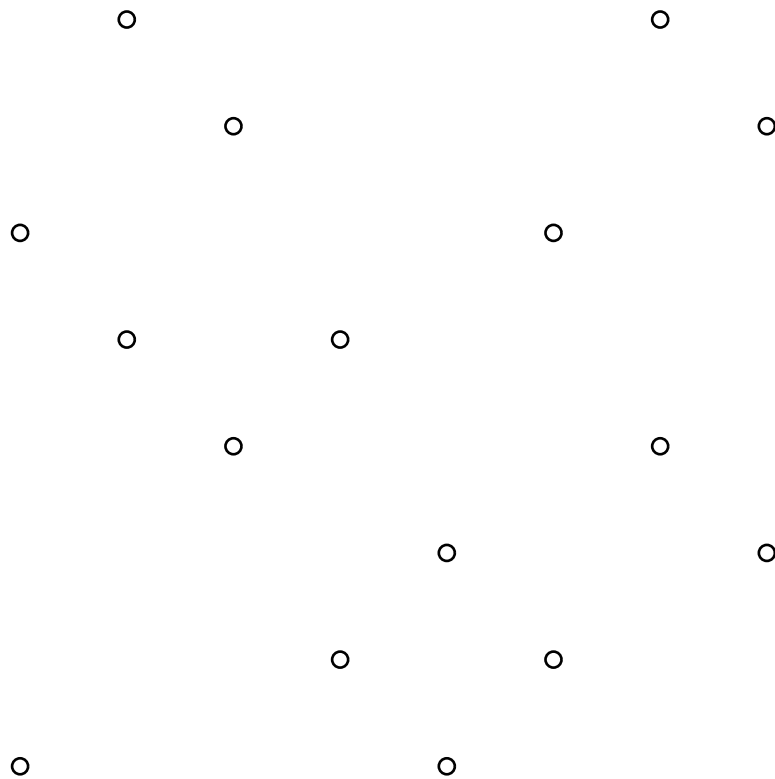
Пример:



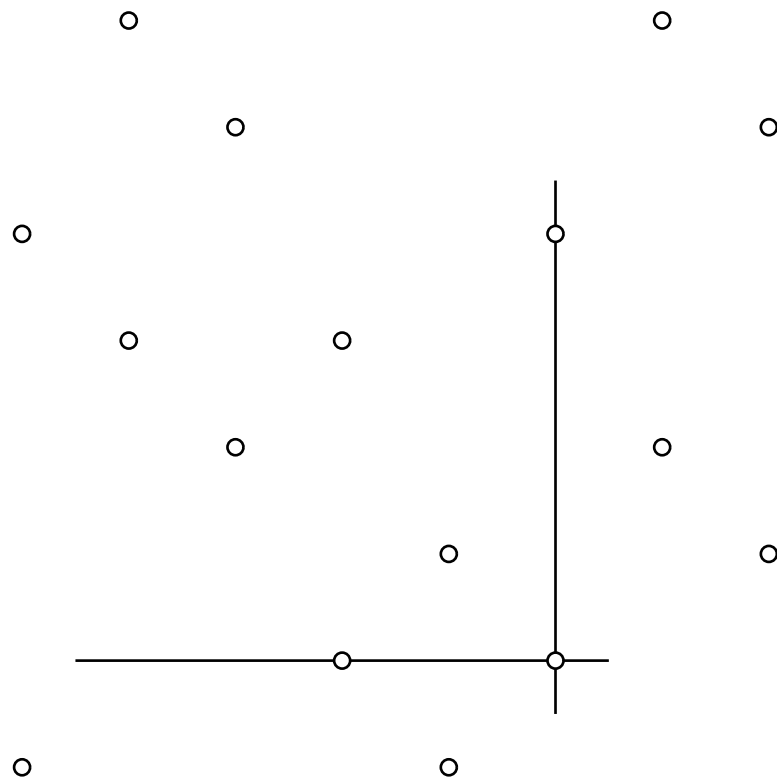
$\approx$



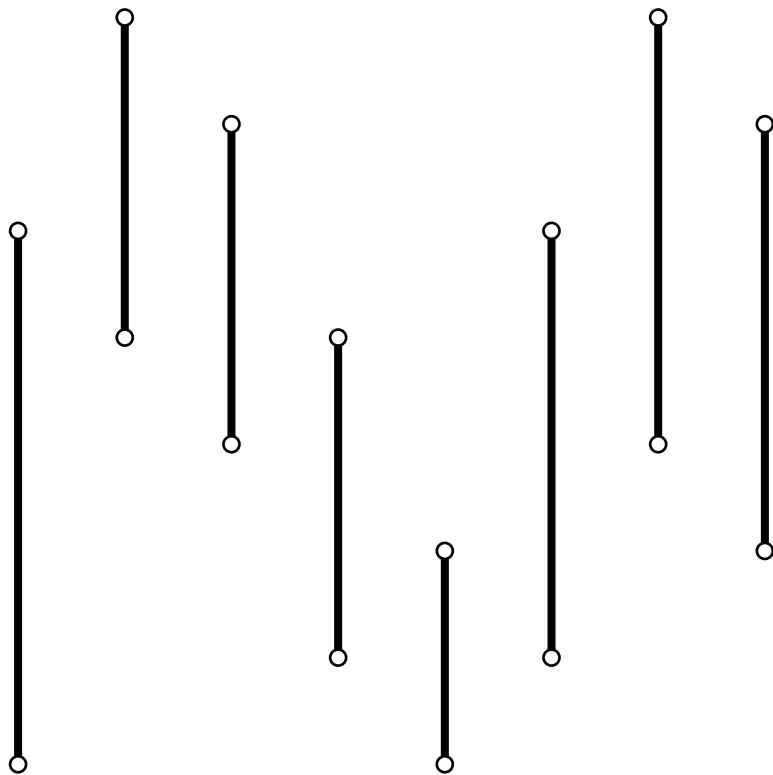
# Прямоугольная диаграмма узла (зацепления)



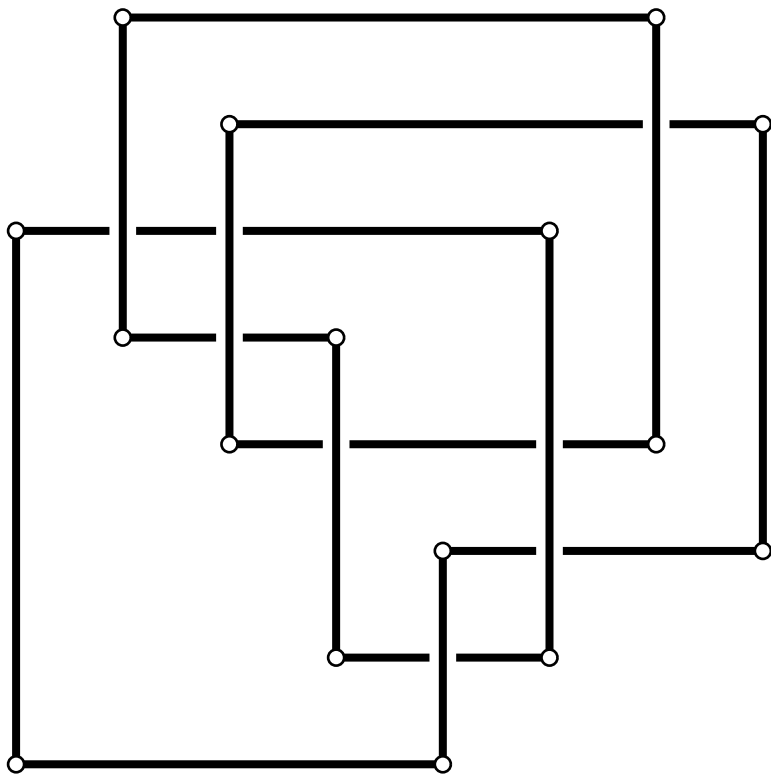
# Прямоугольная диаграмма узла (зацепления)



# Прямоугольная диаграмма узла (зацепления)



Прямоугольная диаграмма узла (зацепления)





Элементарные движения (аналог движений Райдемайстера):

## Элементарные движения (аналог движений Райдемайстера):

- циклические сдвиги

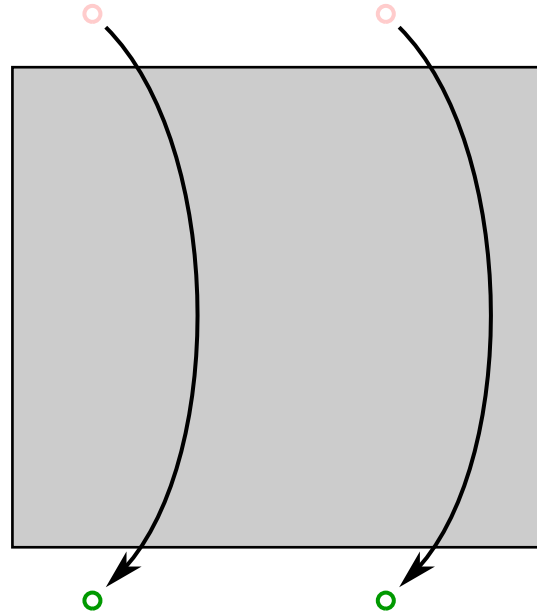
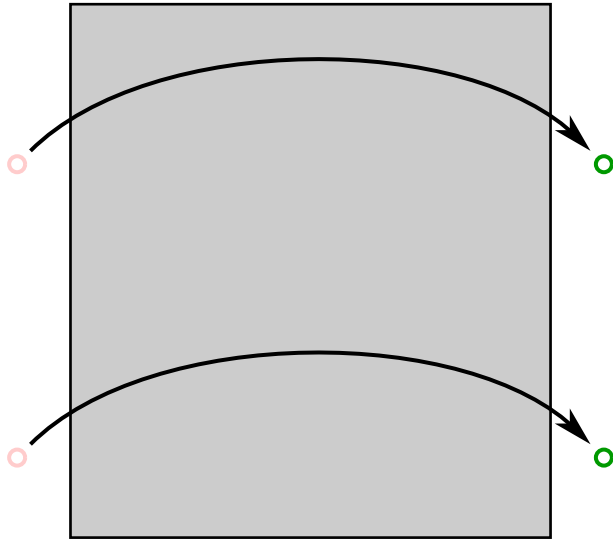
## Элементарные движения (аналог движений Райдемайстера):

- циклические сдвиги
- рокировки

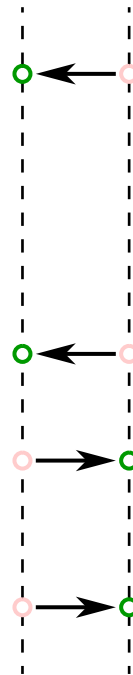
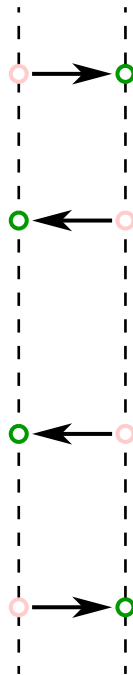
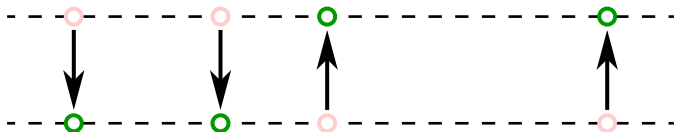
## Элементарные движения (аналог движений Райдемайстера):

- циклические сдвиги
- рокировки
- стабилизации и дестабилизации

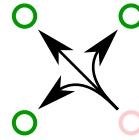
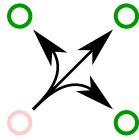
# Циклические сдвиги:



Рокировки:

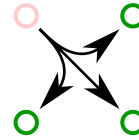
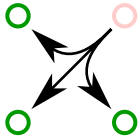


Стабилизации:

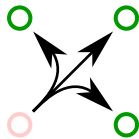


Тип I

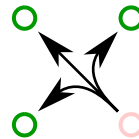
Тип II



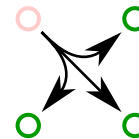
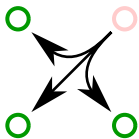
# Стабилизации:



Тип I



Тип II



Операция, обратная к стабилизации, называется *дестабилизацией*



Каждая прямоугольная диаграмма  $R$  определяет два класса лежандровых узлов:

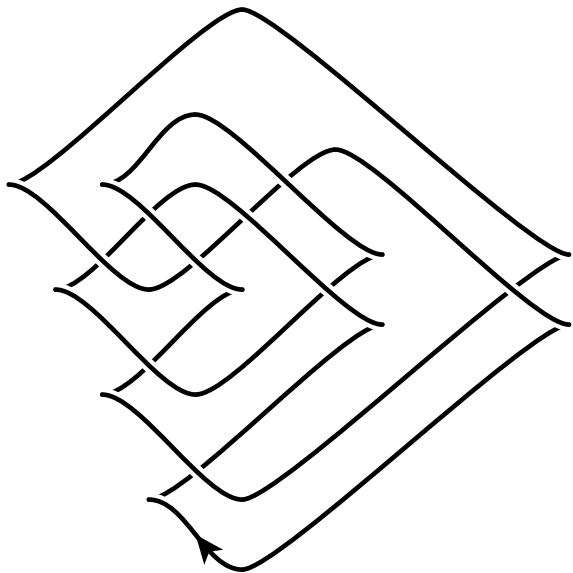
Каждая прямоугольная диаграмма  $R$  определяет два класса лежандровых узлов:

- $\mathcal{L}_+(R)$  — класс эквивалентности  $\xi_+$ -лежандровых узлов;

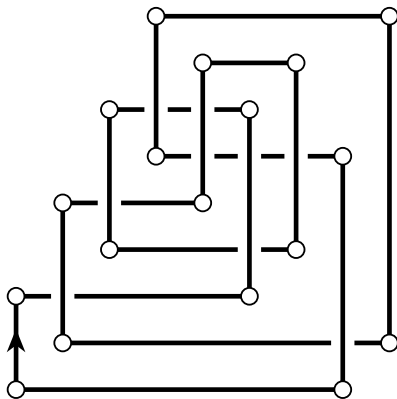
Каждая прямоугольная диаграмма  $R$  определяет два класса лежандровых узлов:

- $\mathcal{L}_+(R)$  — класс эквивалентности  $\xi_+$ -лежандровых узлов;
- $\mathcal{L}_-(R)$  — класс эквивалентности  $\xi_-$ -лежандровых узлов, где

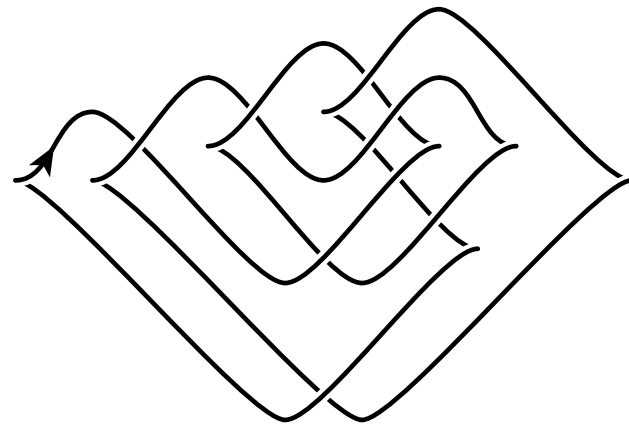
$$\xi_- = \ker(x dy - dz).$$



$\mathcal{L}_+(R)$



$R$



$\mathcal{L}_-(R)$

$\mathcal{L}_+(R)$  и  $\mathcal{L}_-(R)$  сохраняются циклическими сдвигами и рокировками.

$\mathcal{L}_+(R)$  и  $\mathcal{L}_-(R)$  сохраняются циклическими сдвигами и рокировками.

$\mathcal{L}_+(R)$  сохраняется стабилизациями и дестабилизациями типа I,  $\mathcal{L}_-(R)$  — стабилизациями и дестабилизациями типа II.

$\mathcal{L}_+(R)$  и  $\mathcal{L}_-(R)$  сохраняются циклическими сдвигами и рокировками.

$\mathcal{L}_+(R)$  сохраняется стабилизациями и дестабилизациями типа I,  $\mathcal{L}_-(R)$  — стабилизациями и дестабилизациями типа II.

Если  $\mathcal{L}_+(R_1) = \mathcal{L}_+(R_2)$  (или  $\mathcal{L}_-(R_1) = \mathcal{L}_-(R_2)$ ), то  $R_1$  и  $R_2$  связаны последовательностью элементарных движений, не включающих стабилизации и дестабилизации типа II (соответственно, типа I).

Если «плохое» кольцо существует, то его можно построить с помощью следующей конструкции.



Если «плохое» кольцо существует, то его можно построить с помощью следующей конструкции.

Пусть  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2n} = r_0$  — набор прямоугольников в торе  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , стороны которых параллельны сторонам фундаментальной области (квадрата), со следующими свойствами:

Если «плохое» кольцо существует, то его можно построить с помощью следующей конструкции.

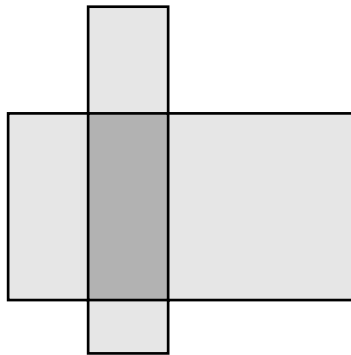
Пусть  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2n} = r_0$  — набор прямоугольников в торе  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , стороны которых параллельны сторонам фундаментальной области (квадрата), со следующими свойствами:

- для всех  $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$  пересечение  $r_i \cap r_{i+1}$  есть правая верхняя вершина для  $r_i$  и левая нижняя для  $r_{i+1}$ ;

Если «плохое» кольцо существует, то его можно построить с помощью следующей конструкции.

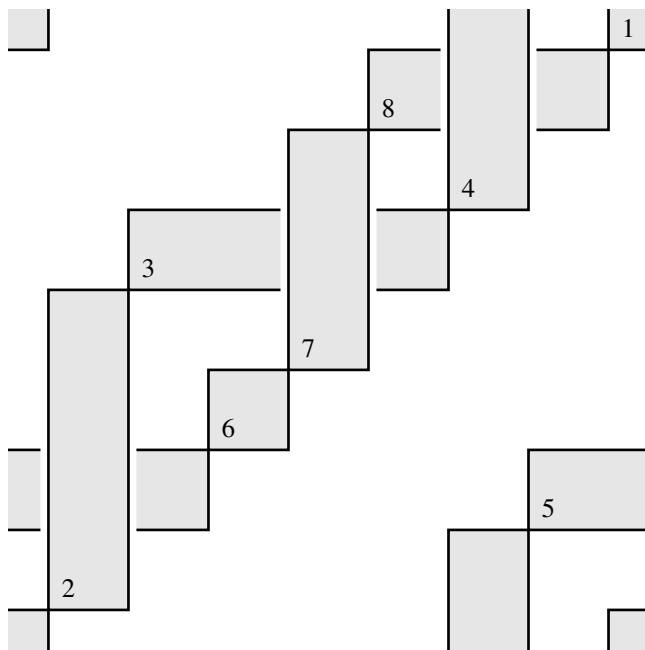
Пусть  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2n} = r_0$  — набор прямоугольников в торе  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , стороны которых параллельны сторонам фундаментальной области (квадрата), со следующими свойствами:

- для всех  $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$  пересечение  $r_i \cap r_{i+1}$  есть правая верхняя вершина для  $r_i$  и левая нижняя для  $r_{i+1}$ ;
- при  $j > i + 1$  пересечение  $r_i \cap r_j$  не содержит вершин  $r_i$  и  $r_j$ :



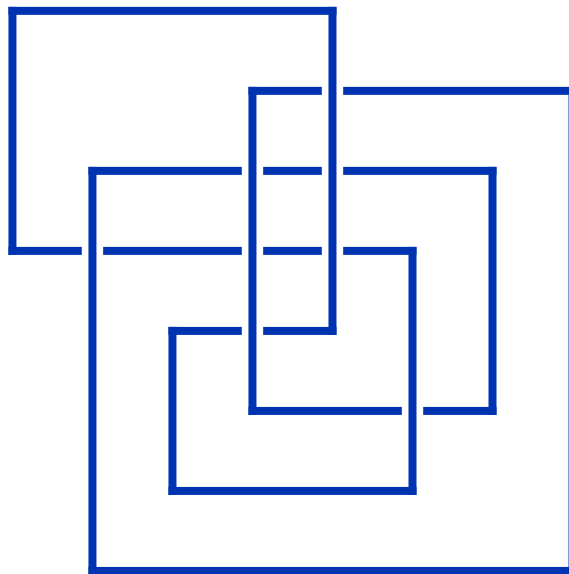
Тогда множество «свободных» вершин прямоугольников  $r_i$  образует прямоугольную диаграмму  $R = R_1 \cup R_2$  двухкомпонентного зацепления, которое является краем вложенного кольца.

Тогда множество «свободных» вершин прямоугольников  $r_i$  образует прямоугольную диаграмму  $R = R_1 \cup R_2$  двухкомпонентного зацепления, которое является краем вложенного кольца.





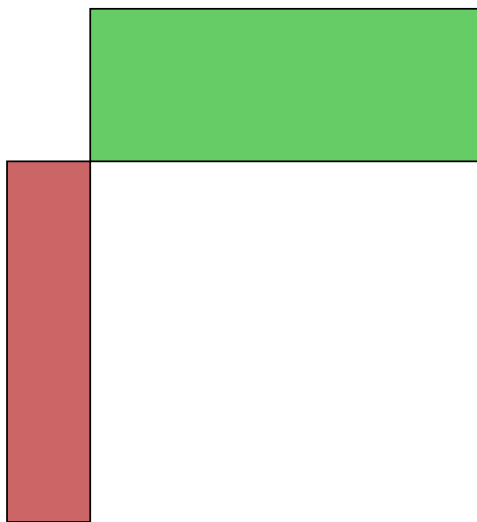
Тогда множество «свободных» вершин прямоугольников  $r_i$  образует прямоугольную диаграмму  $R = R_1 \cup R_2$  двухкомпонентного зацепления, которое является краем вложенного кольца.

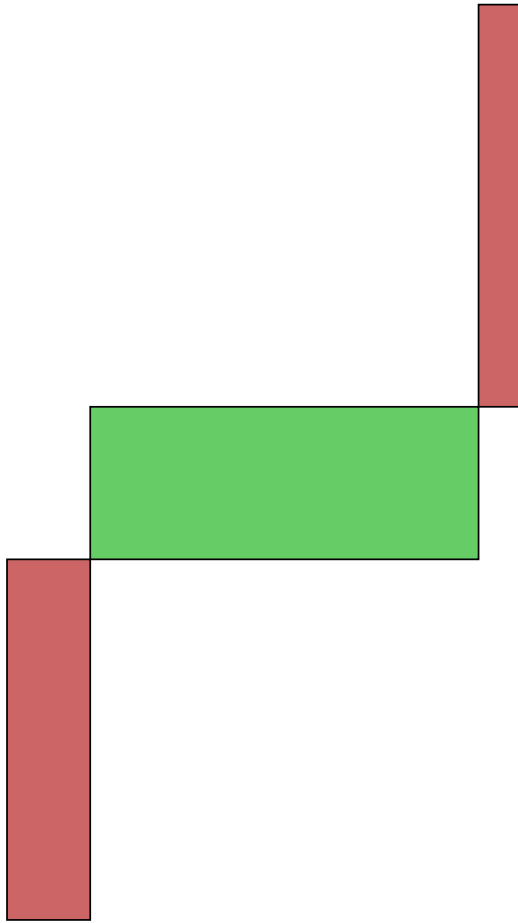


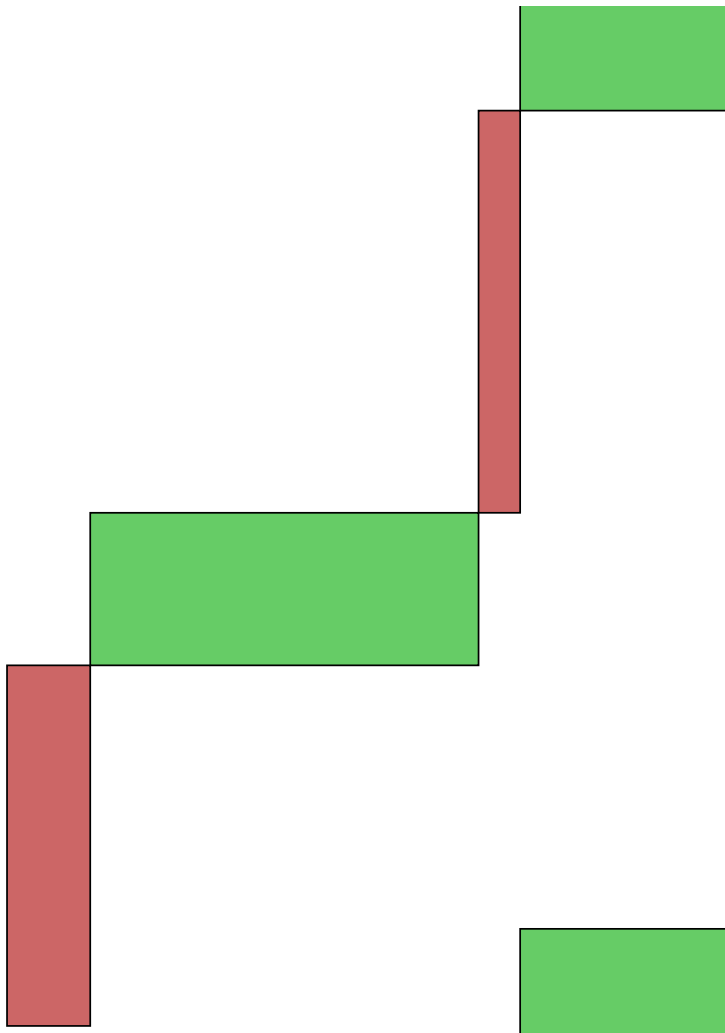
В простых примерах  $R_1$  и  $R_2$  оказываются связанными последовательностью рокировок и циклических сдвигов, что влечет  $\mathcal{L}_+(R_1) = \mathcal{L}_+(R_2)$ .

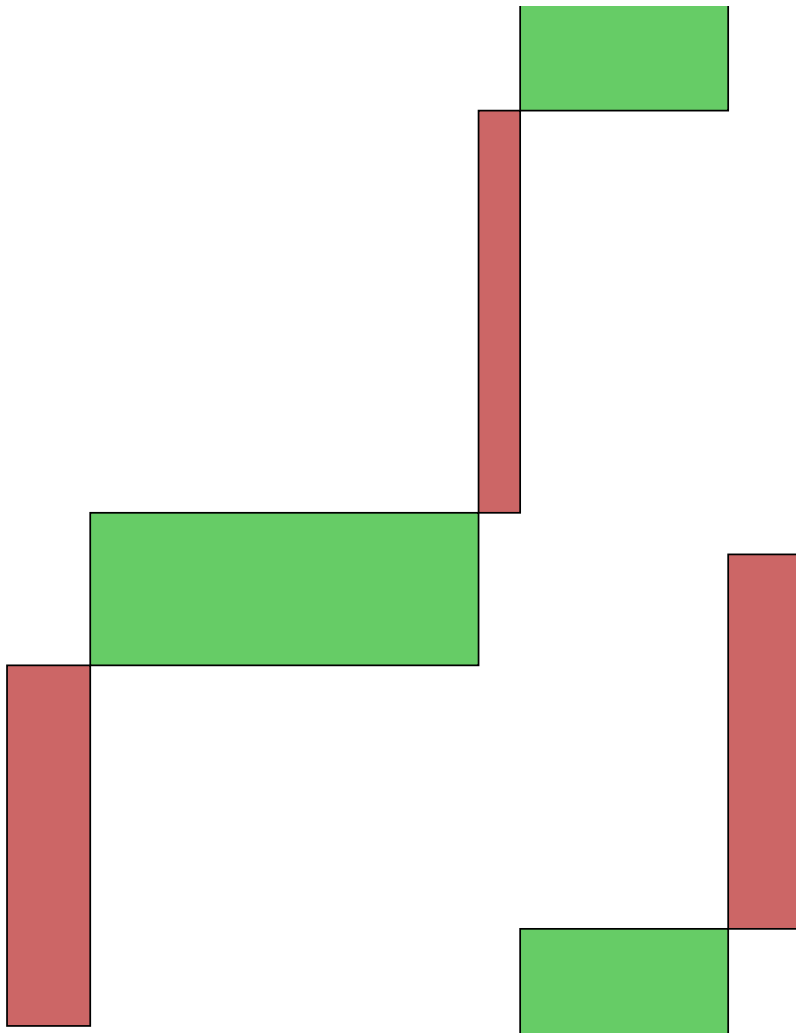


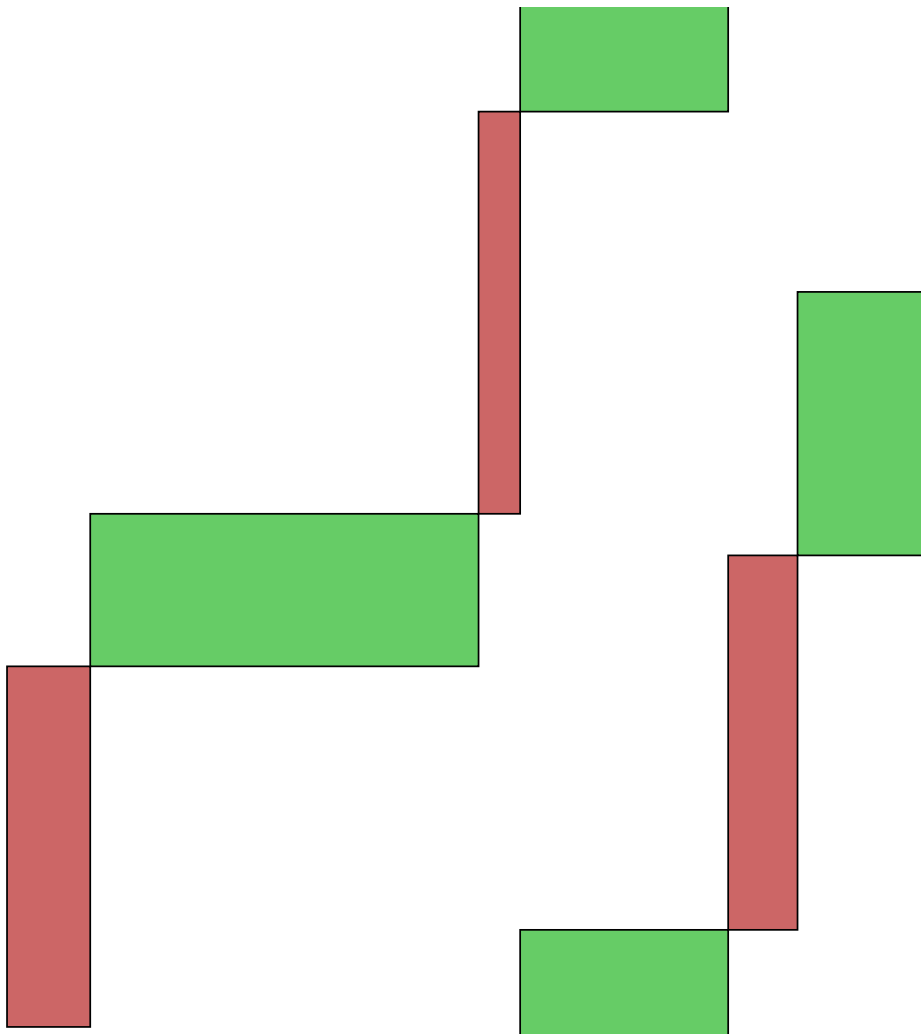


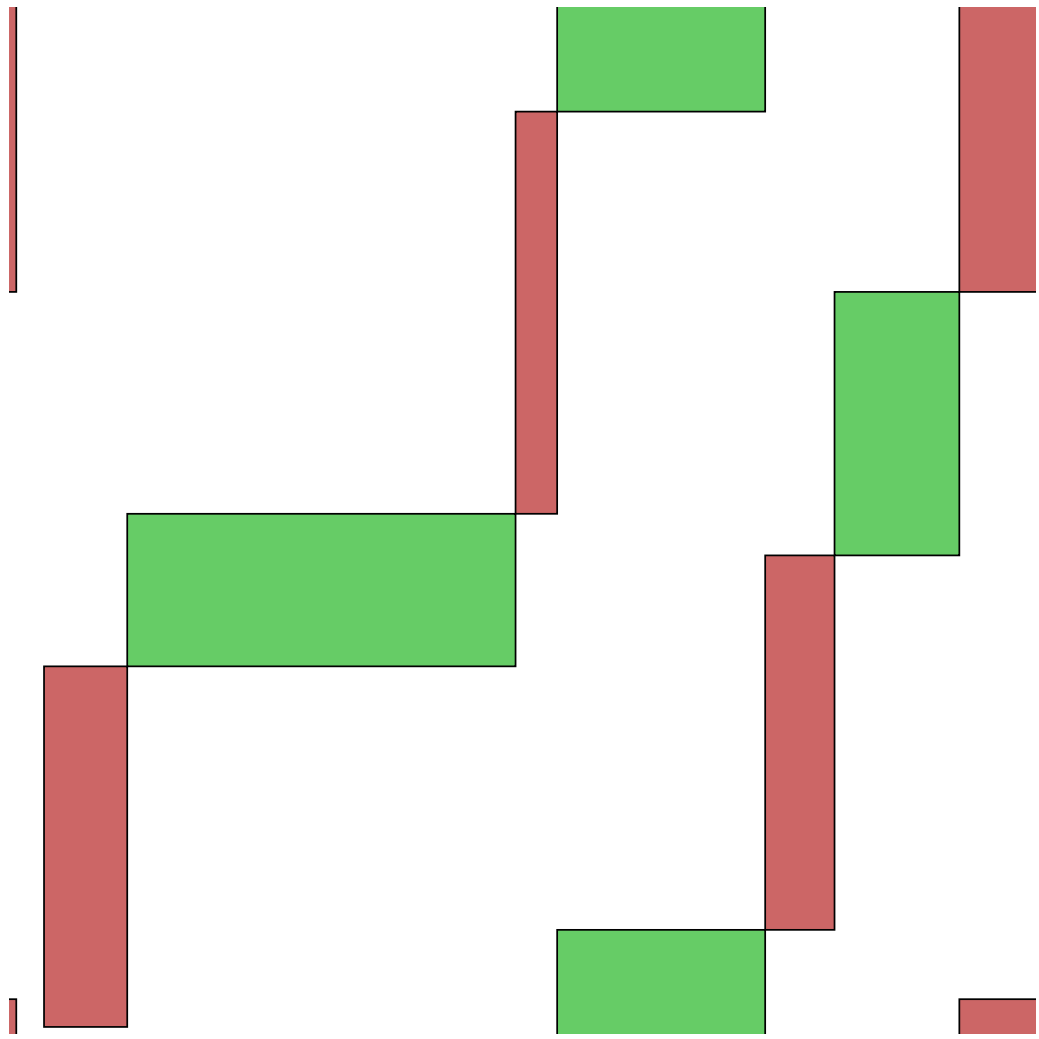


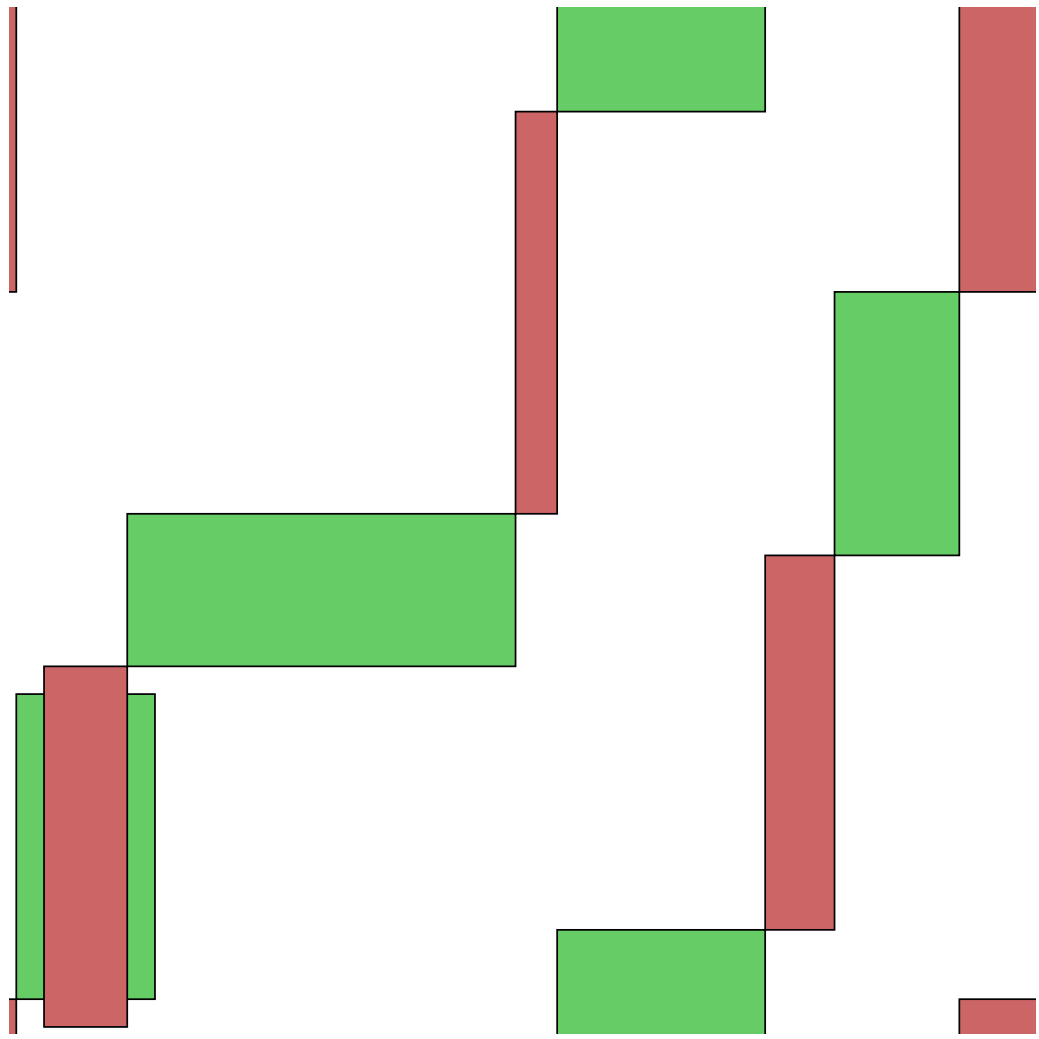


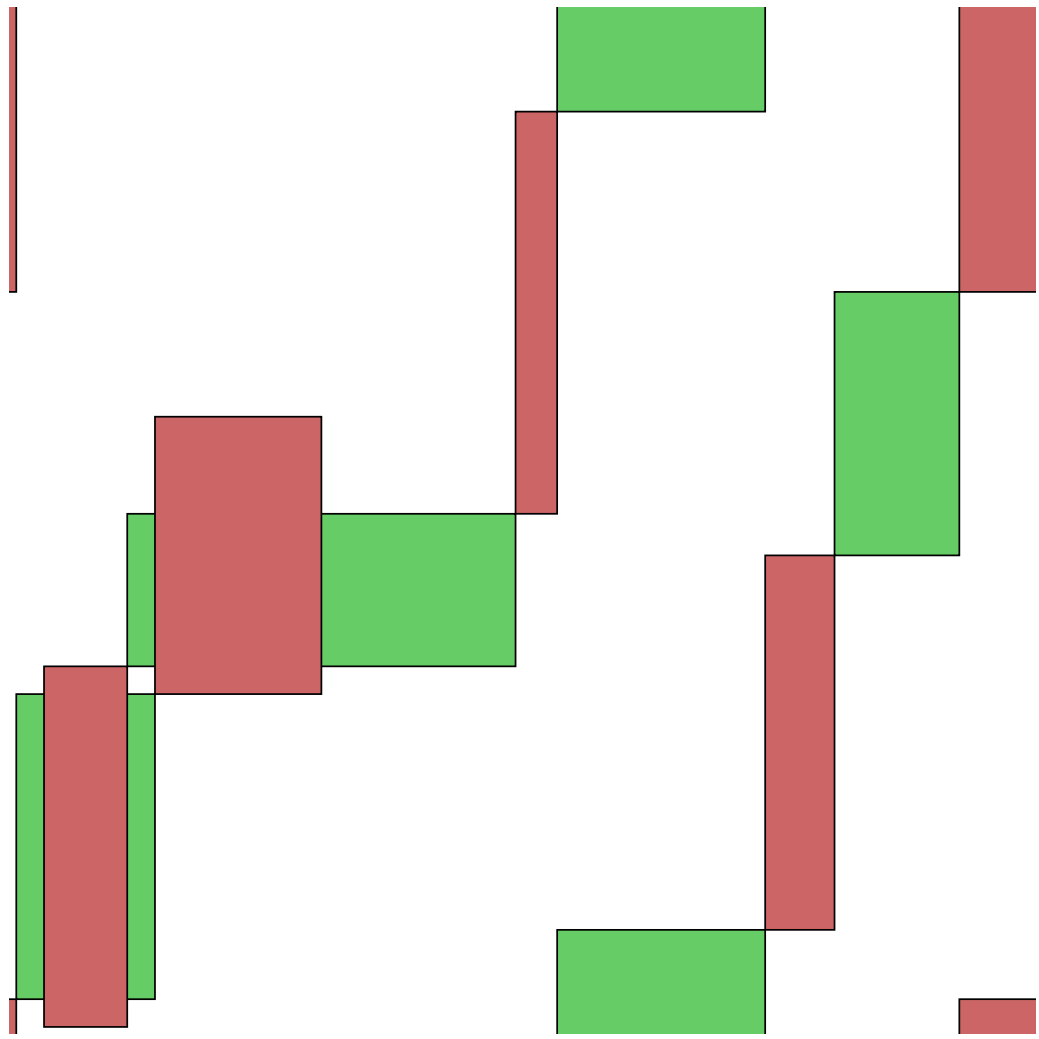




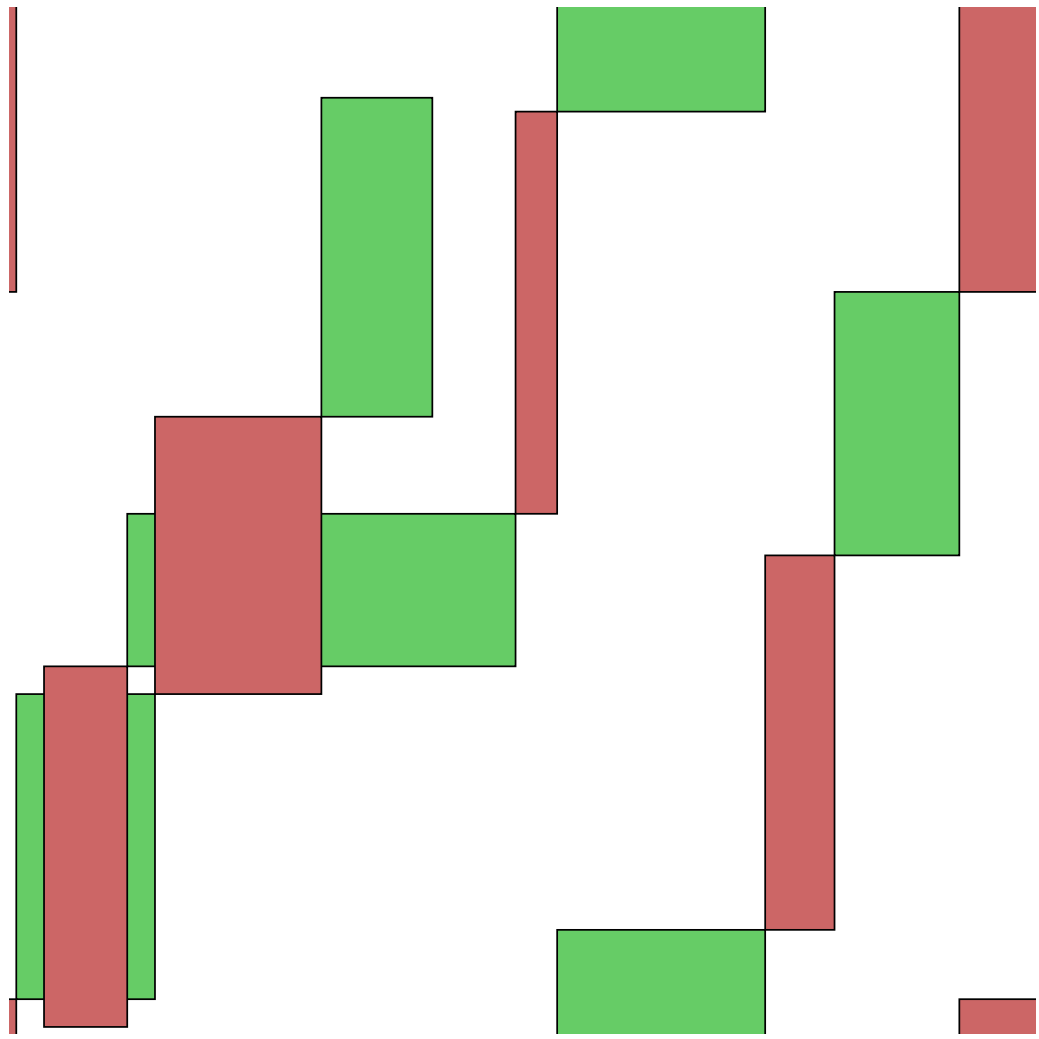


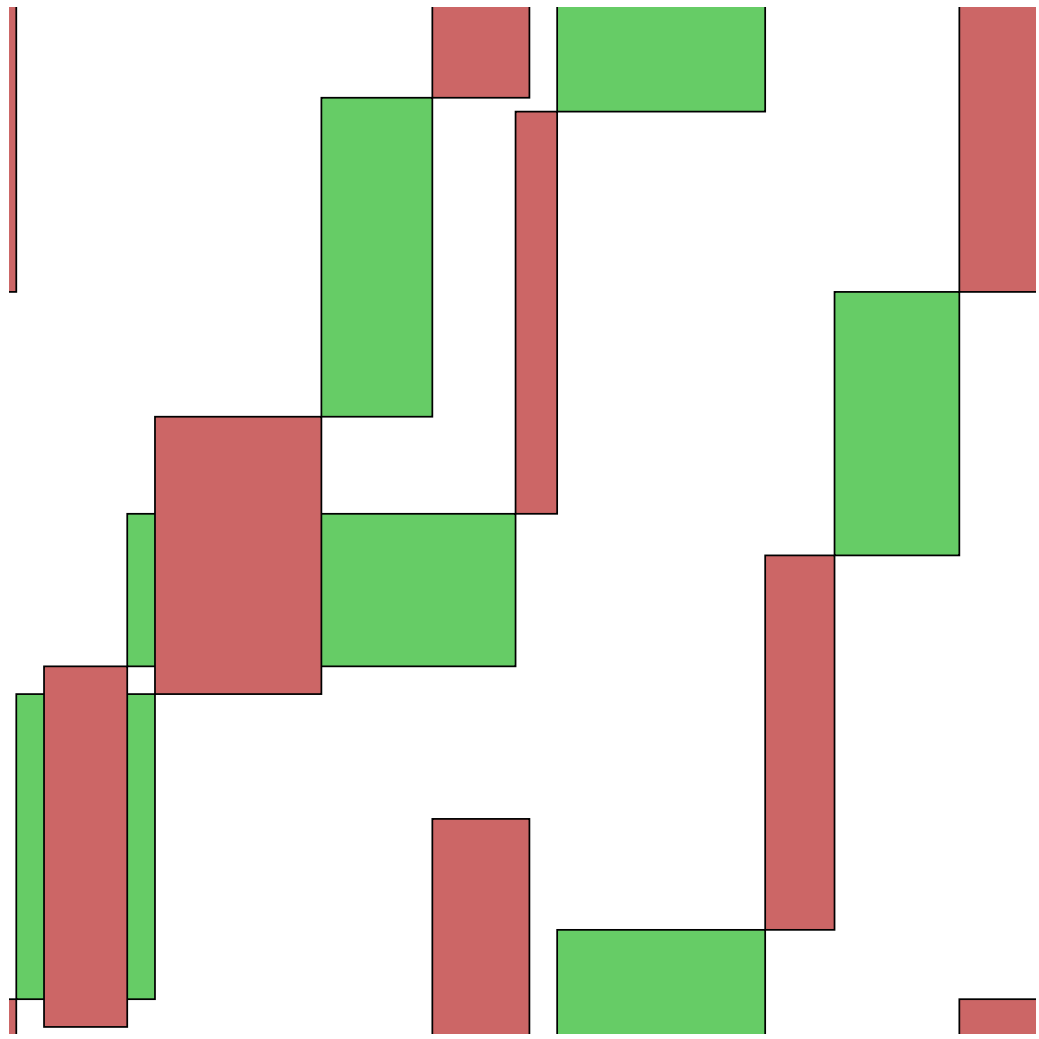


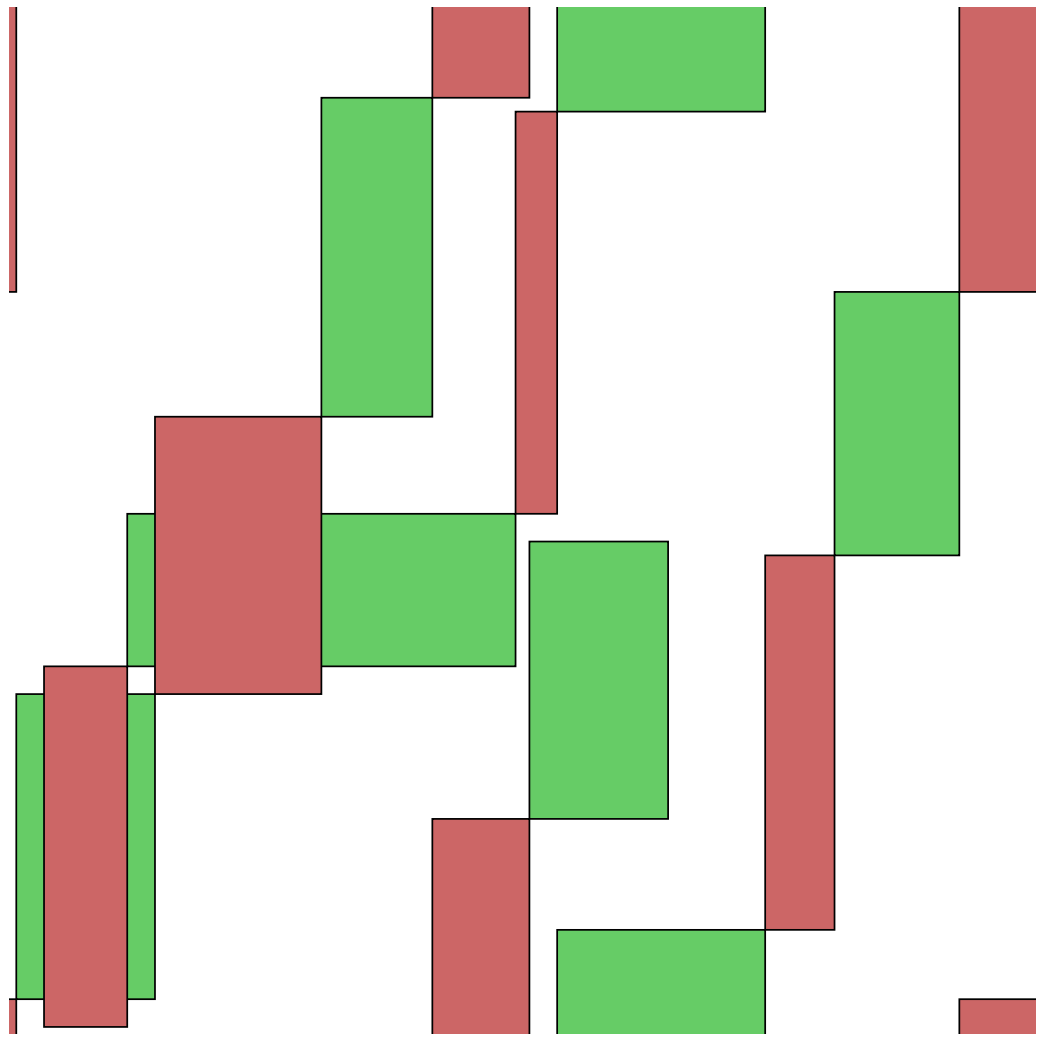


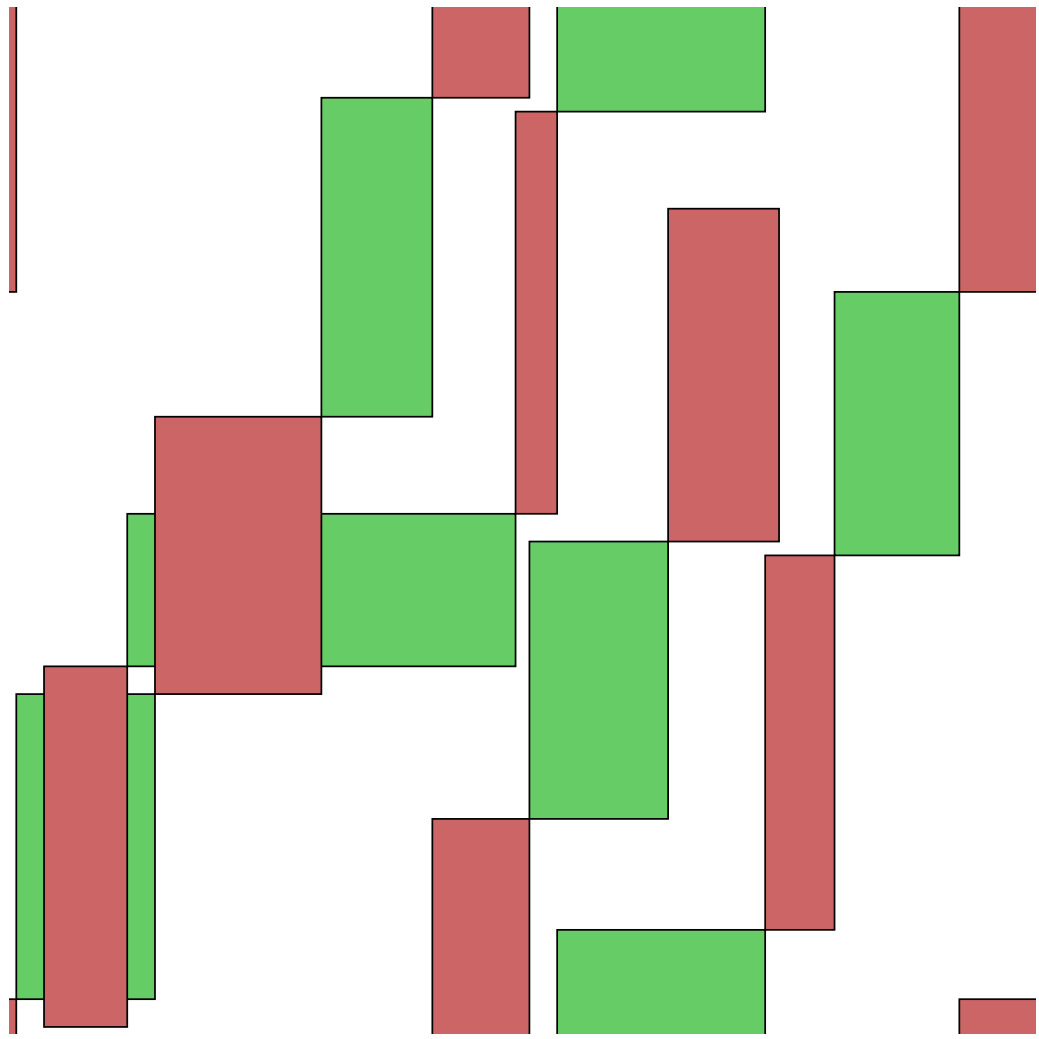


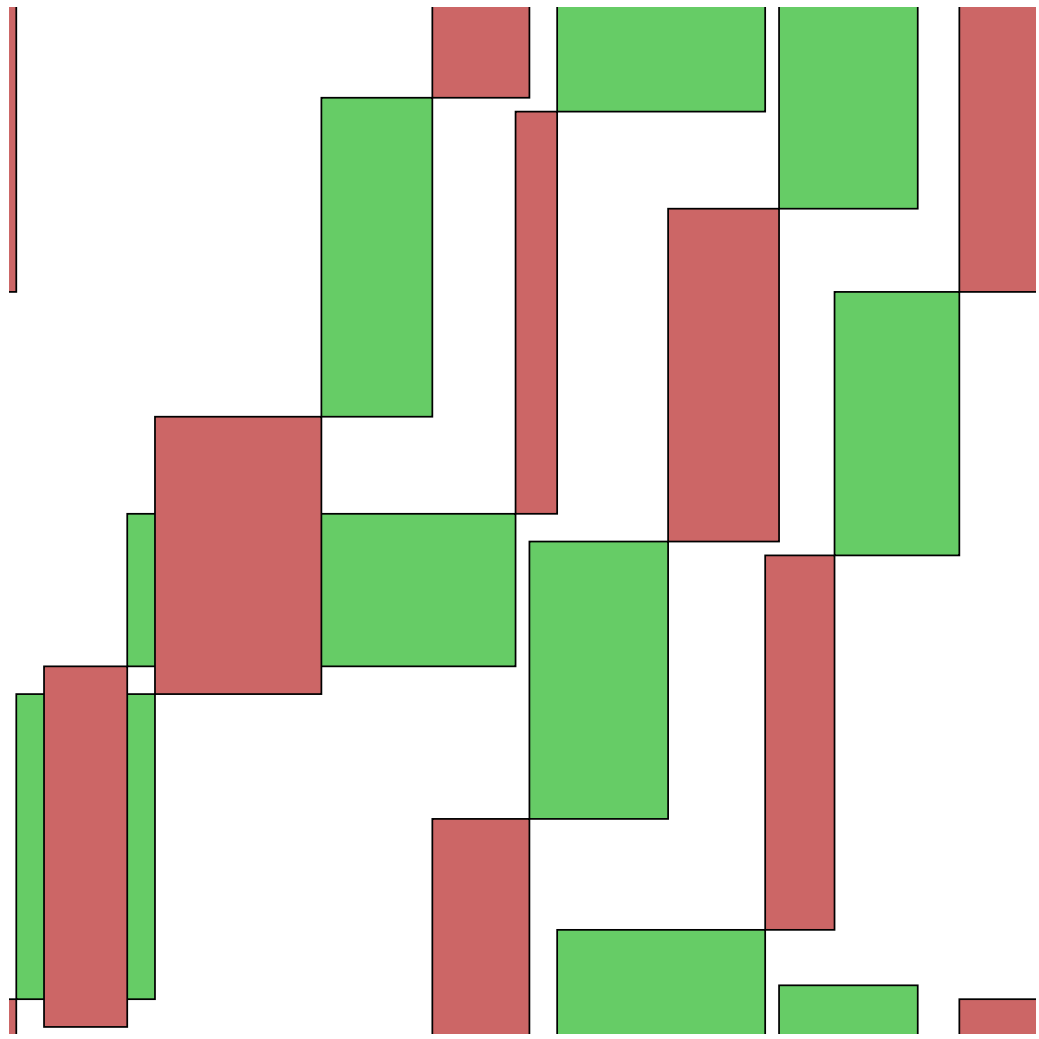


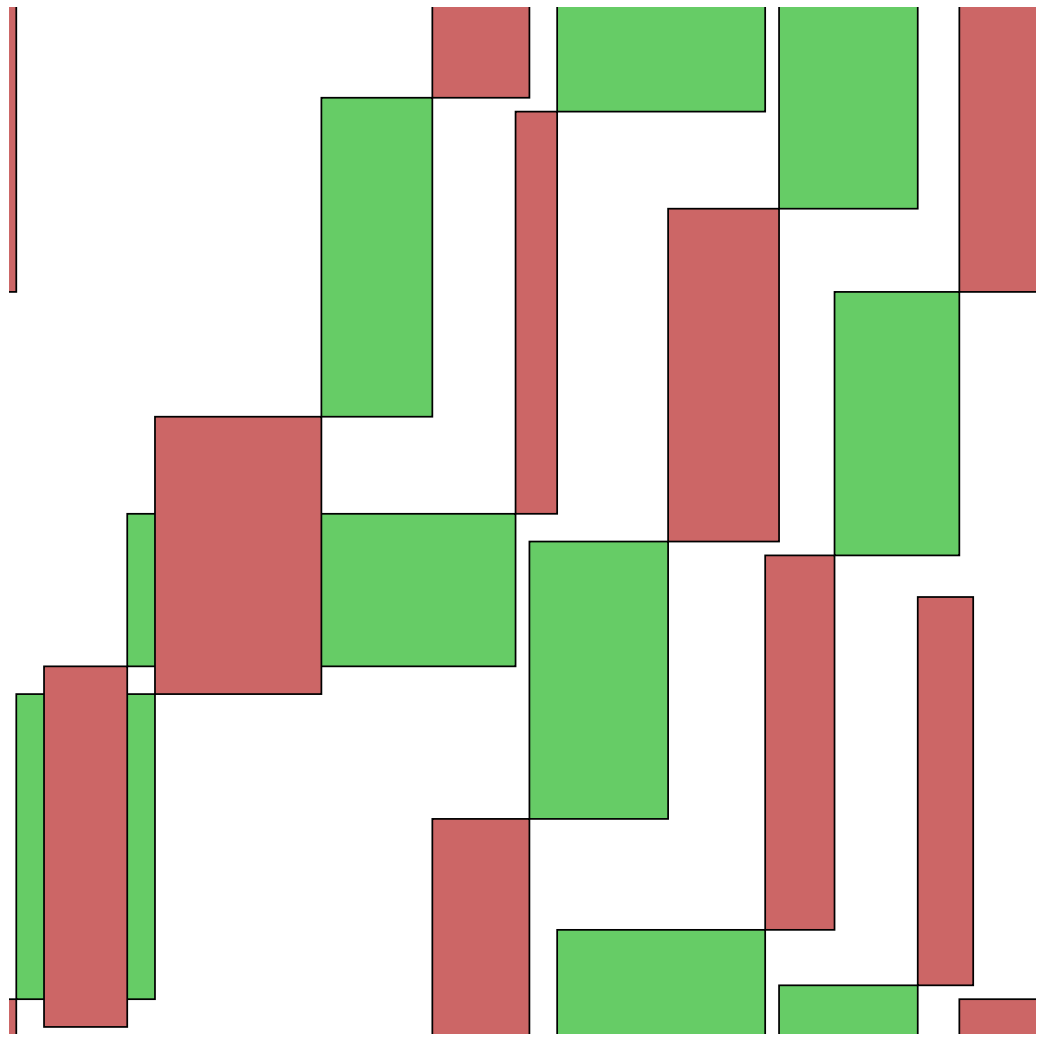


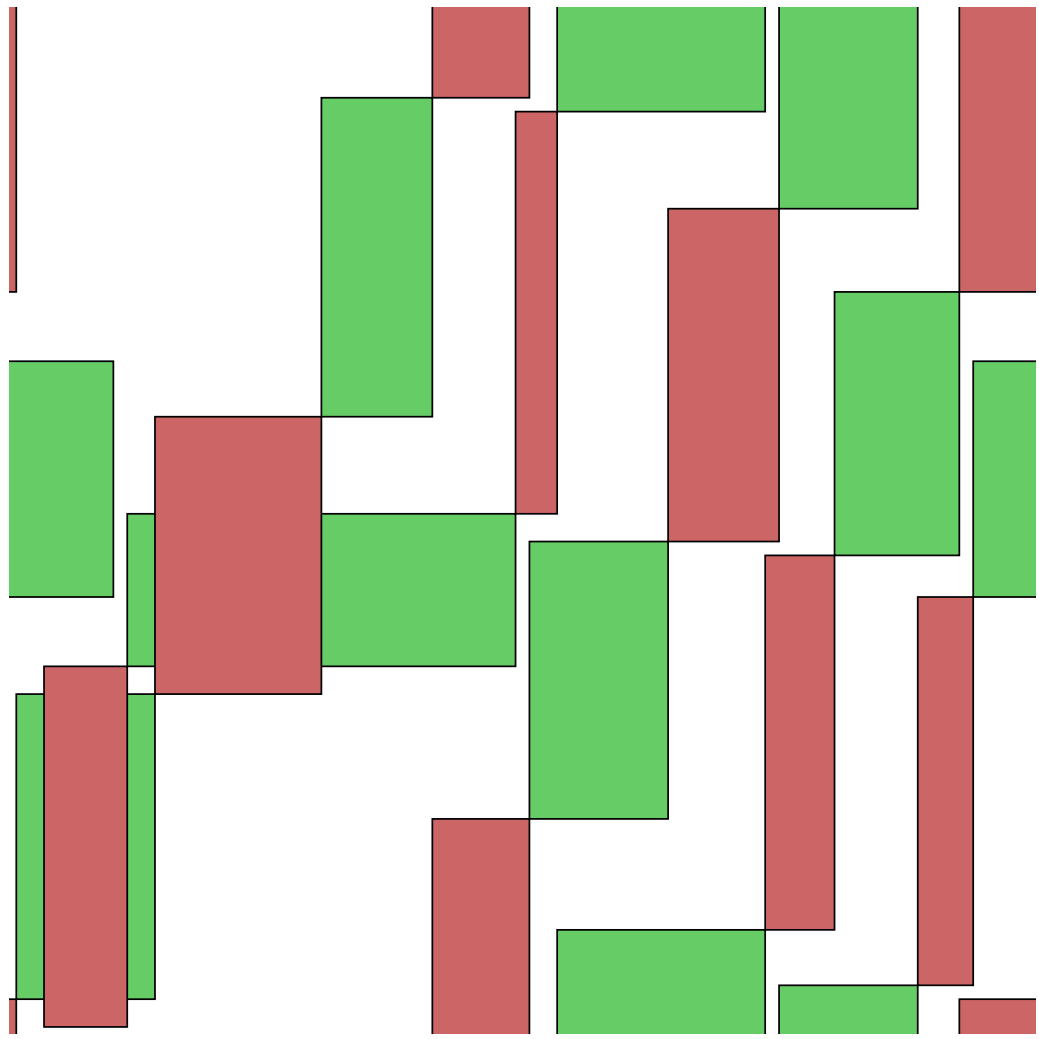


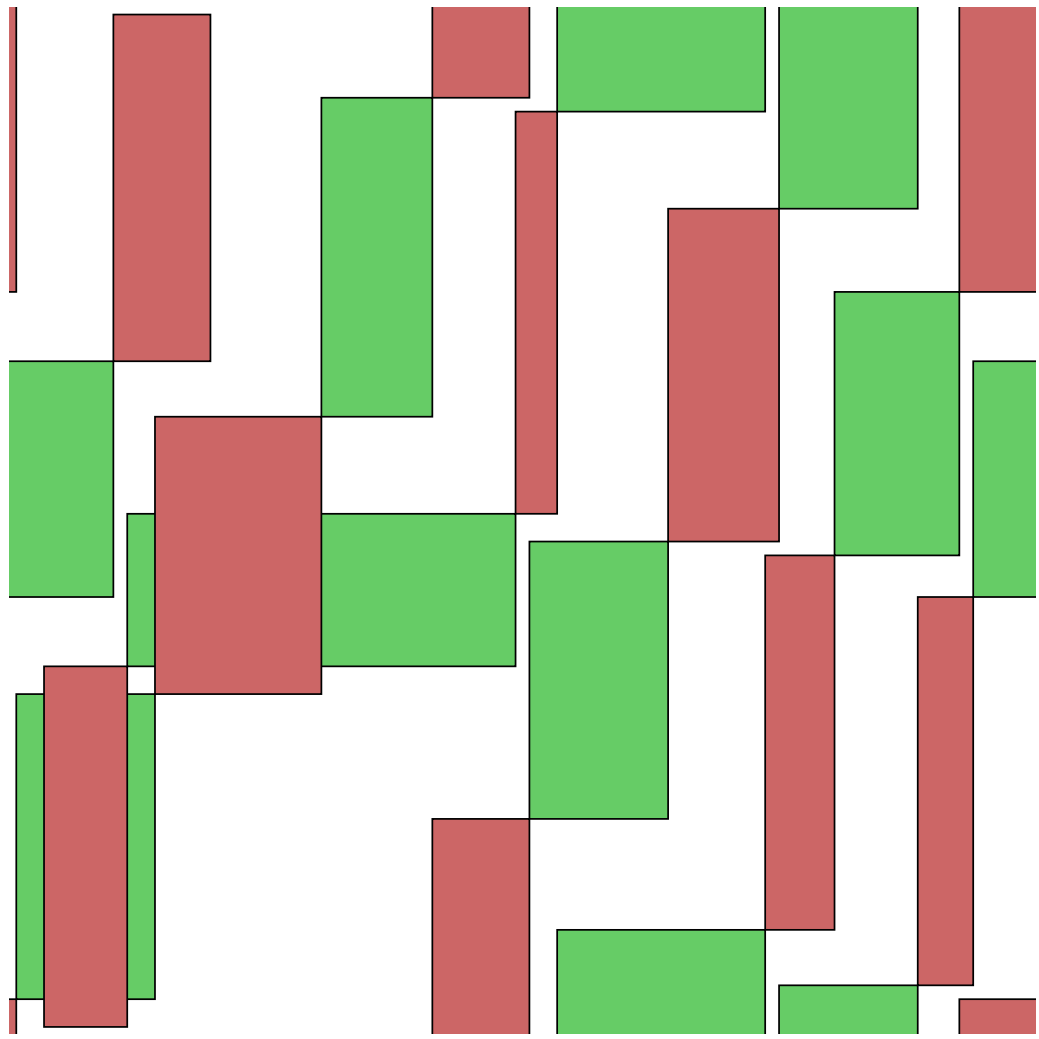




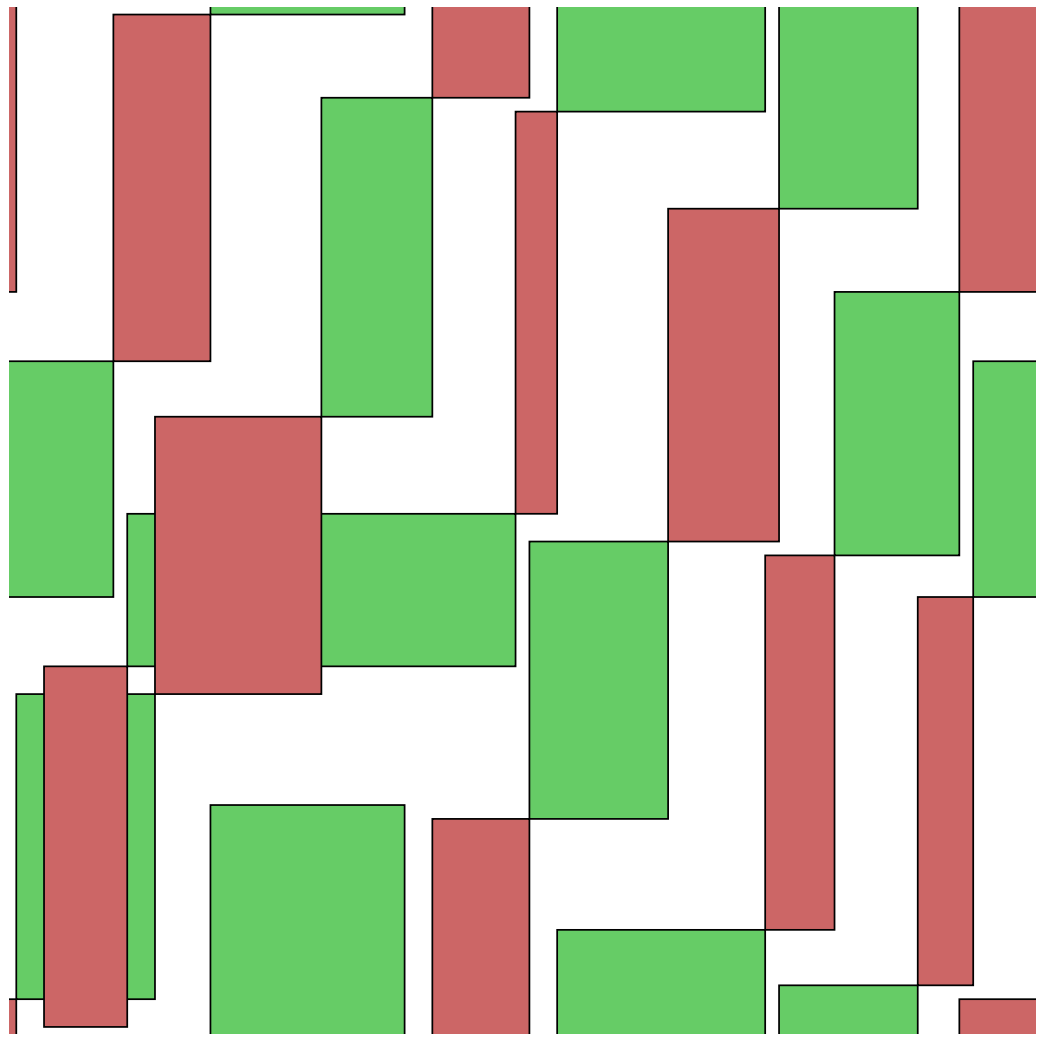


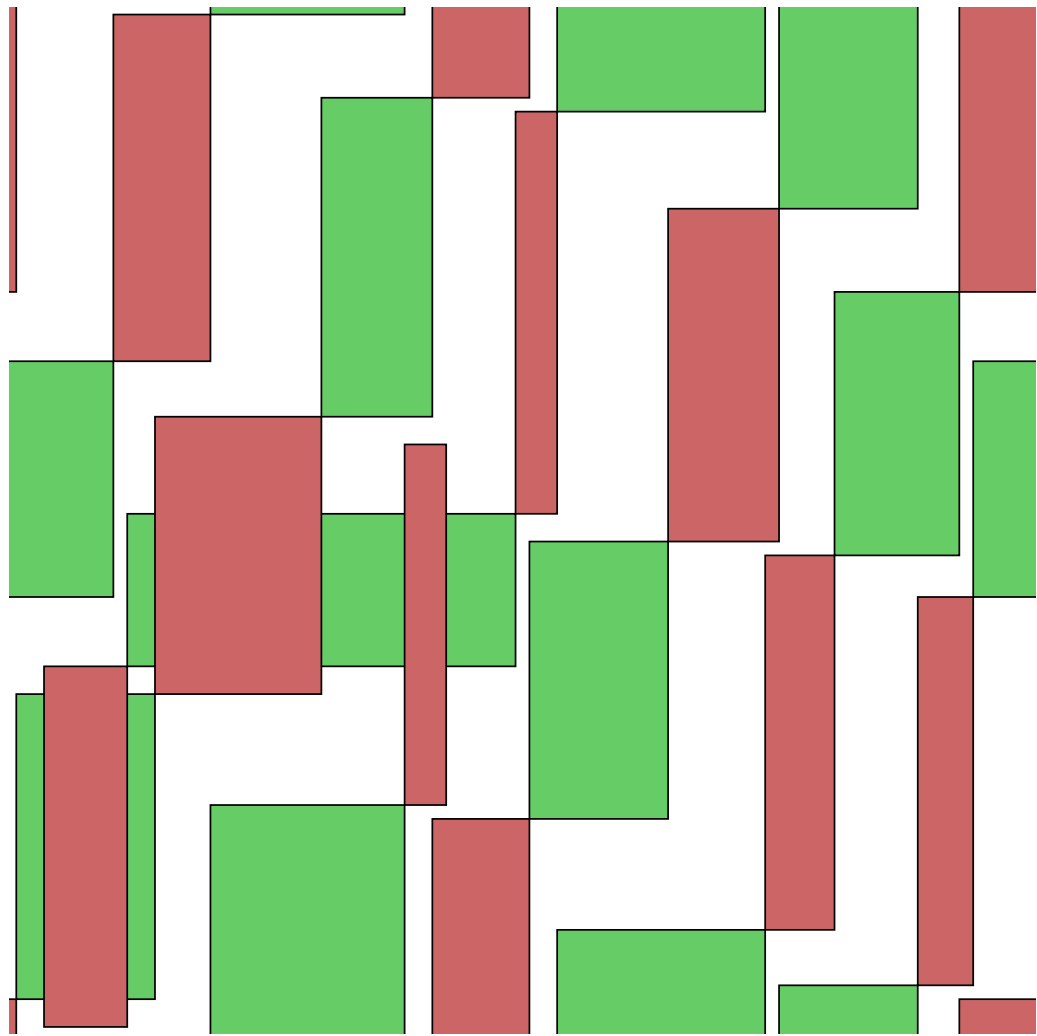


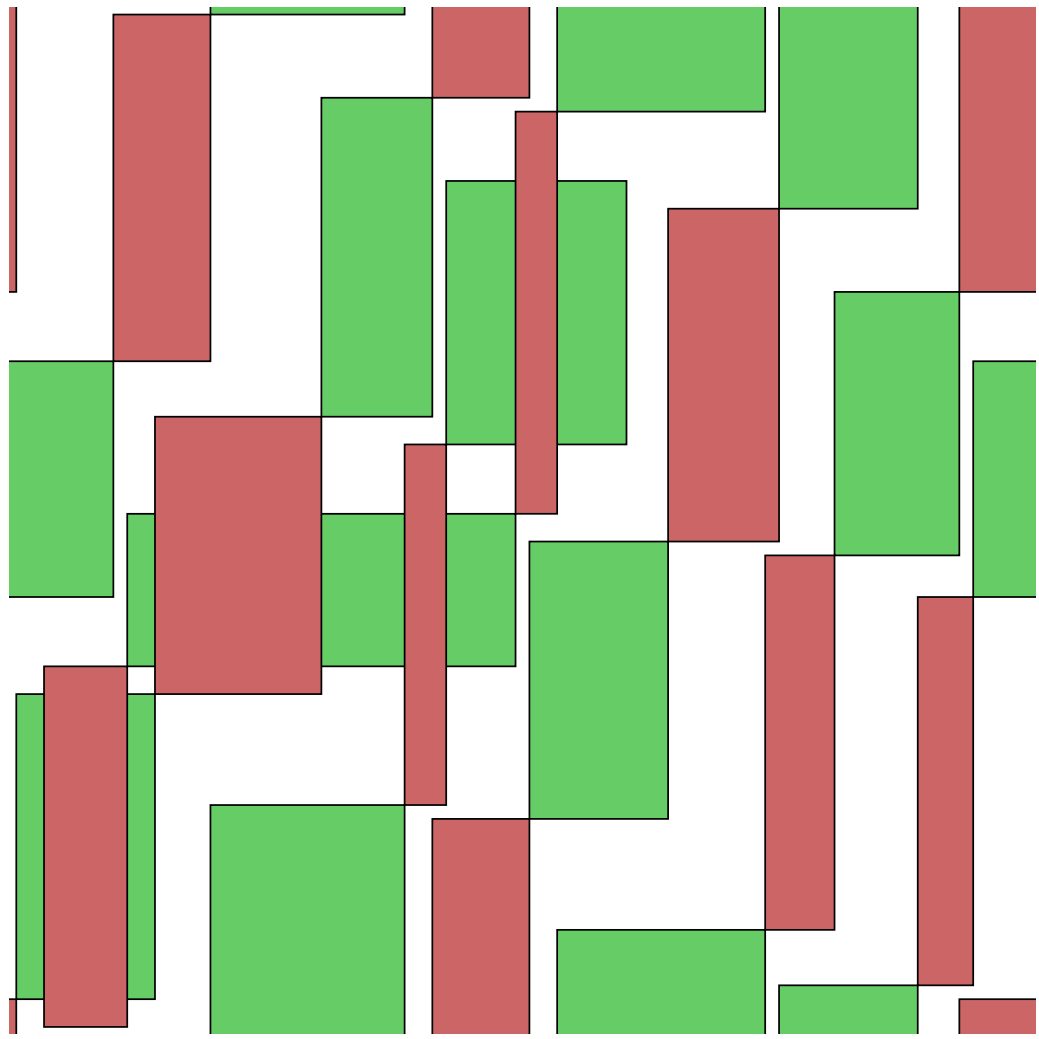


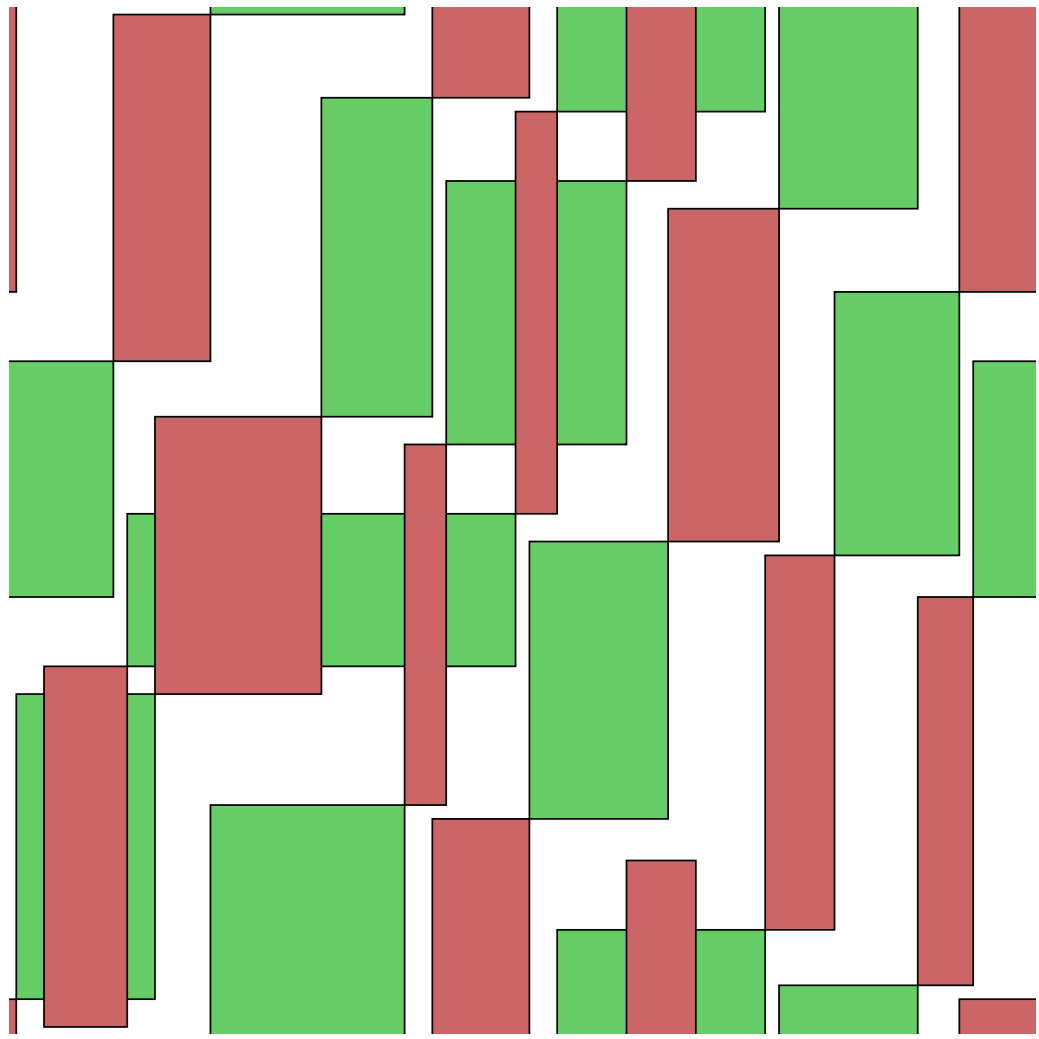


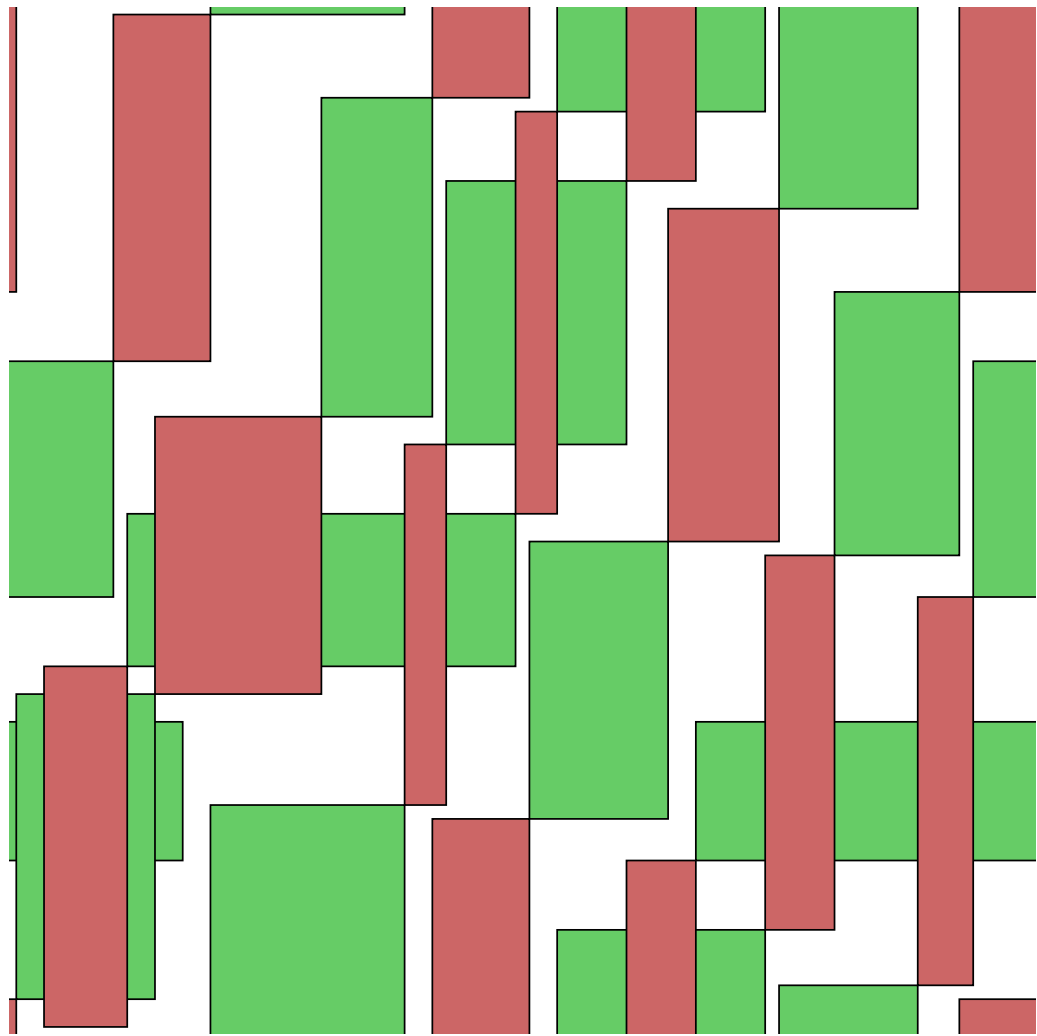


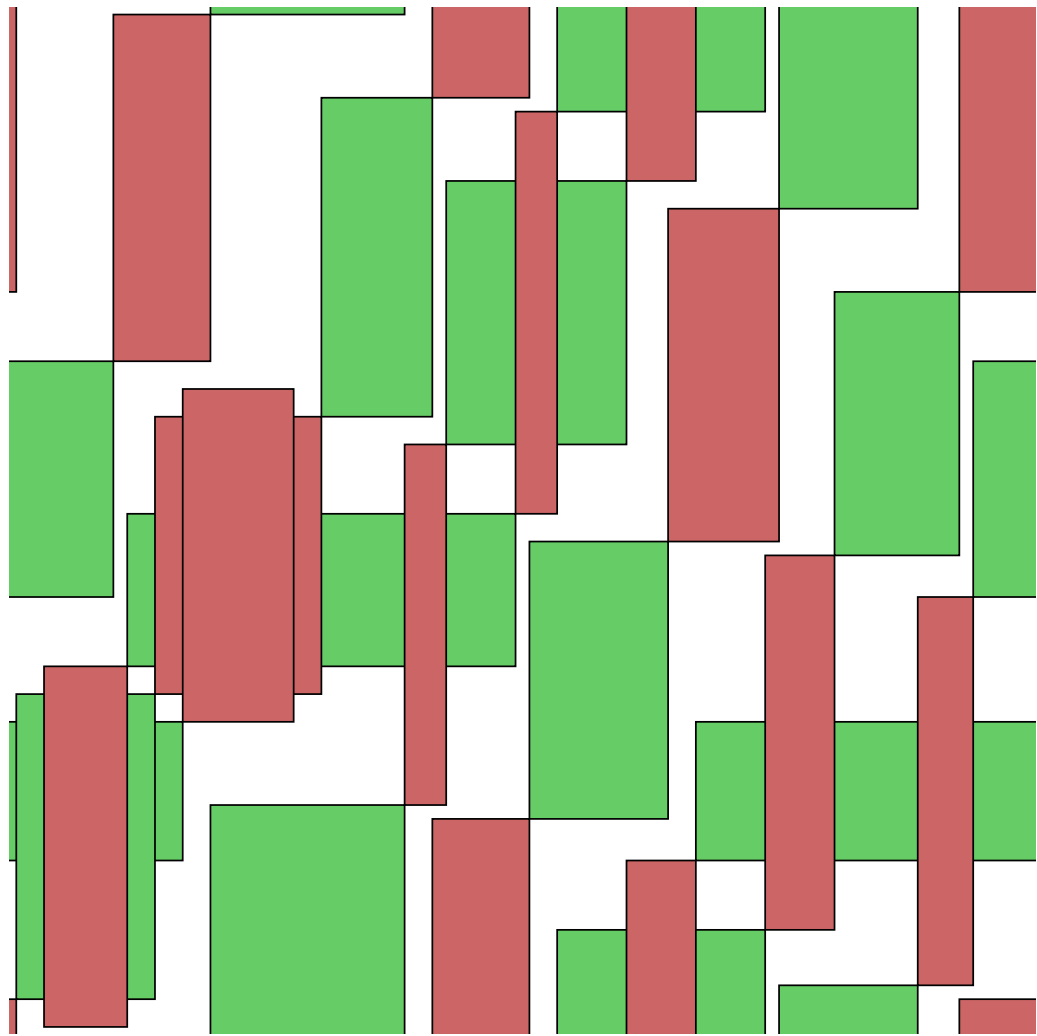


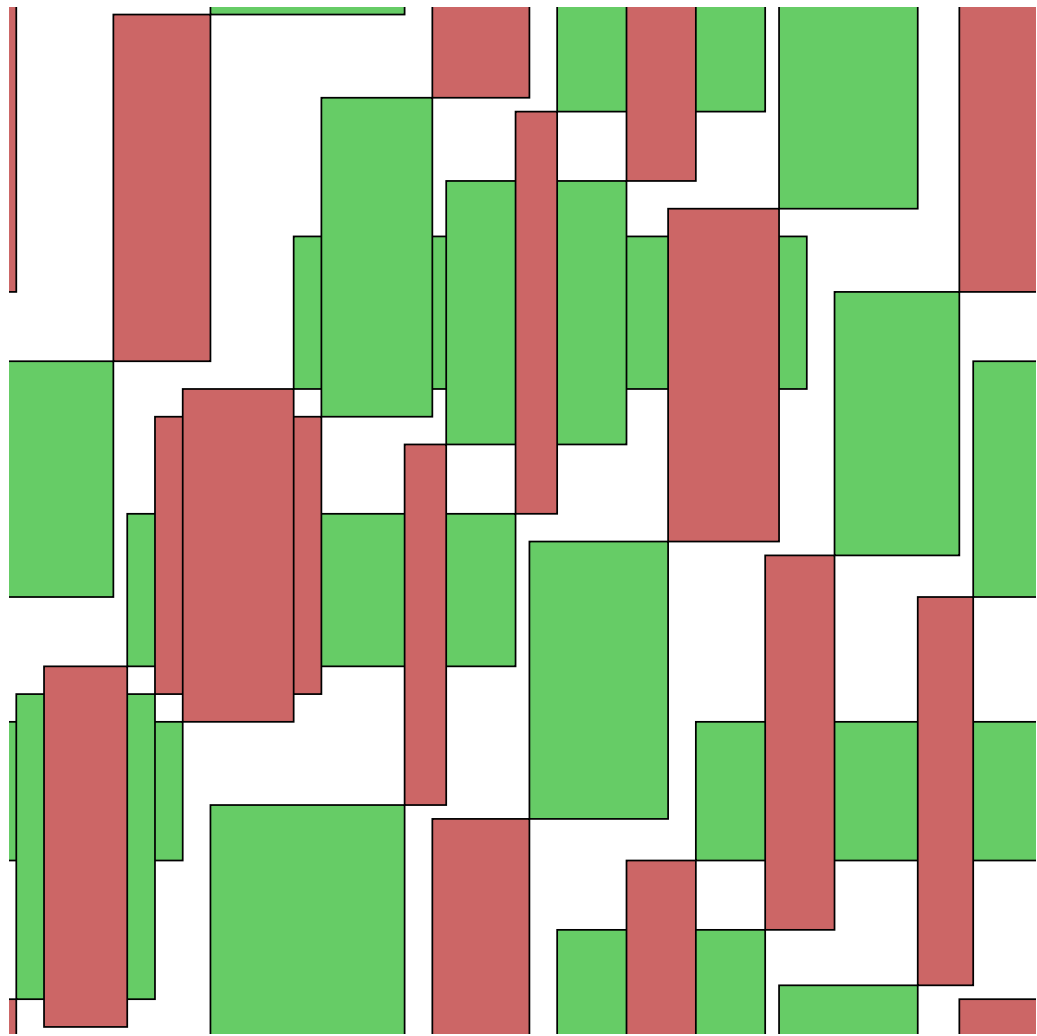


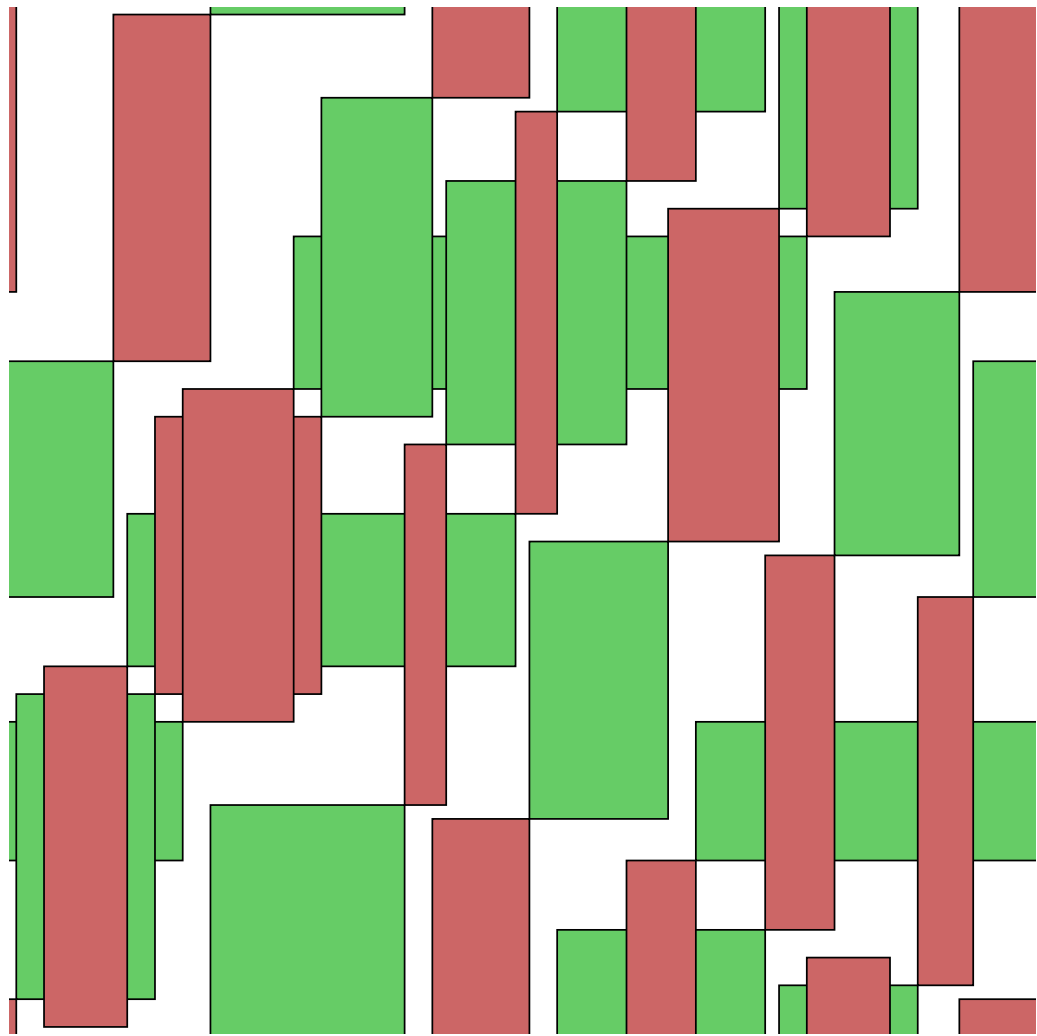




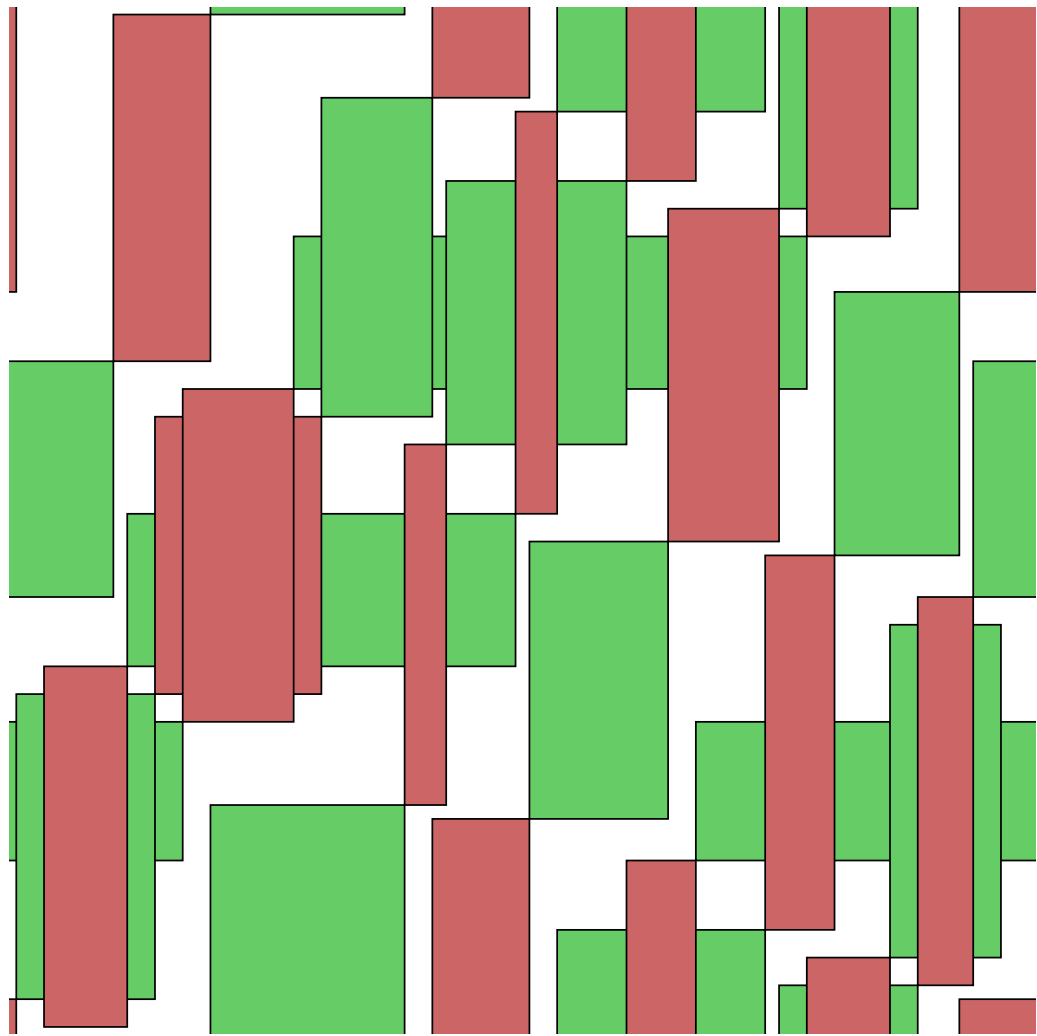


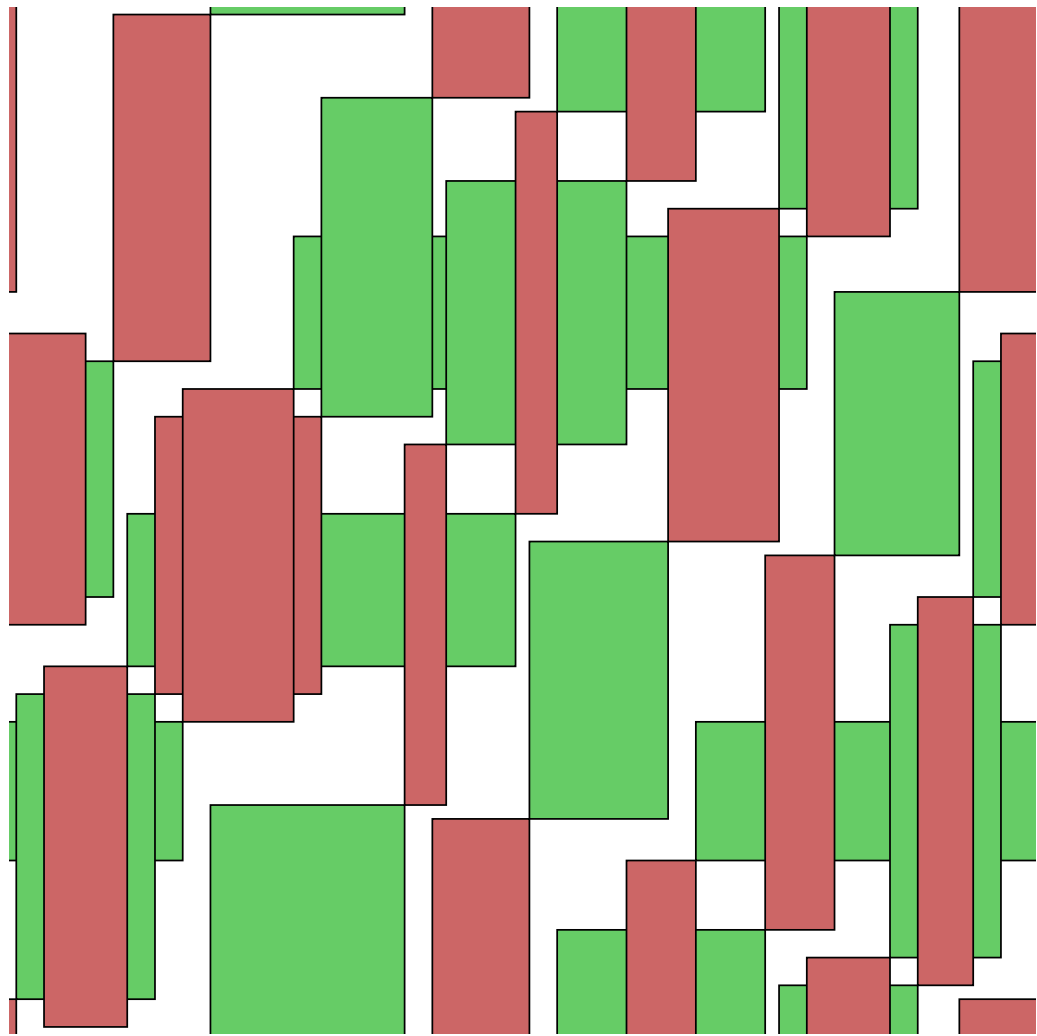


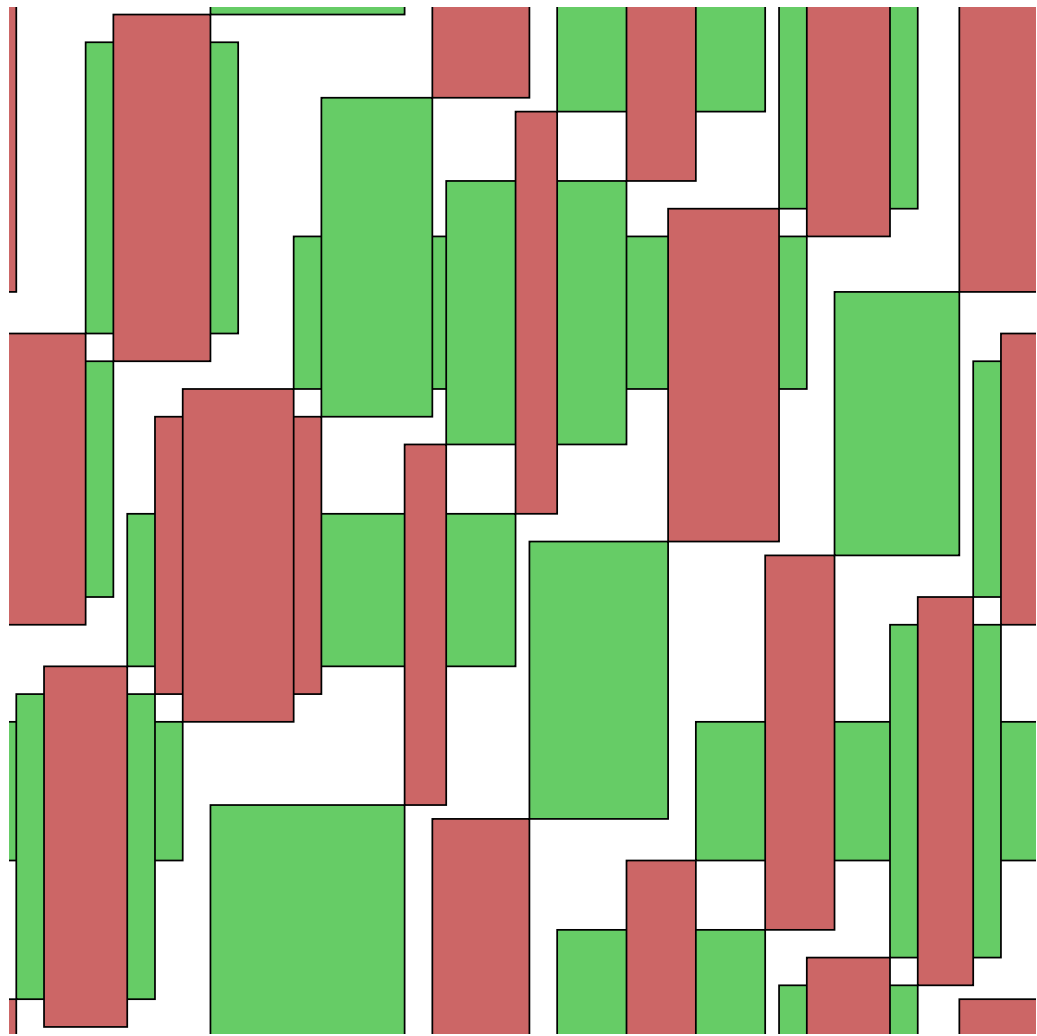


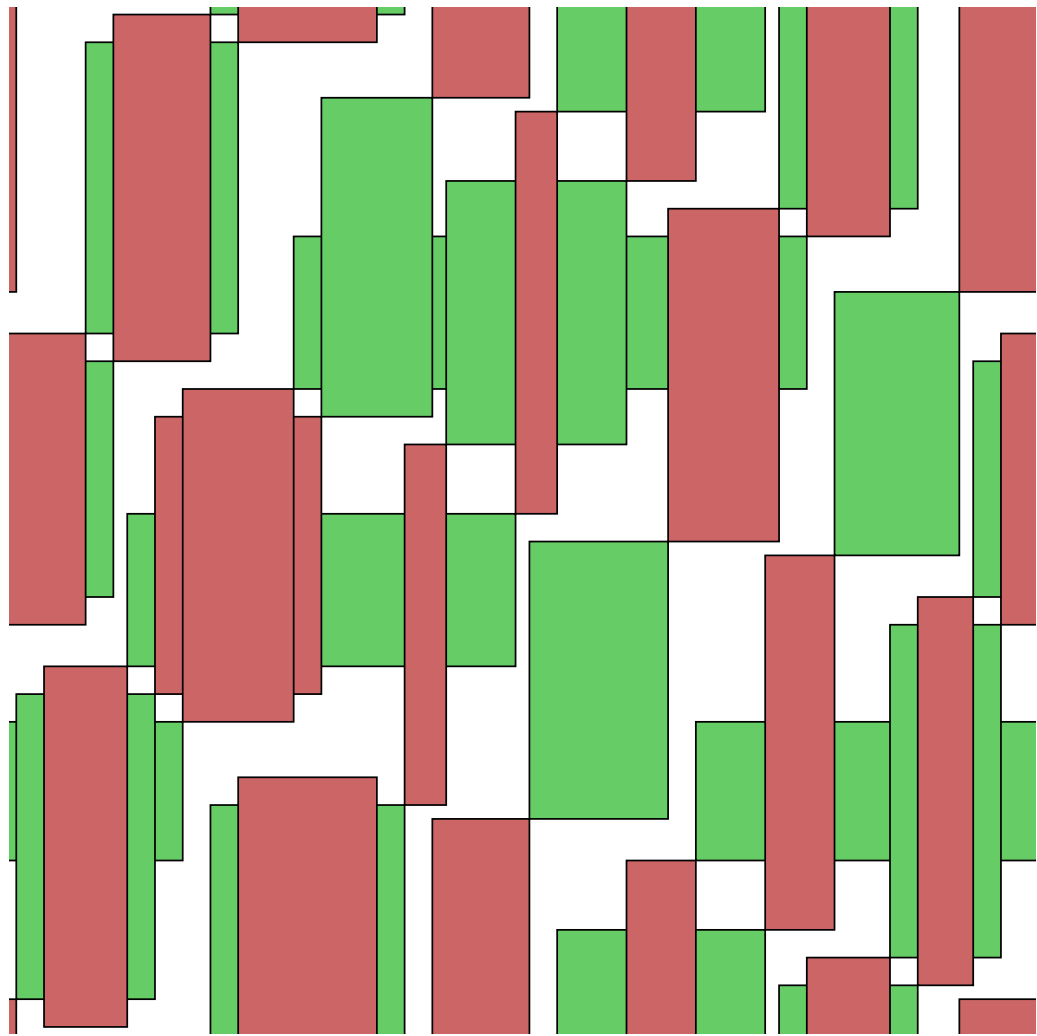


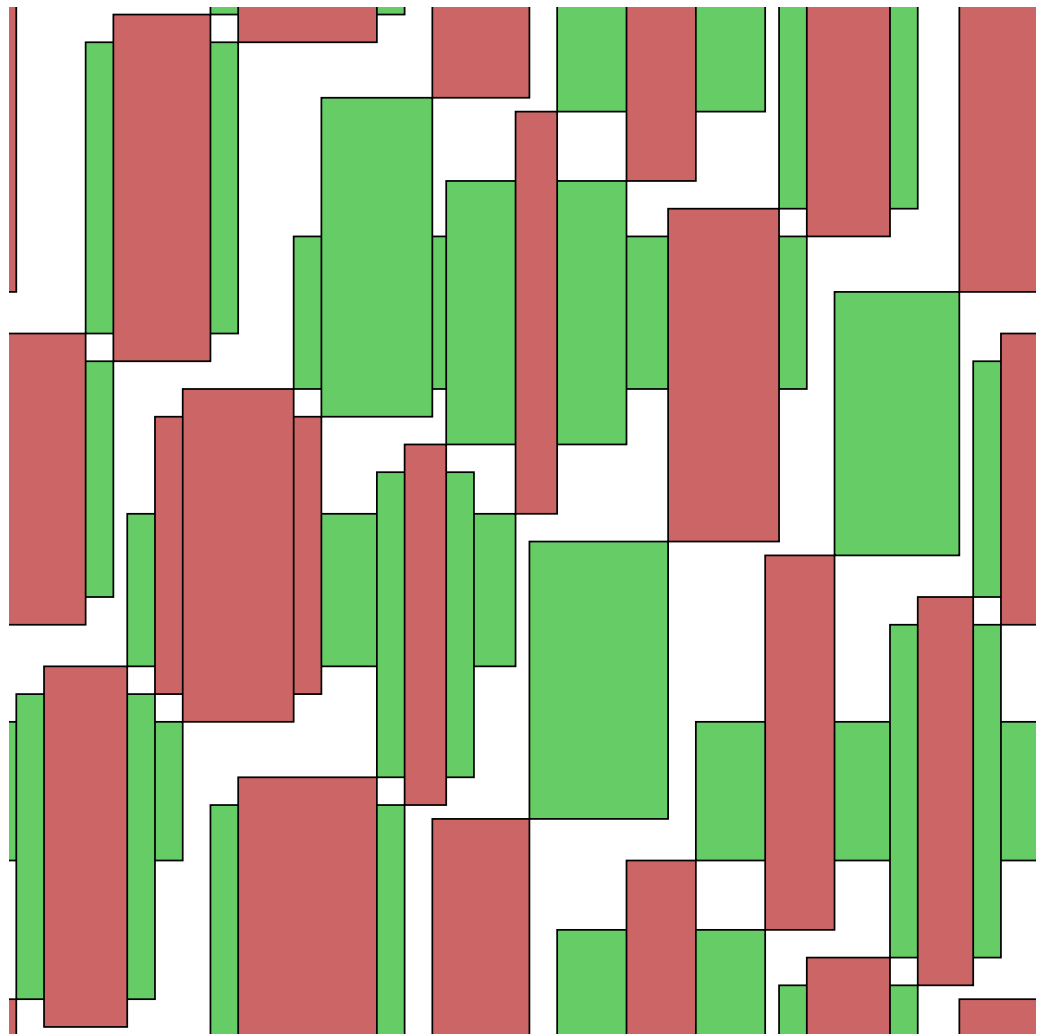


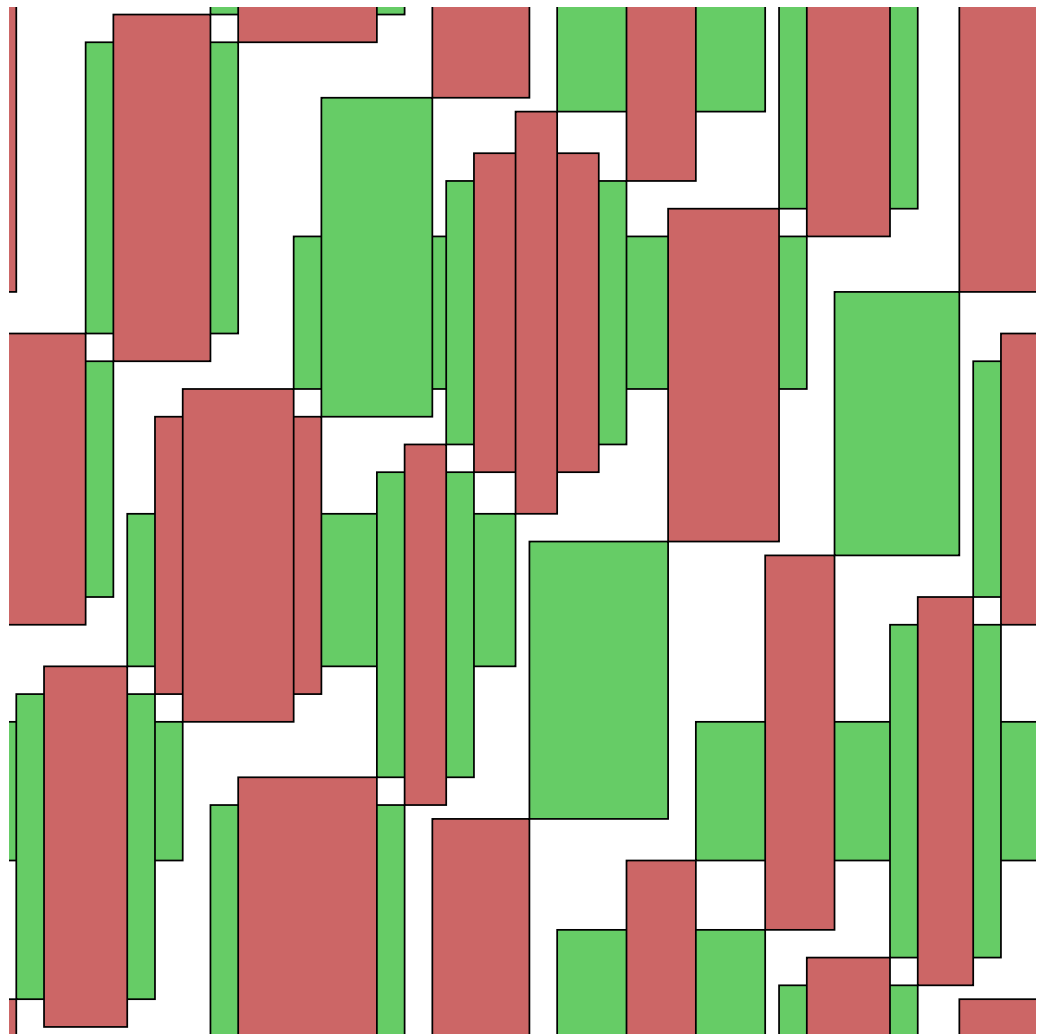


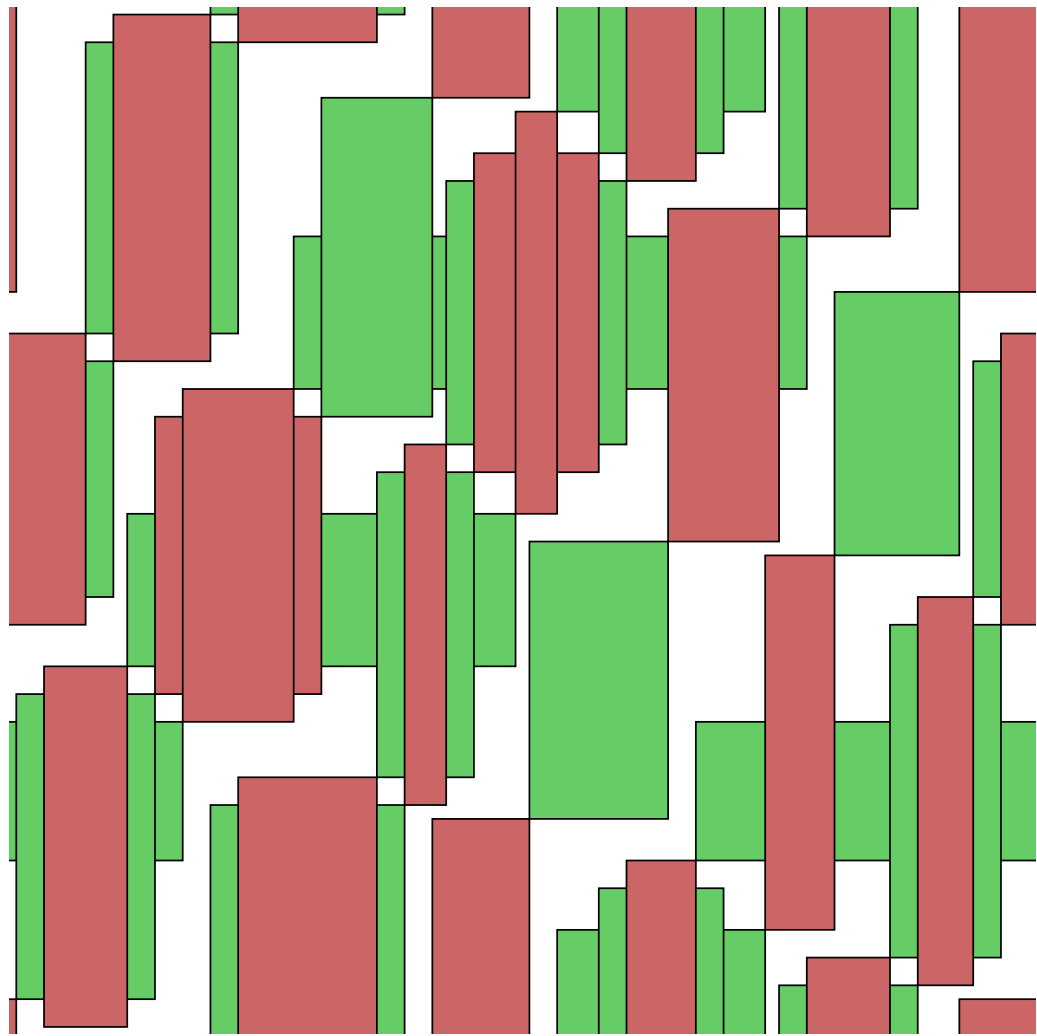


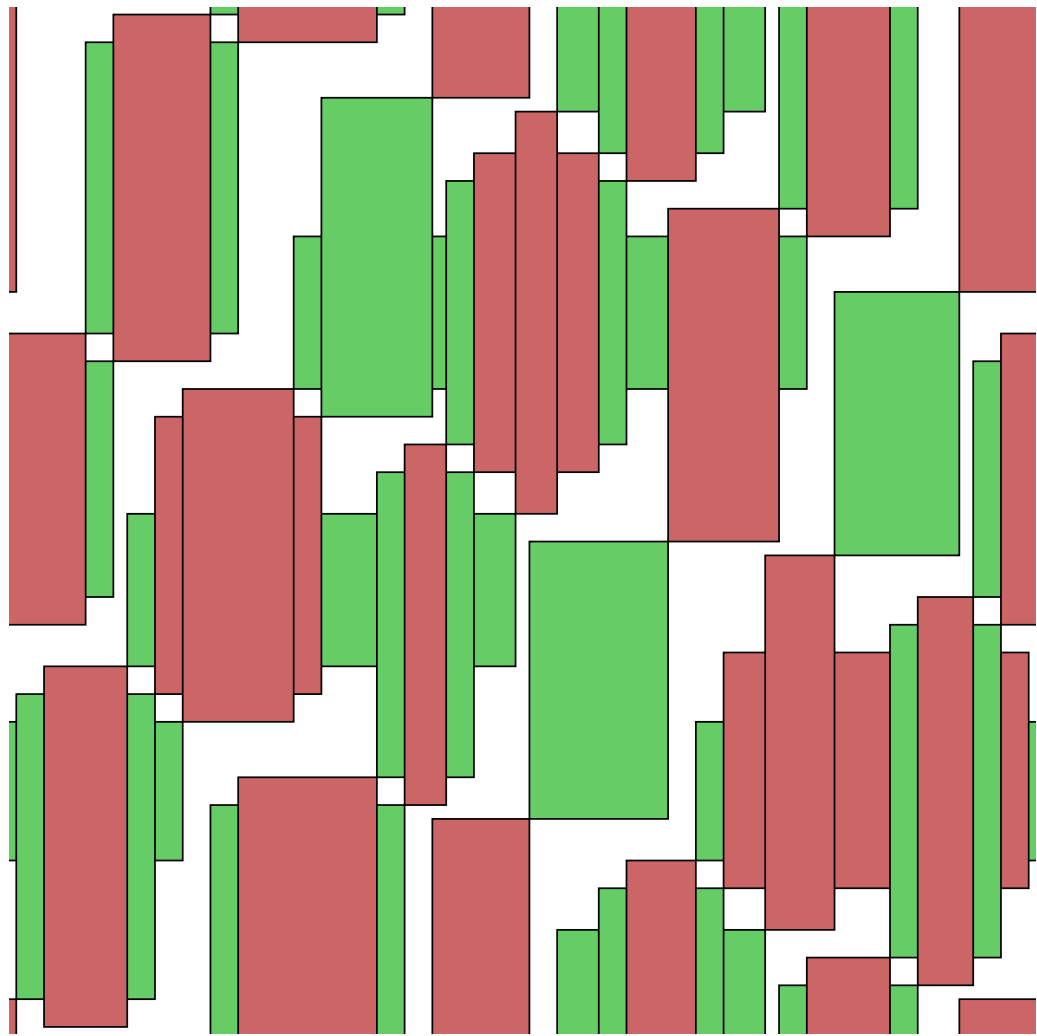




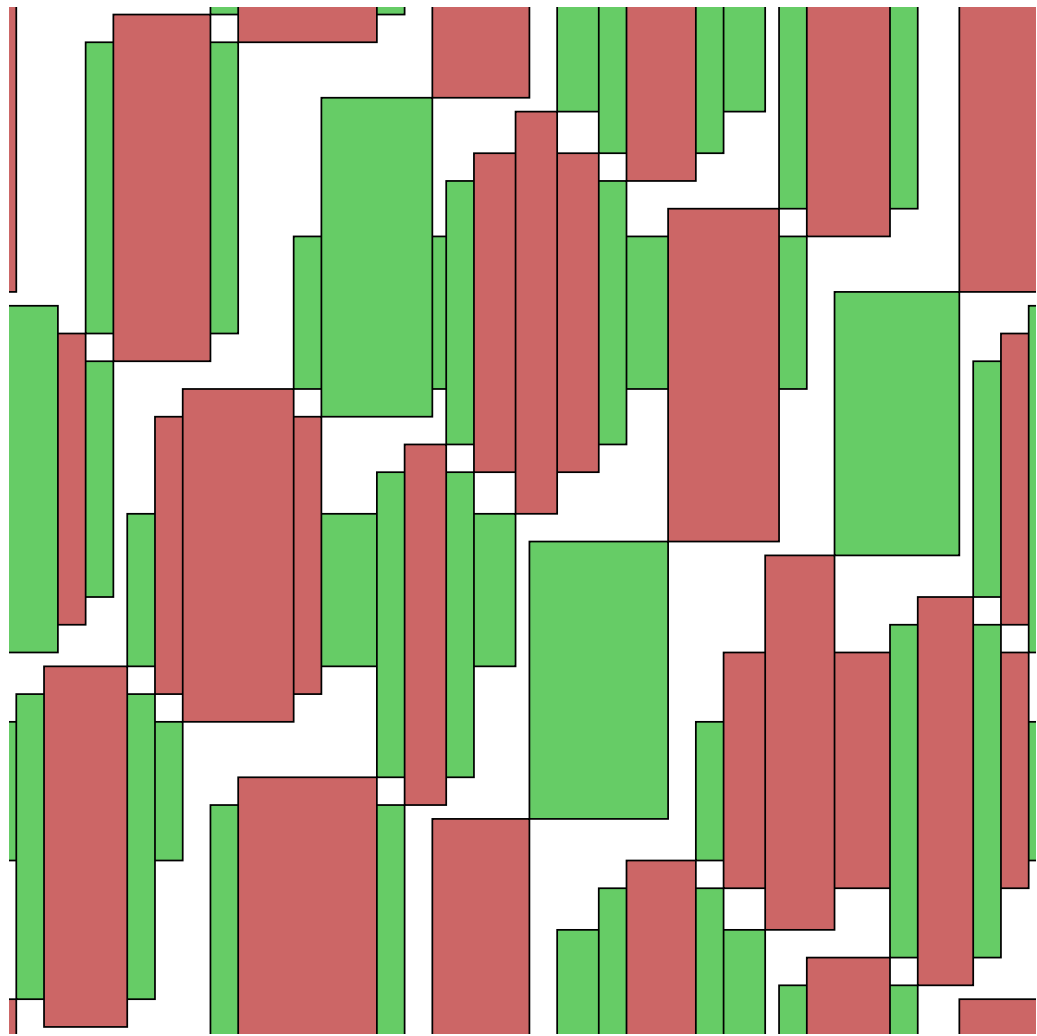


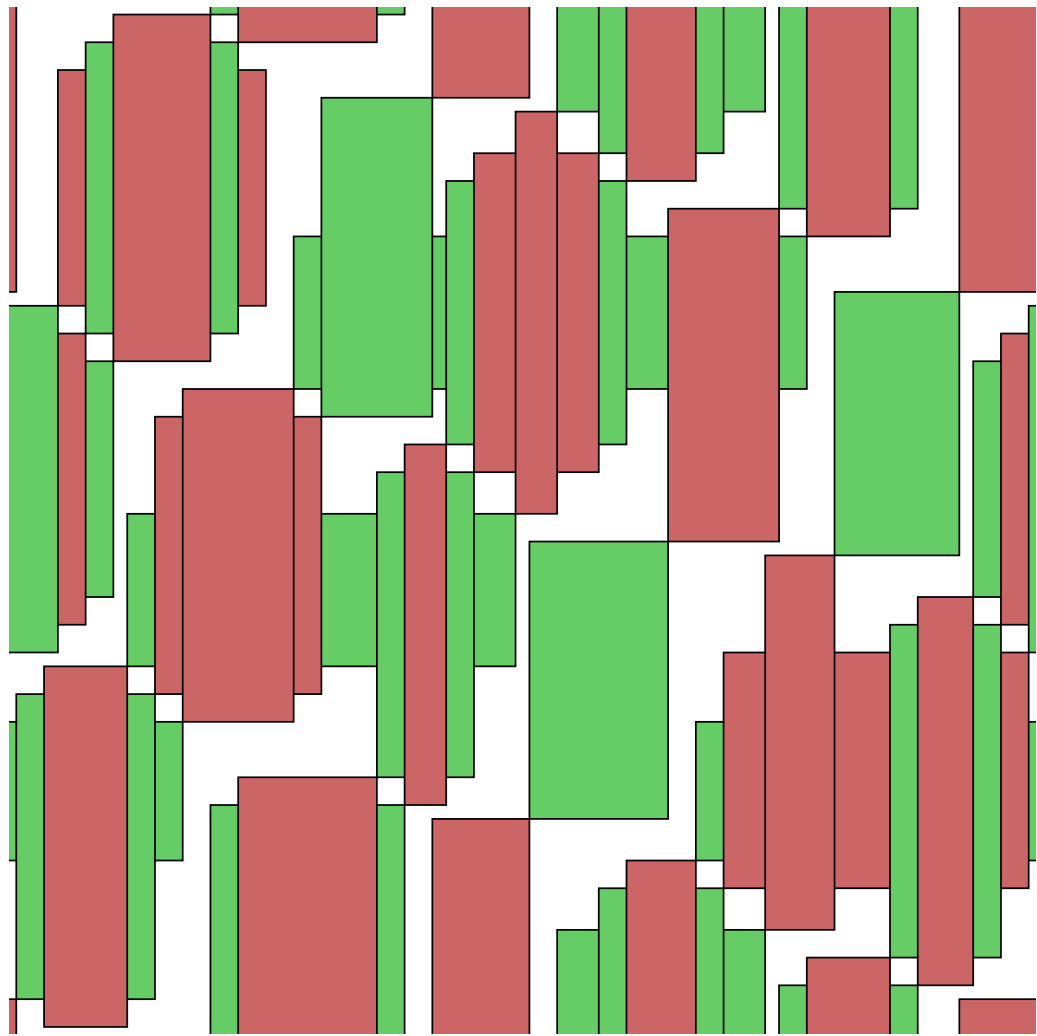


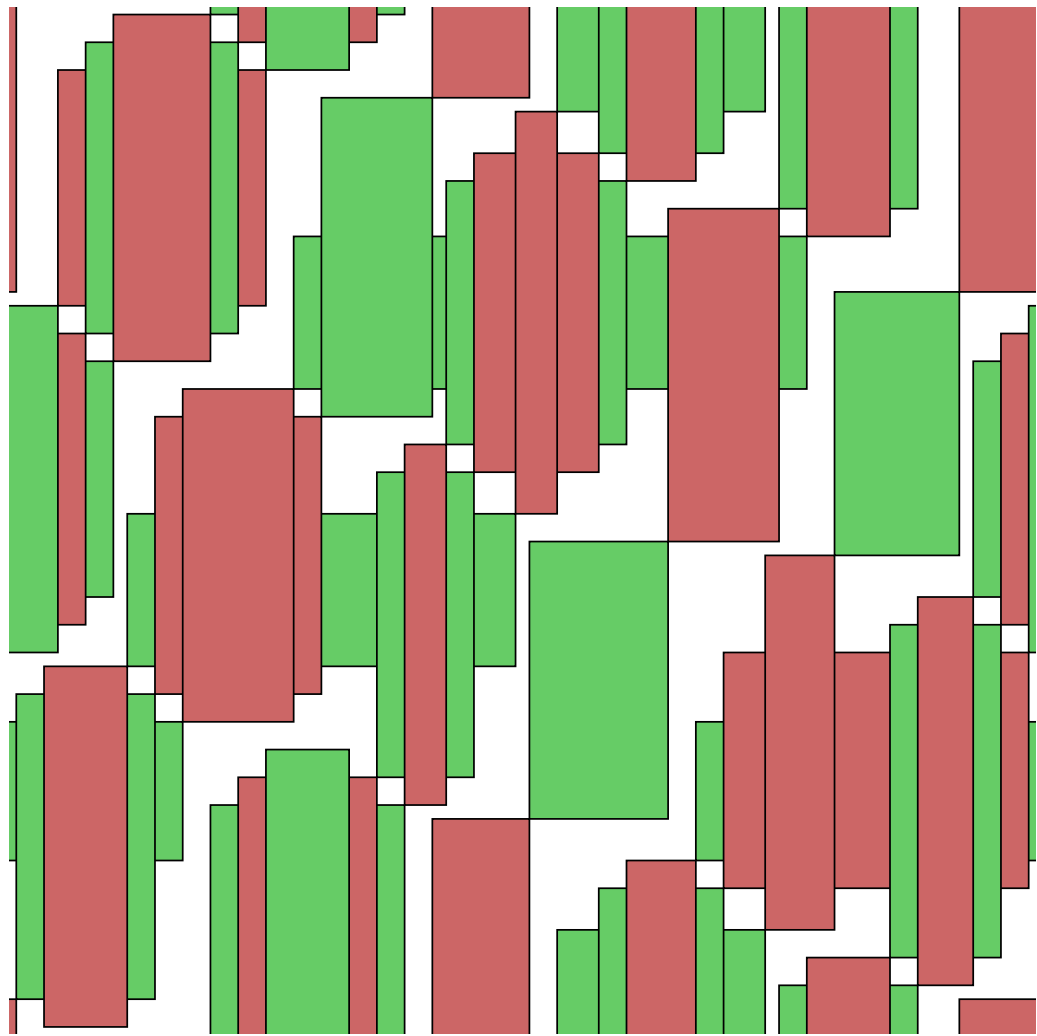


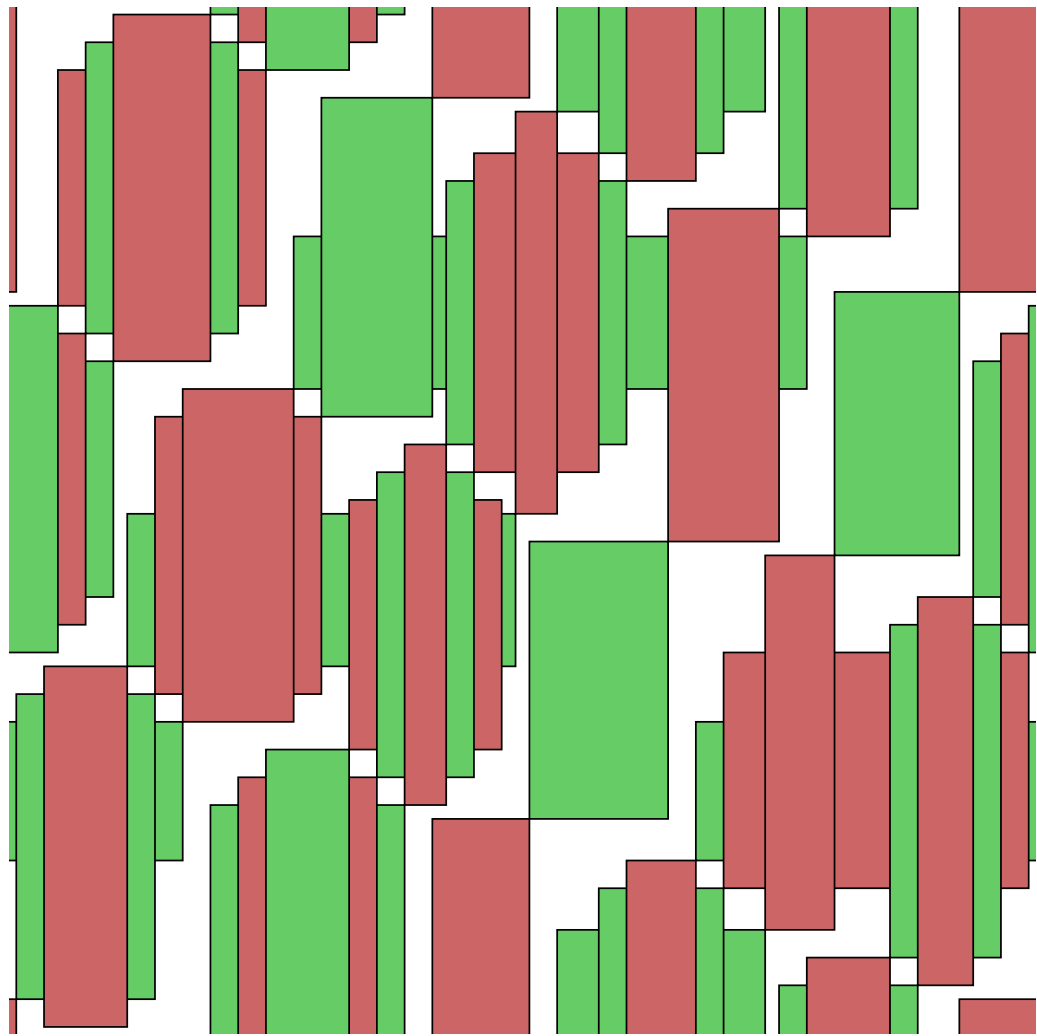


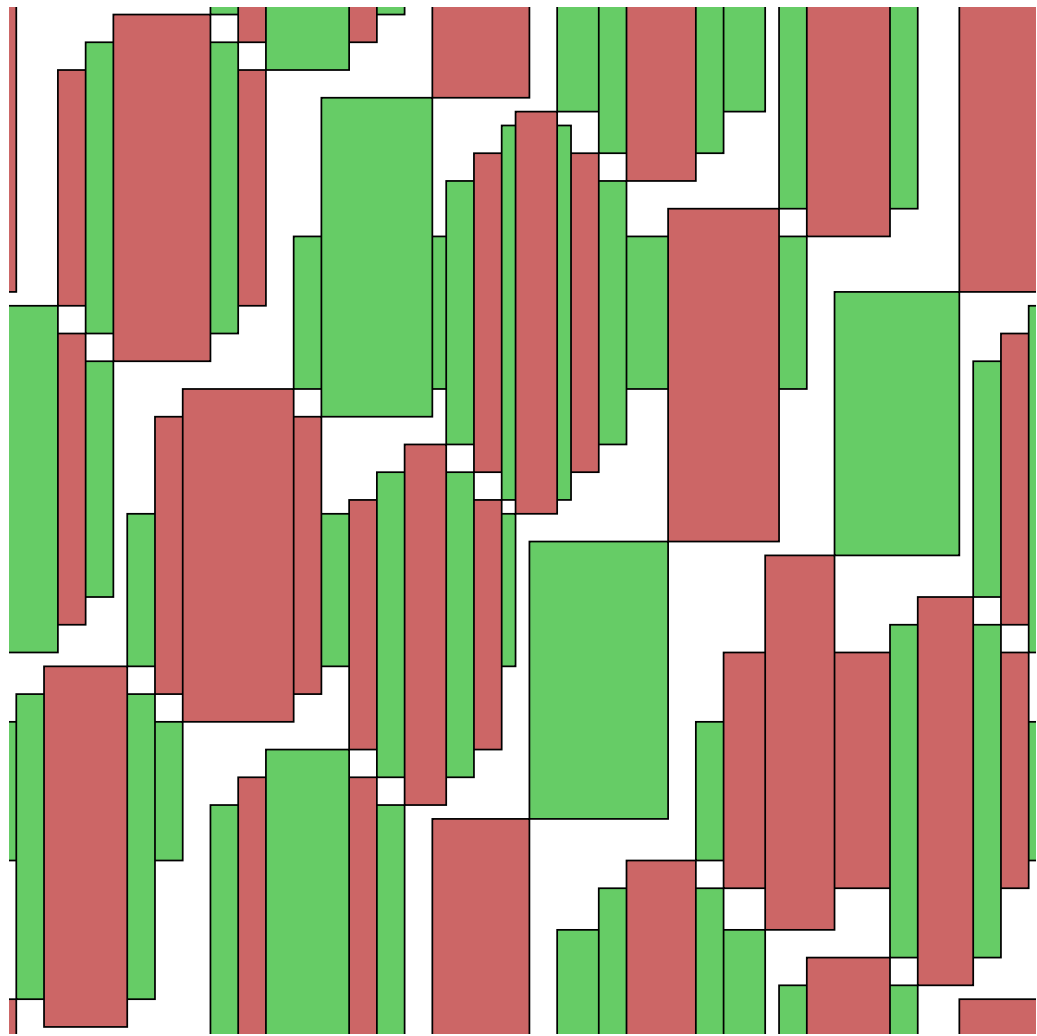


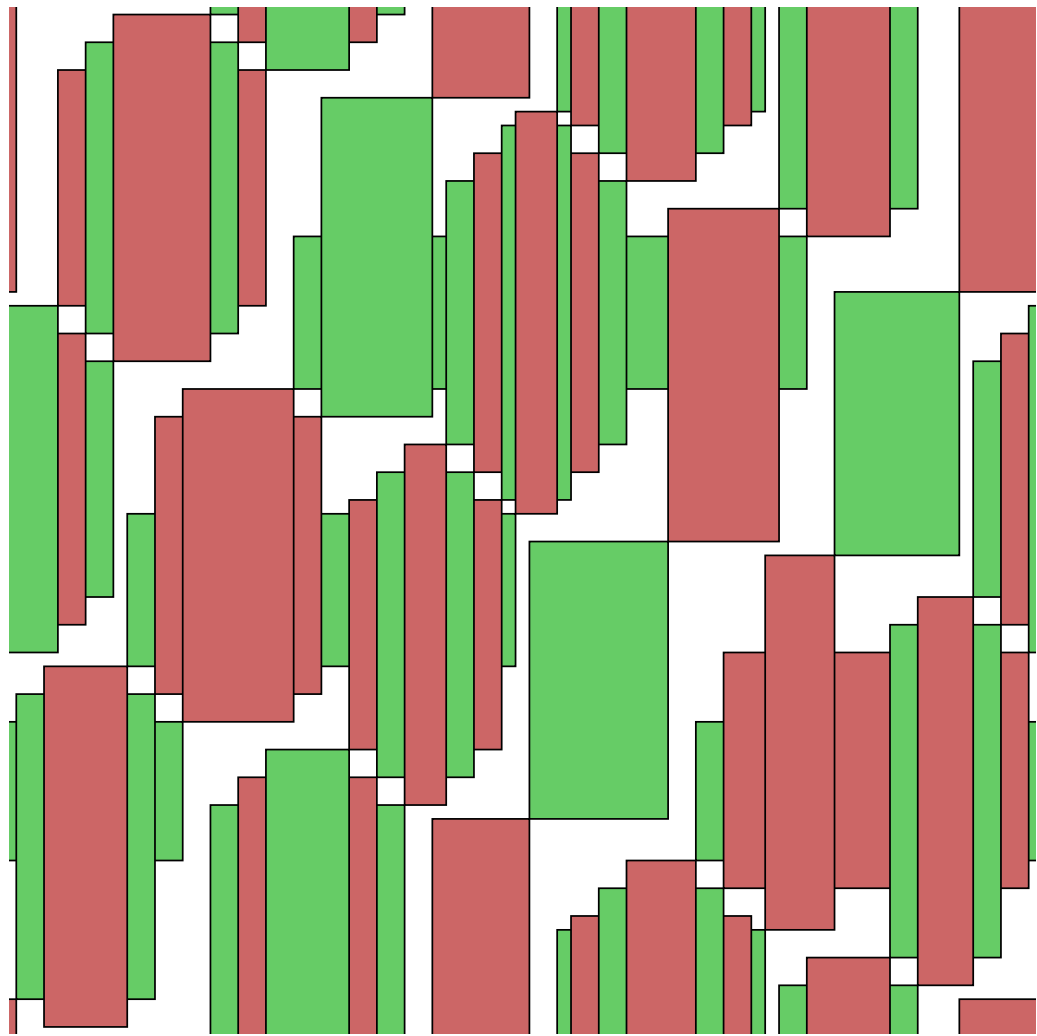


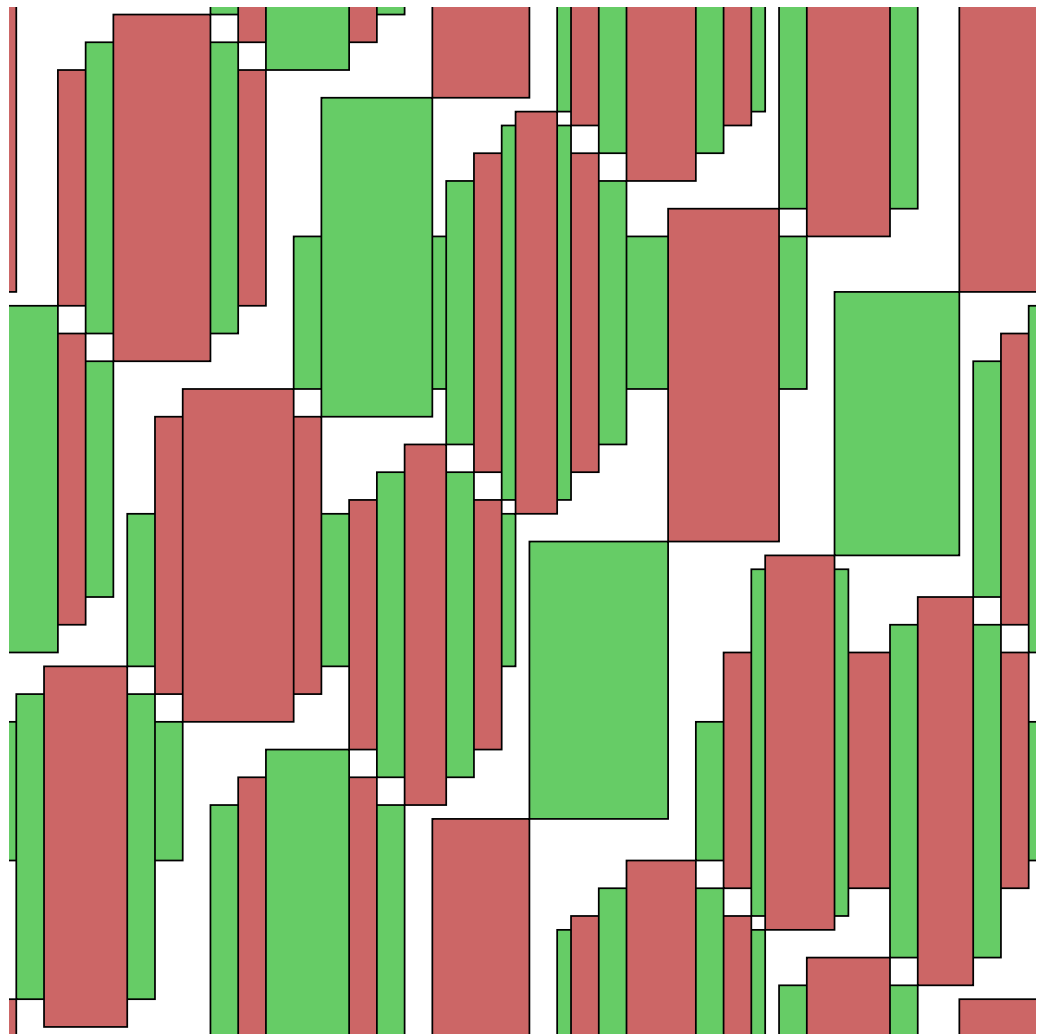


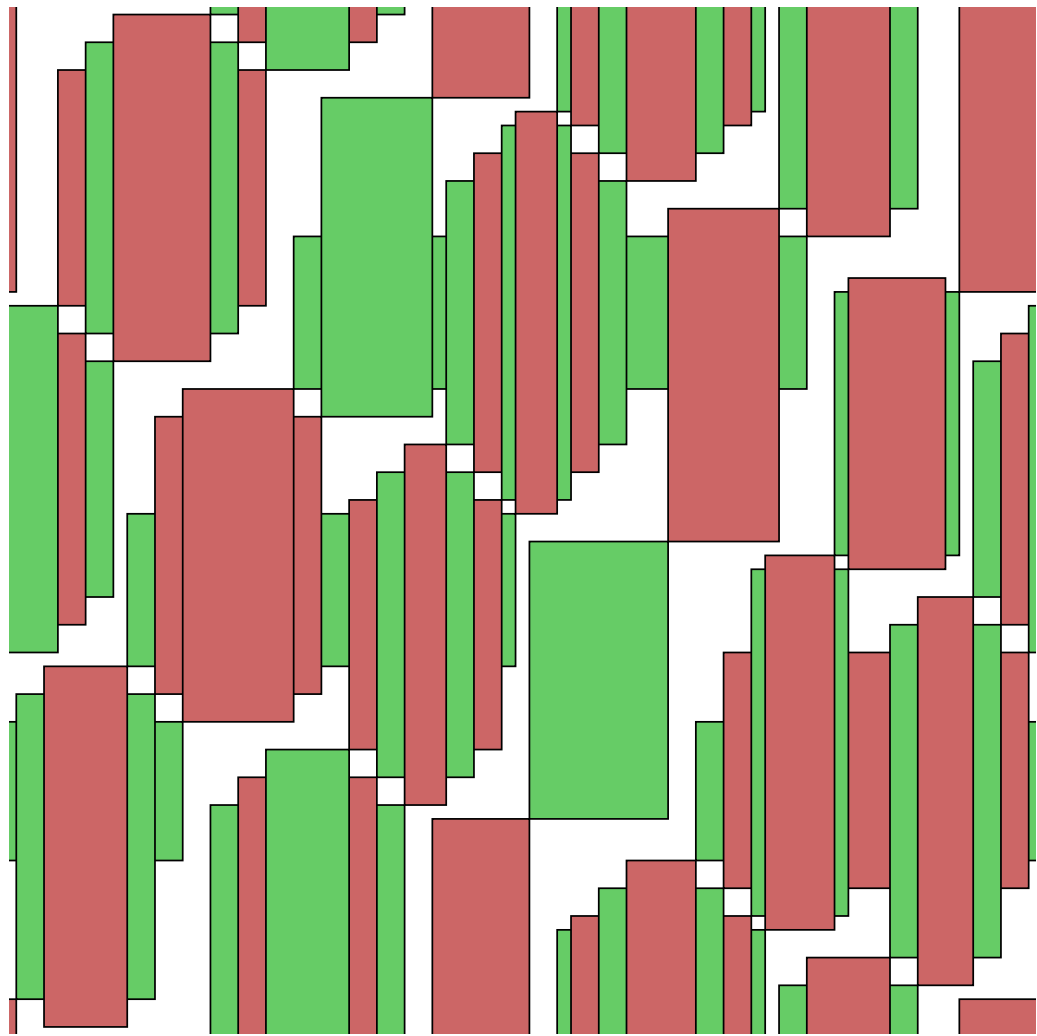




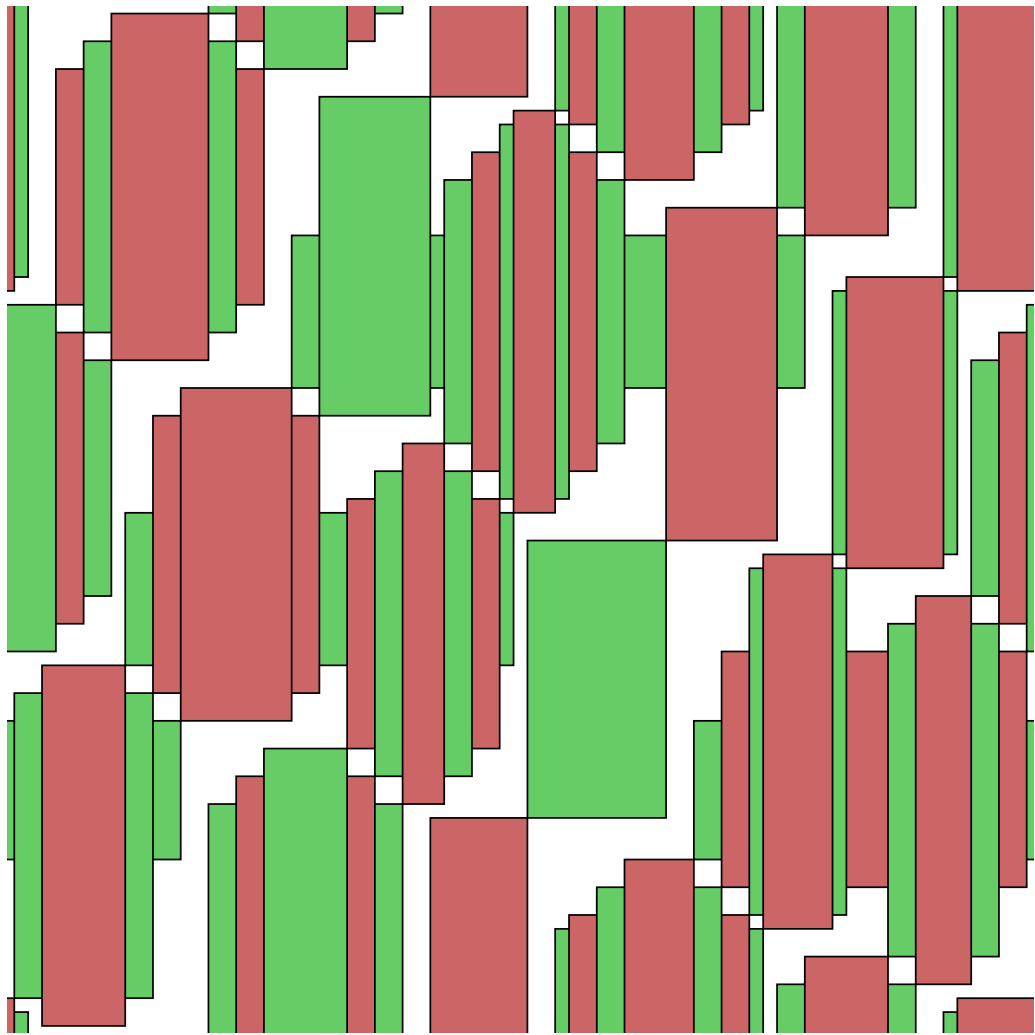


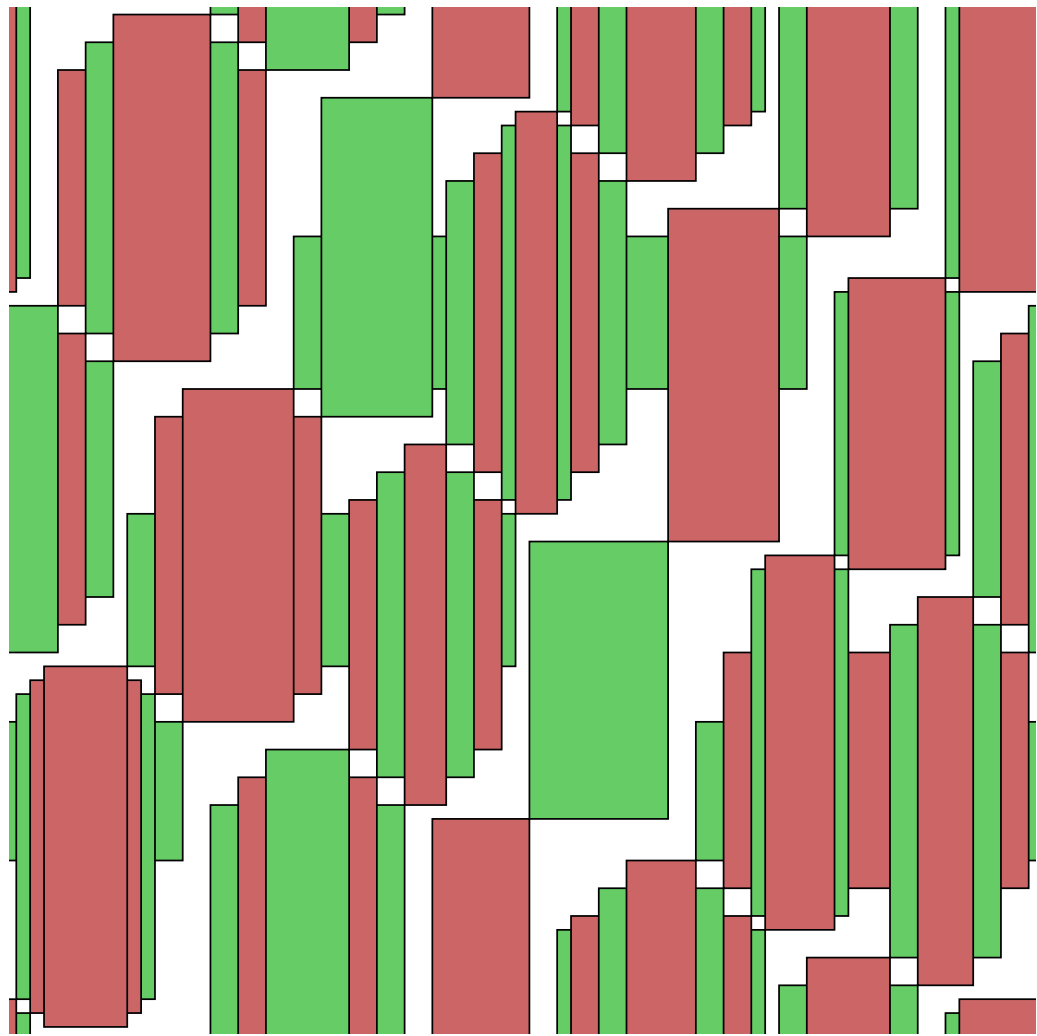


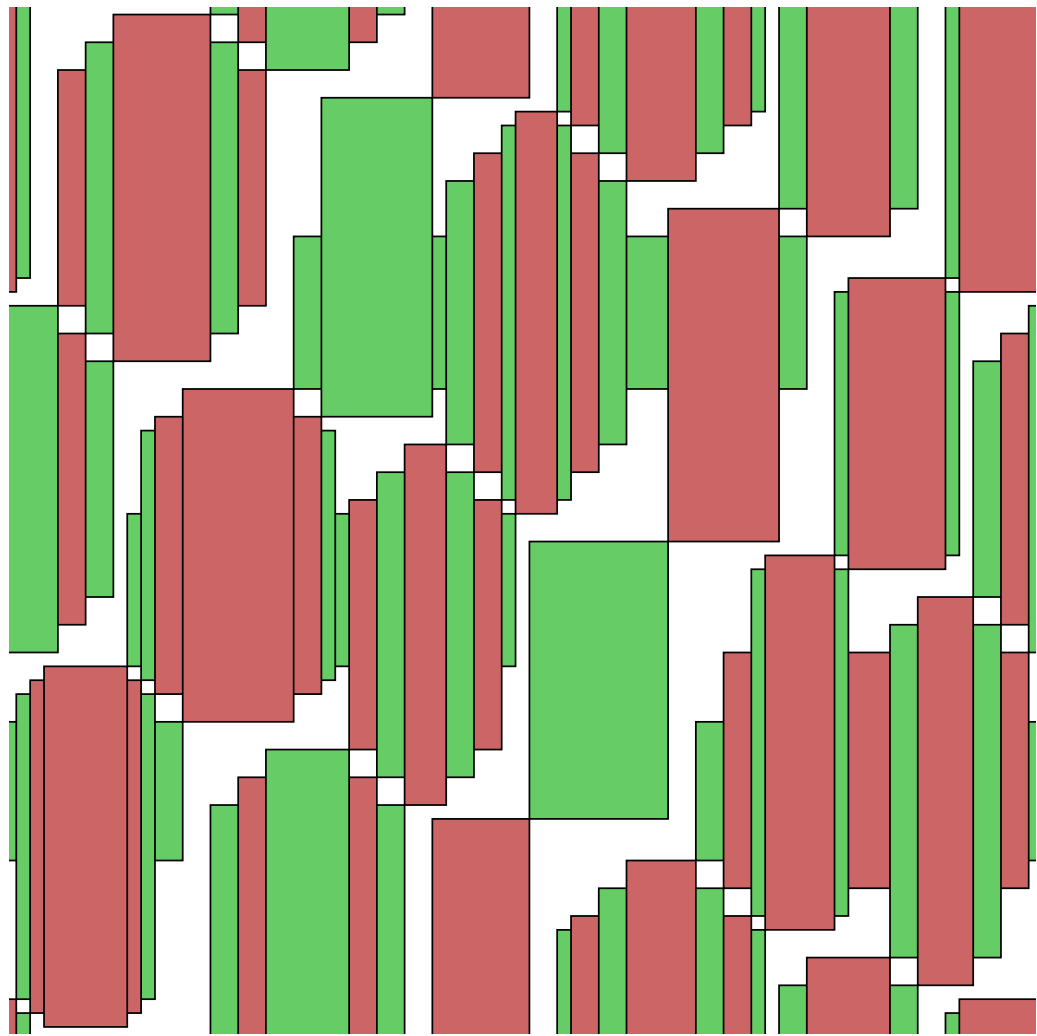


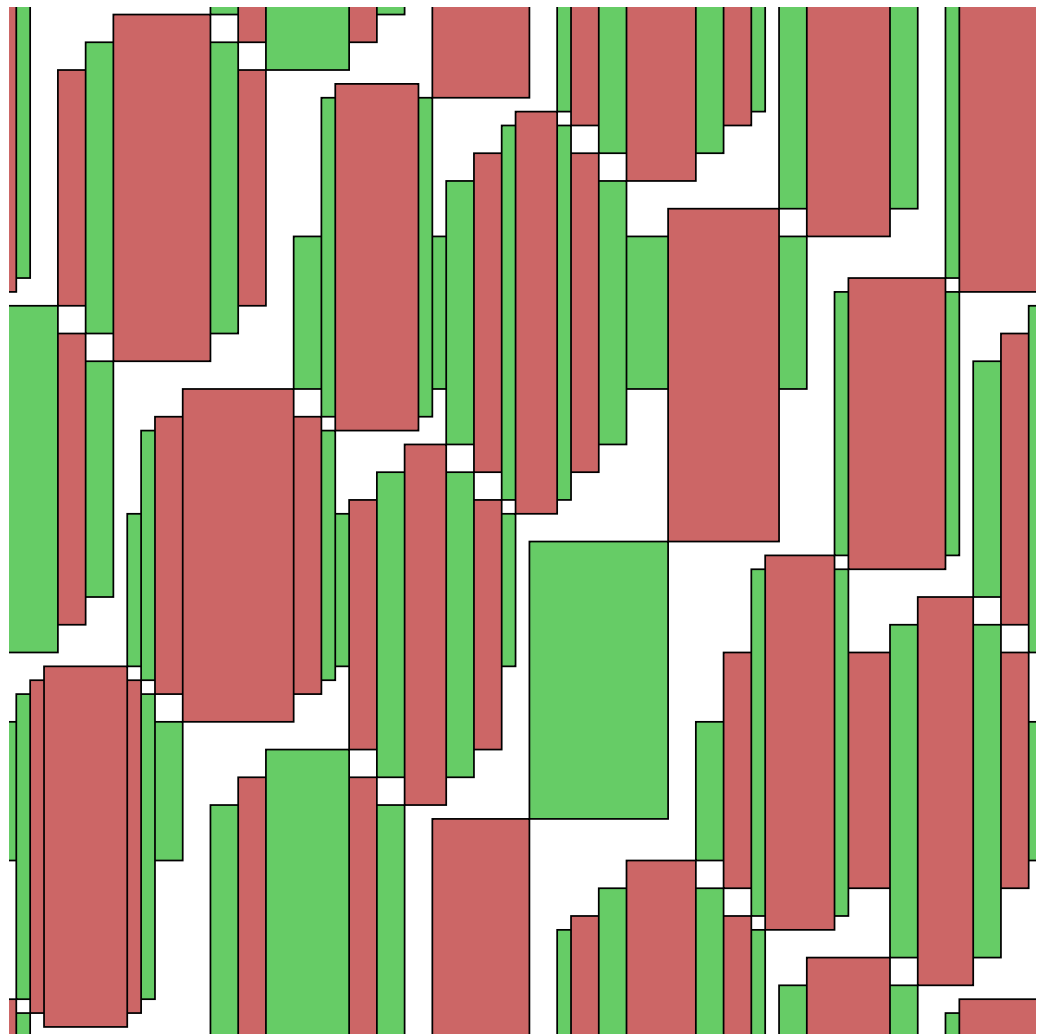


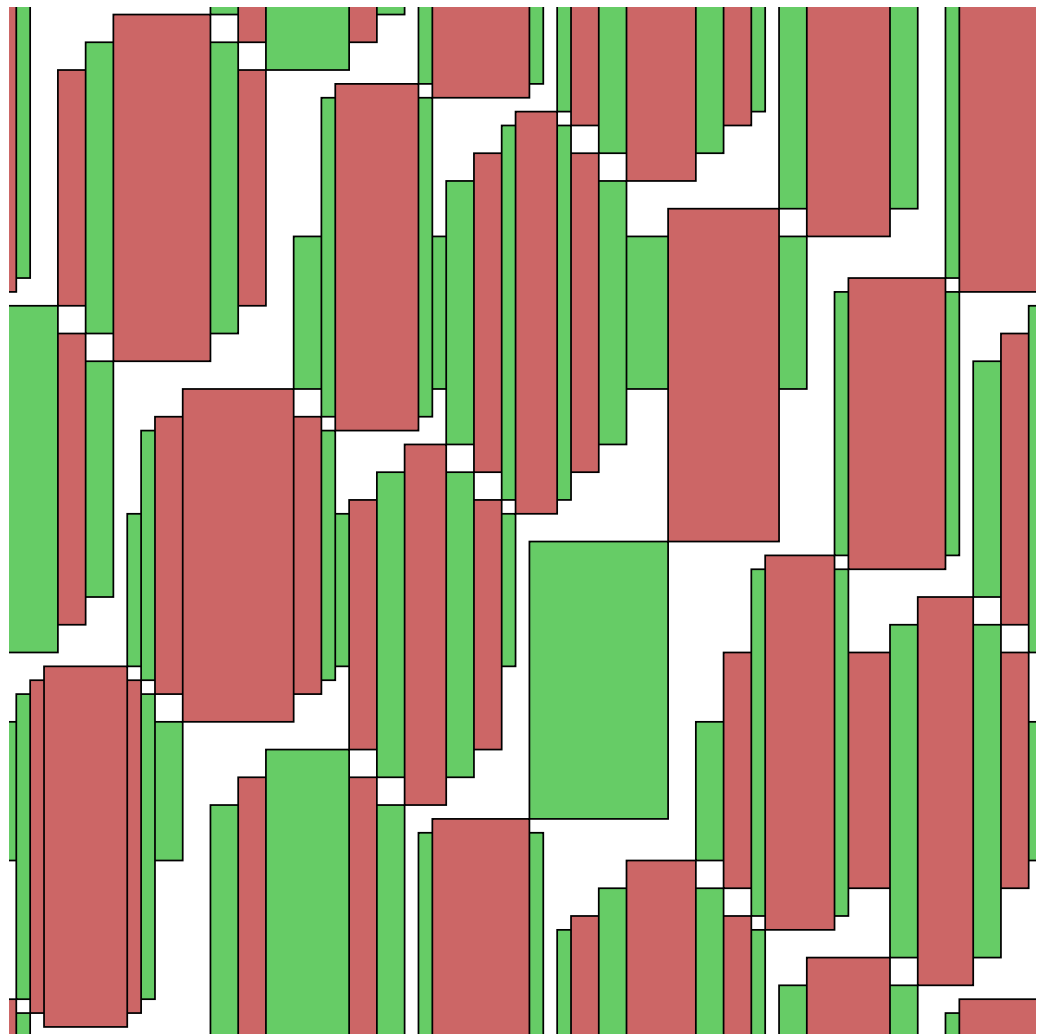


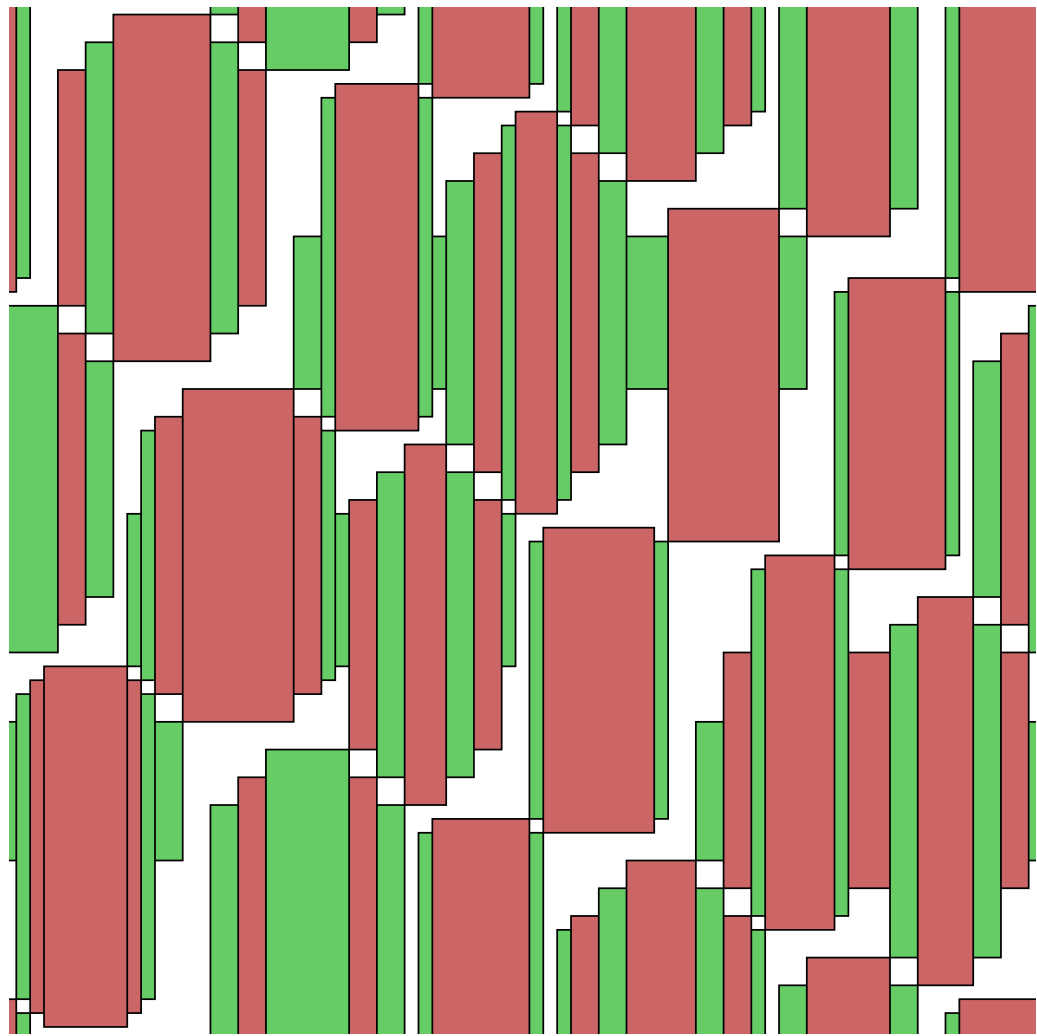


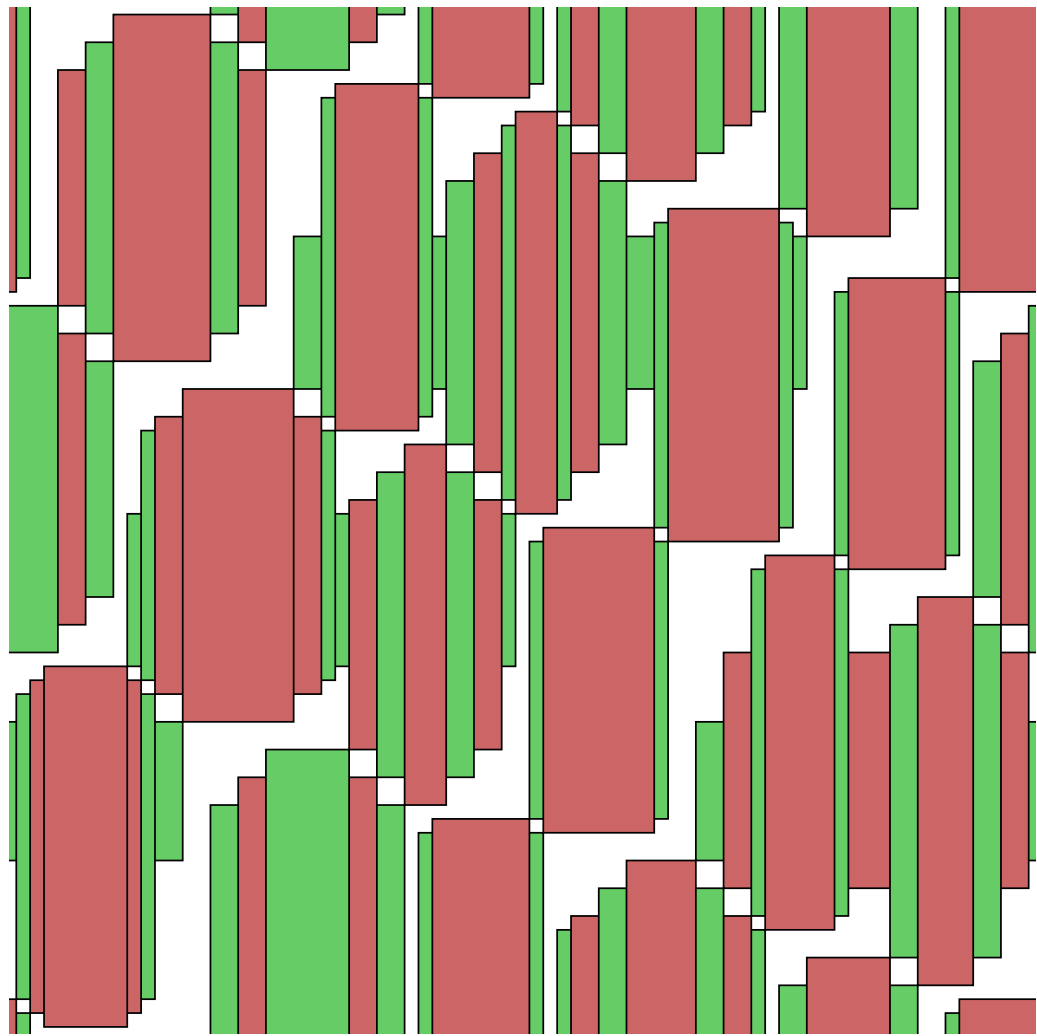


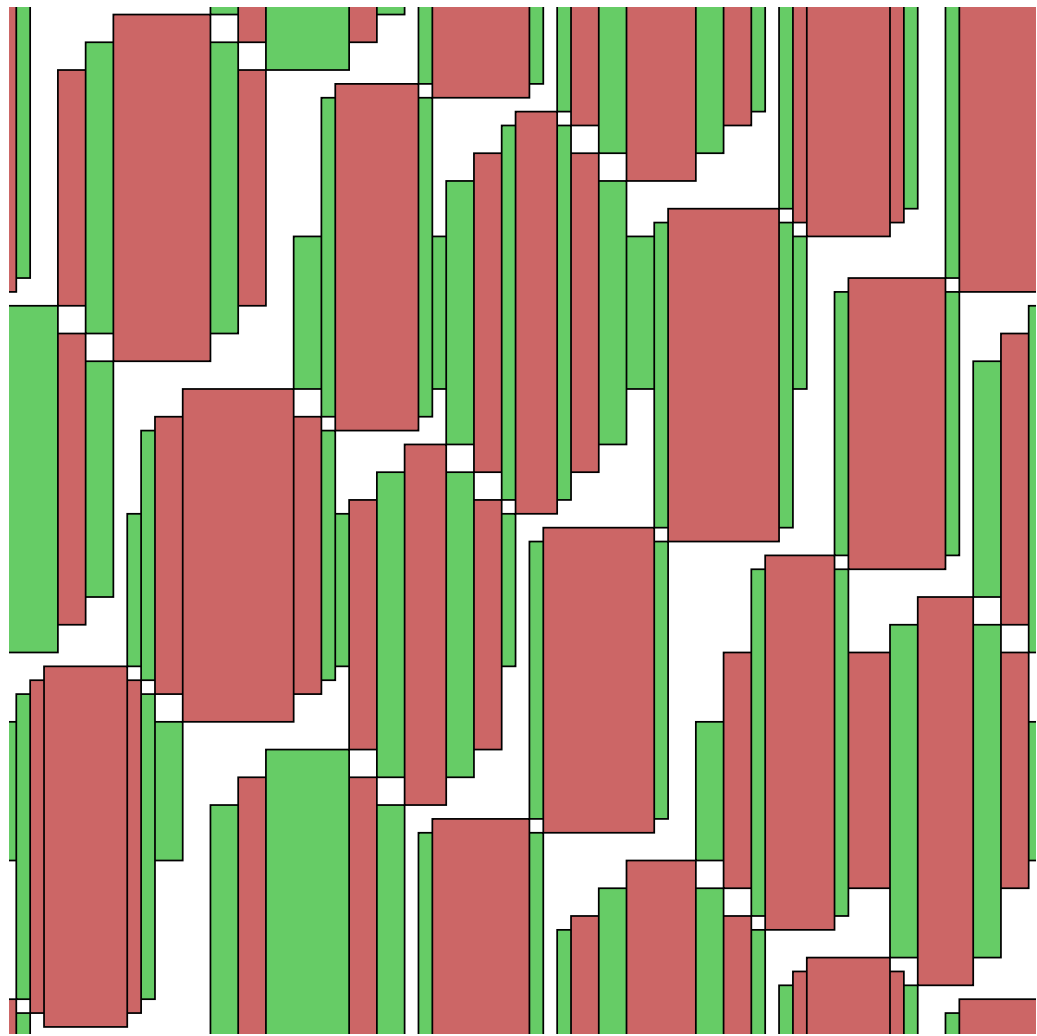




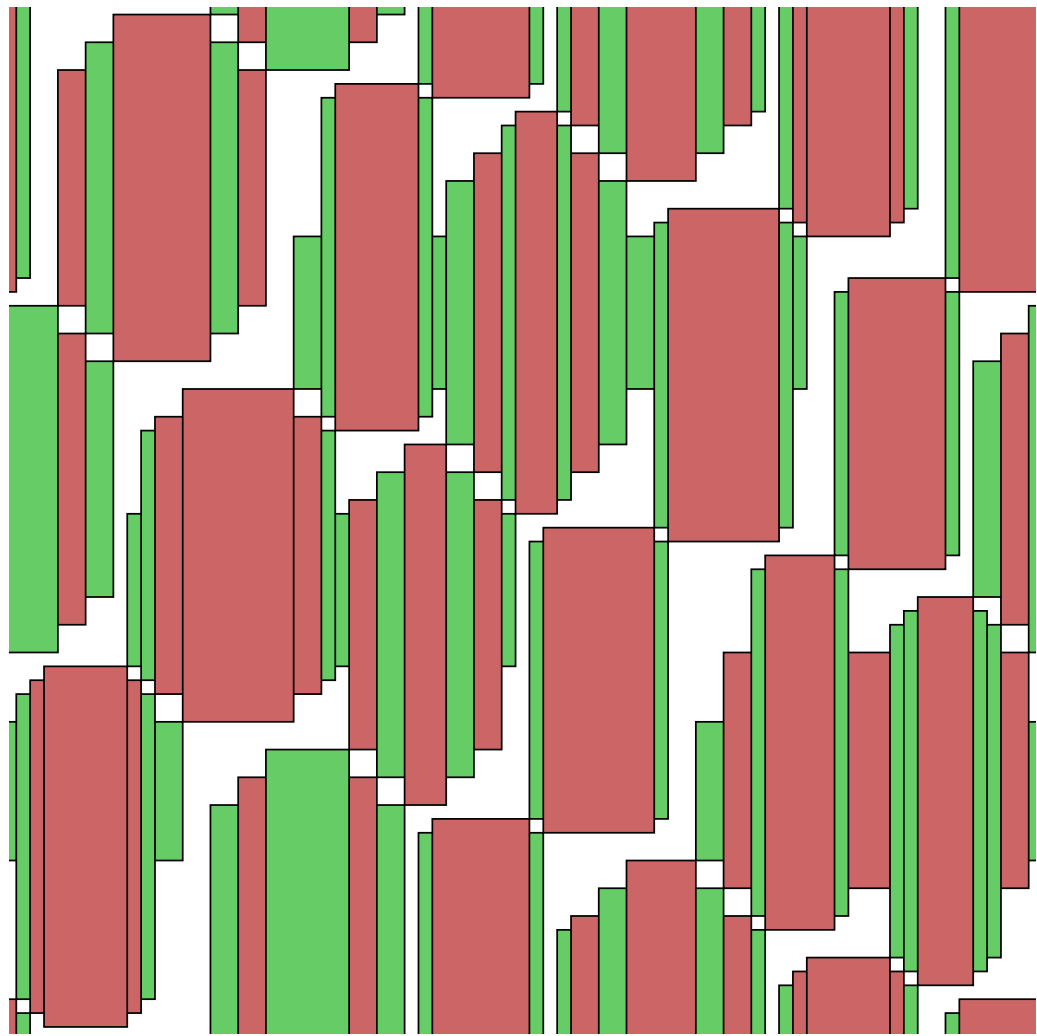


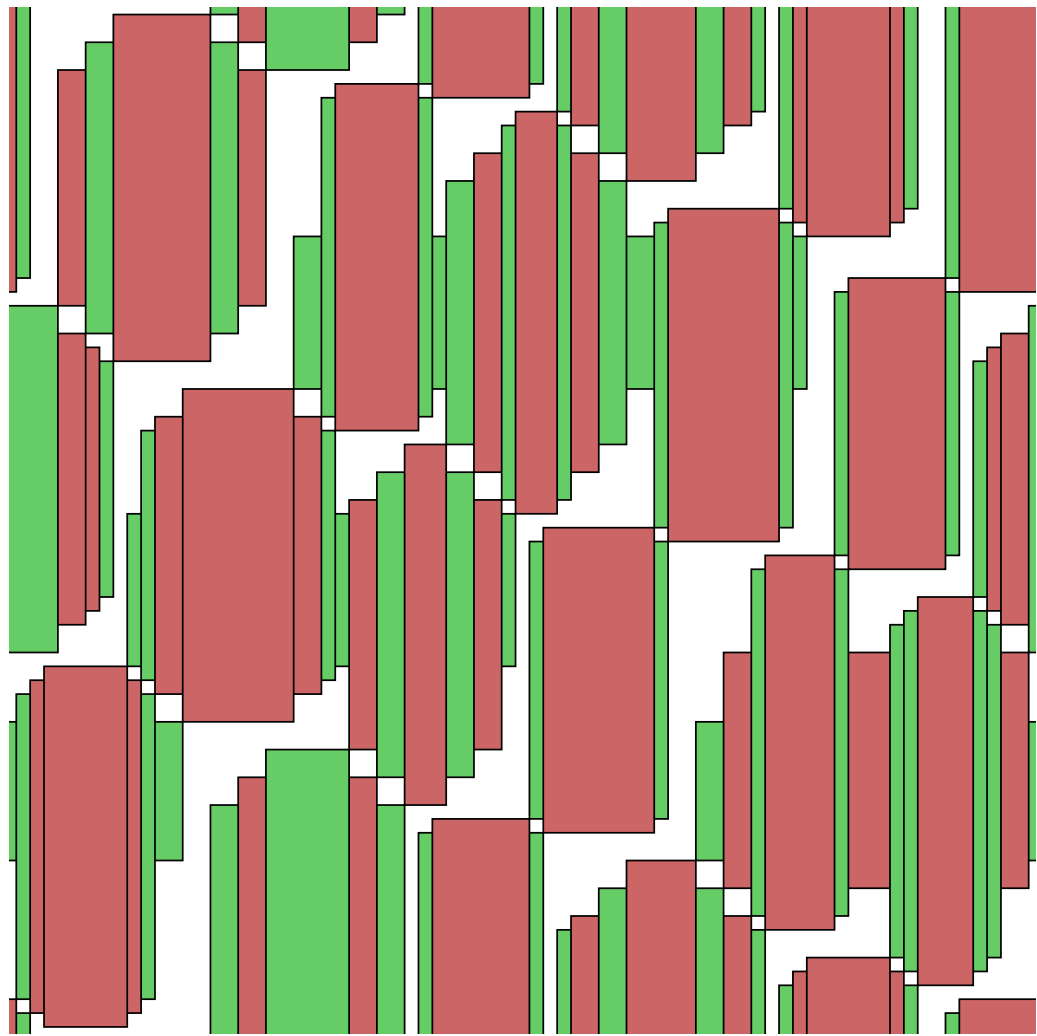


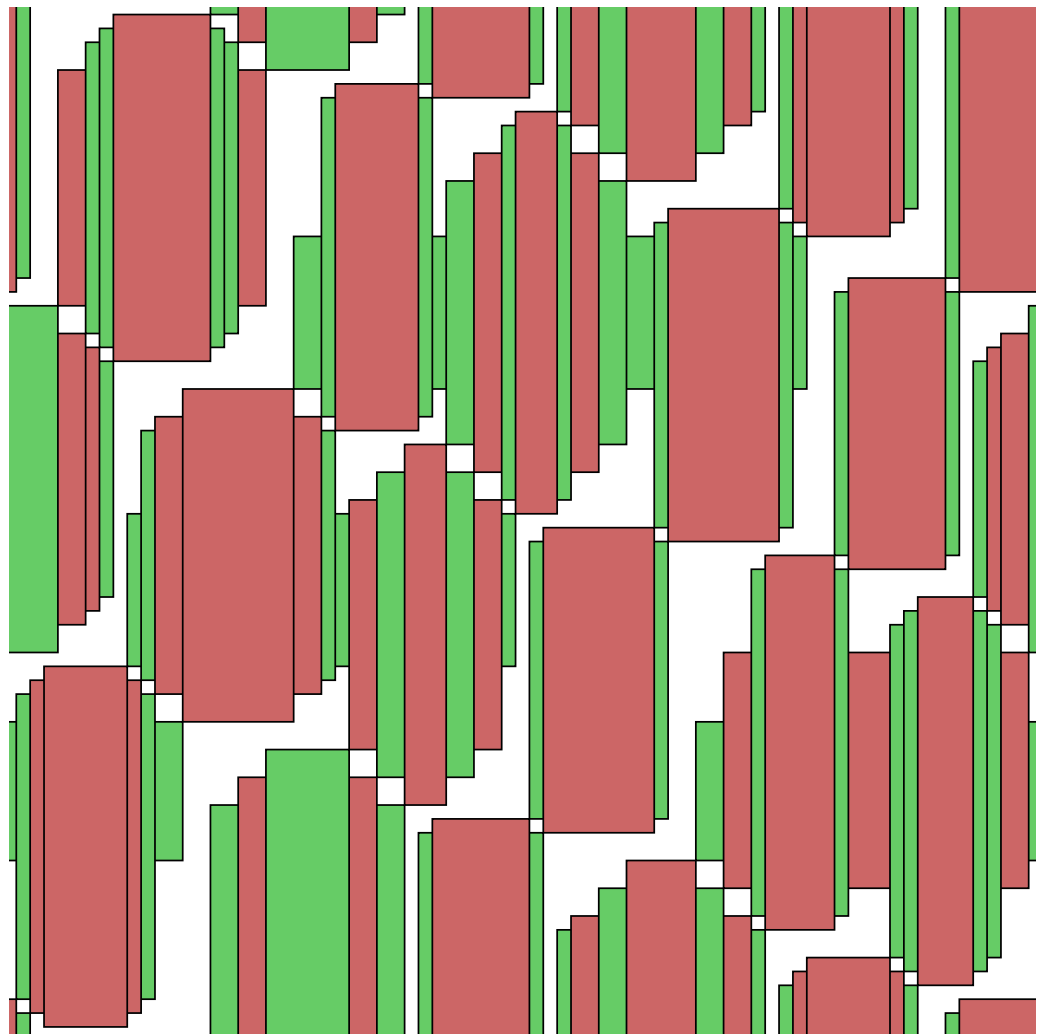


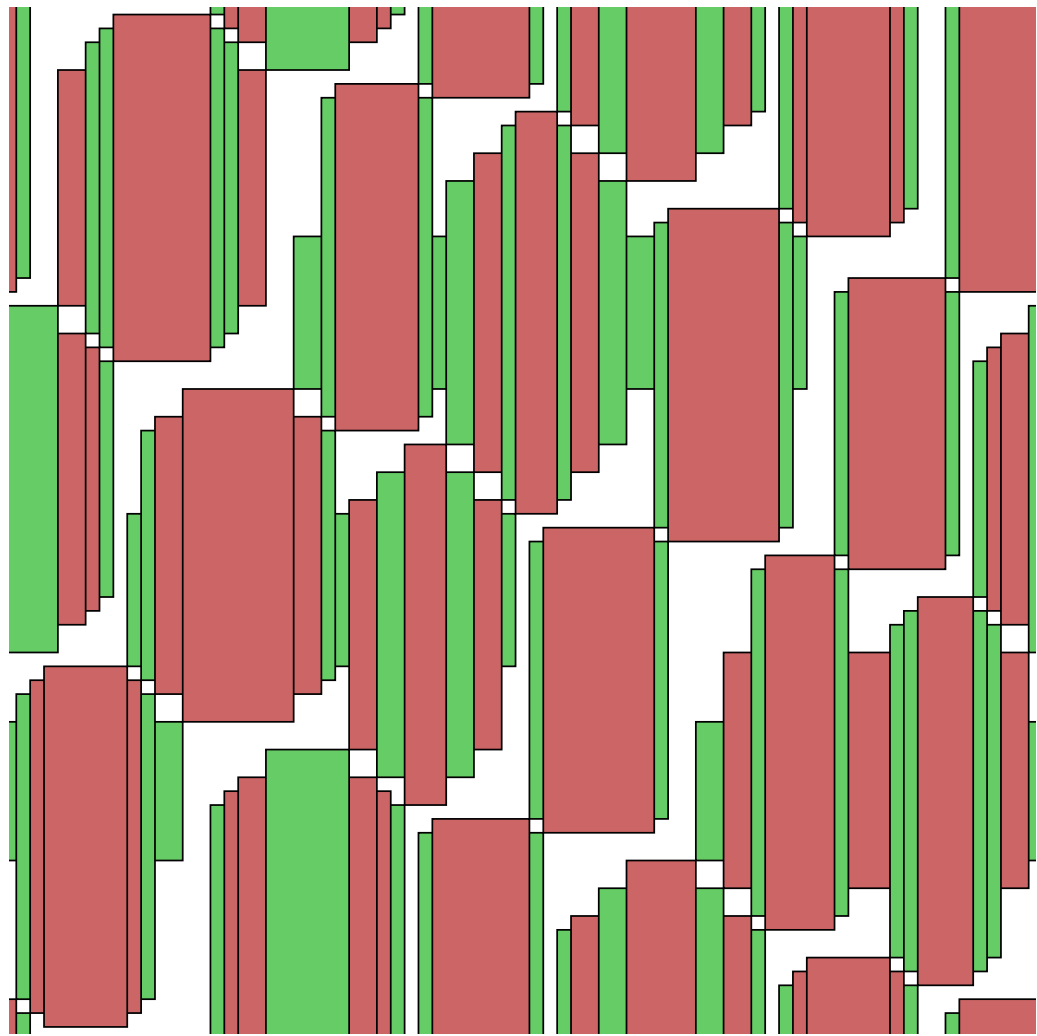


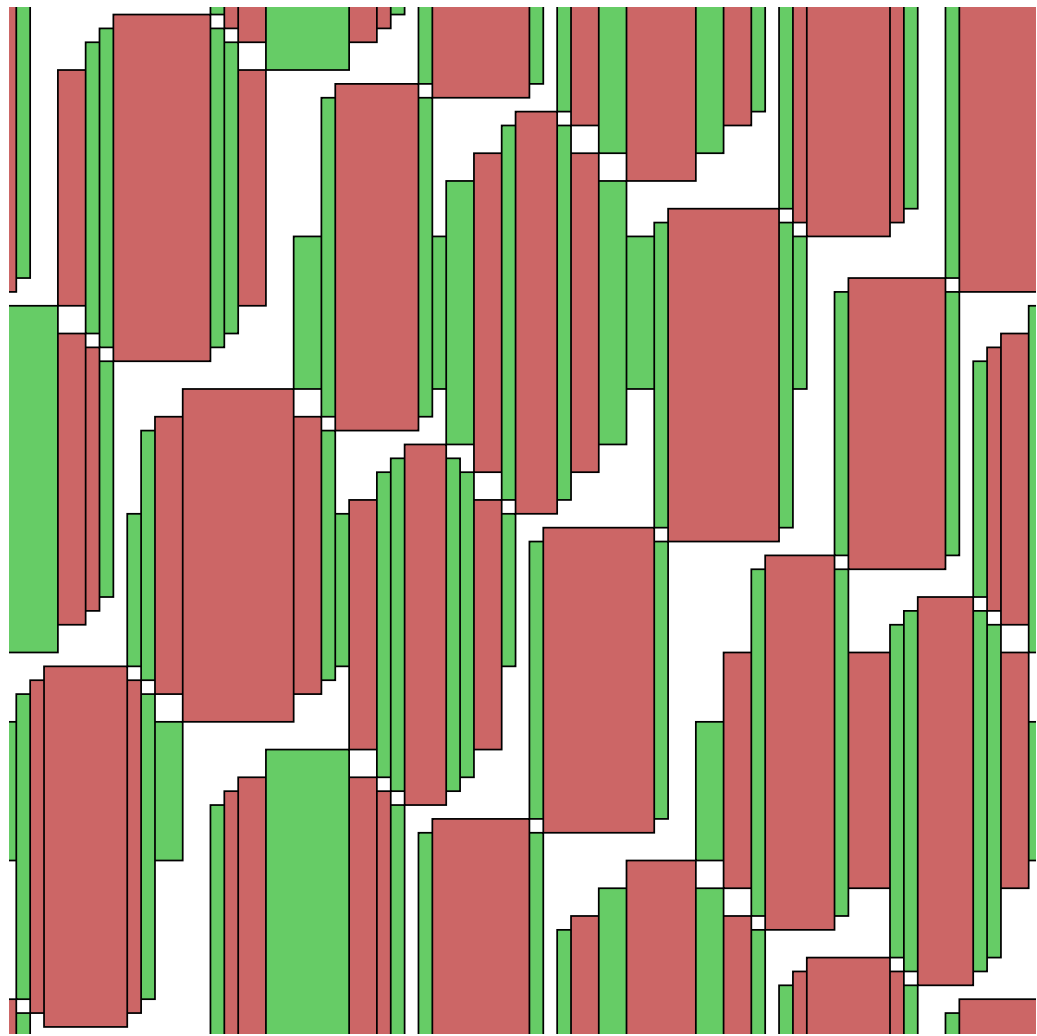


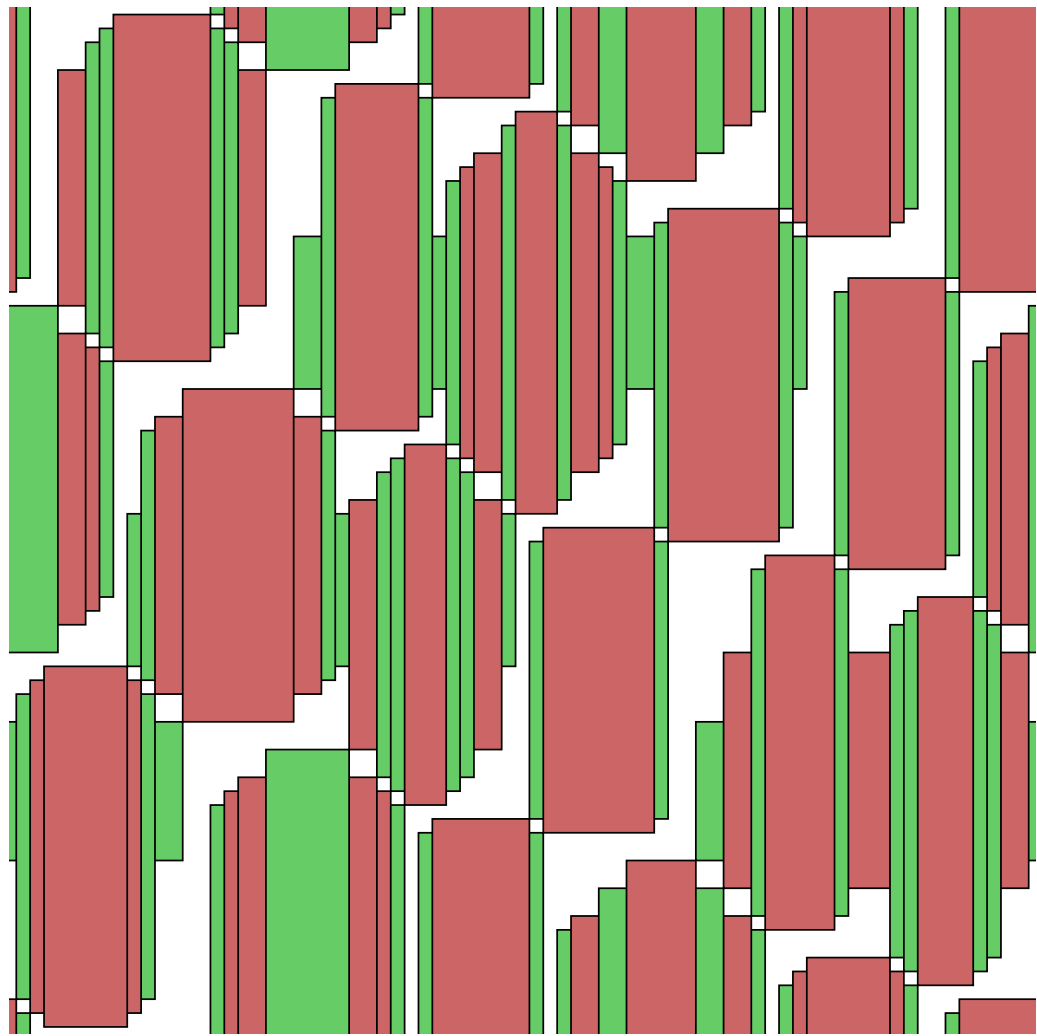


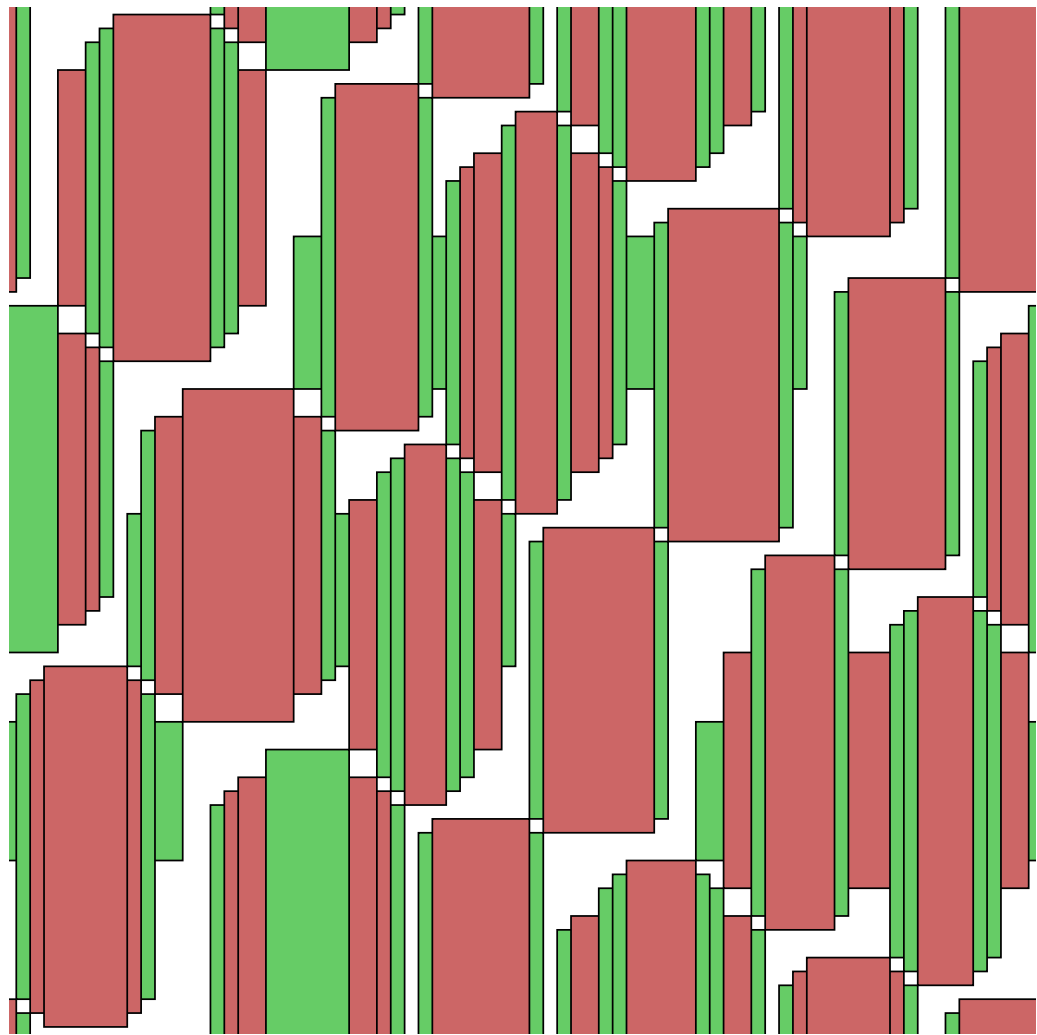


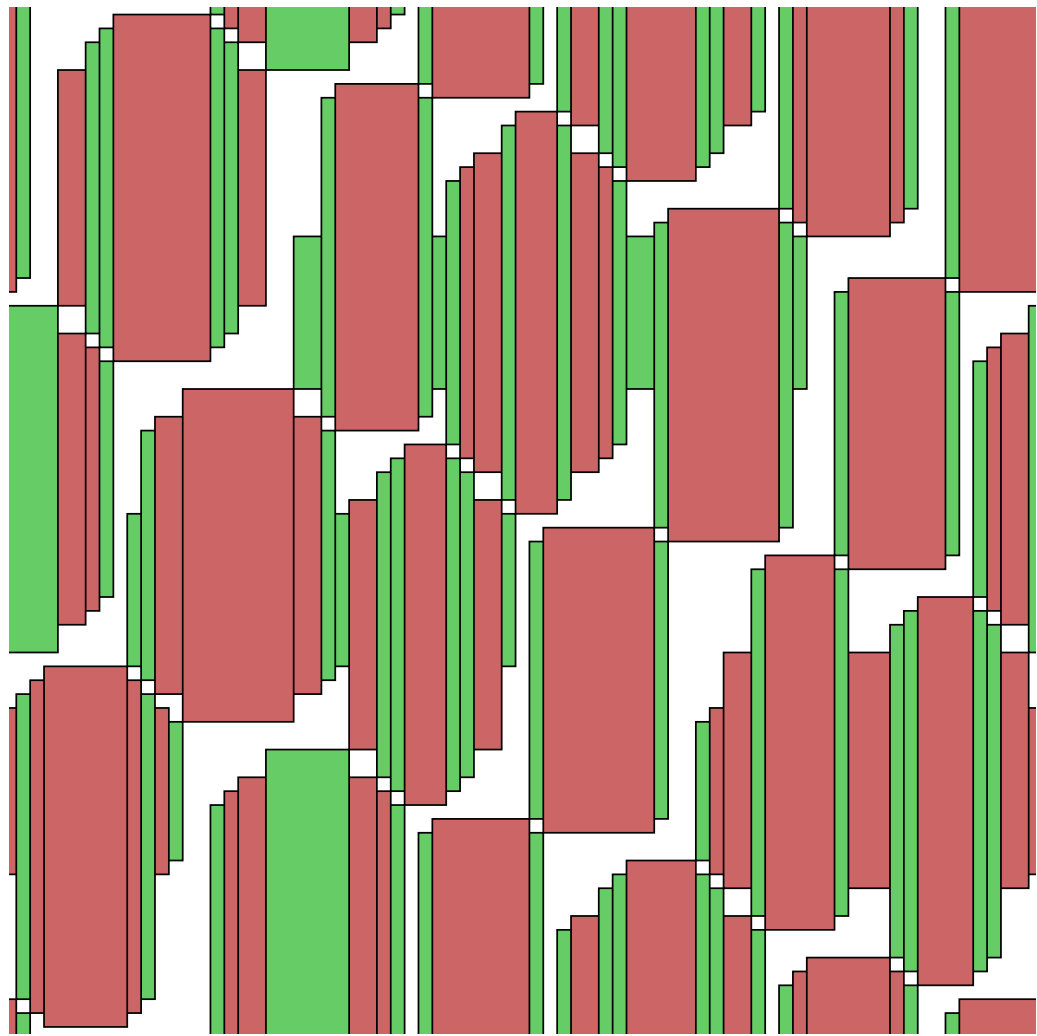




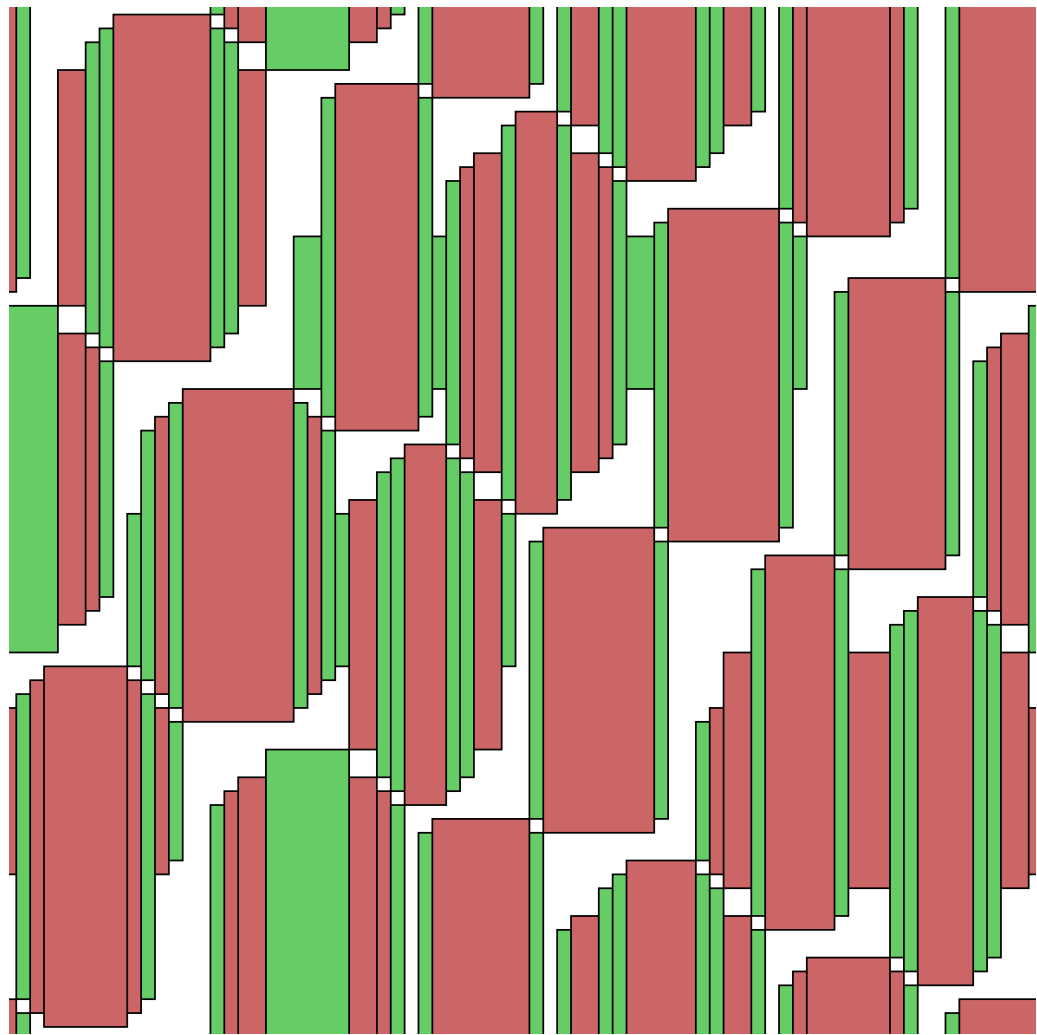


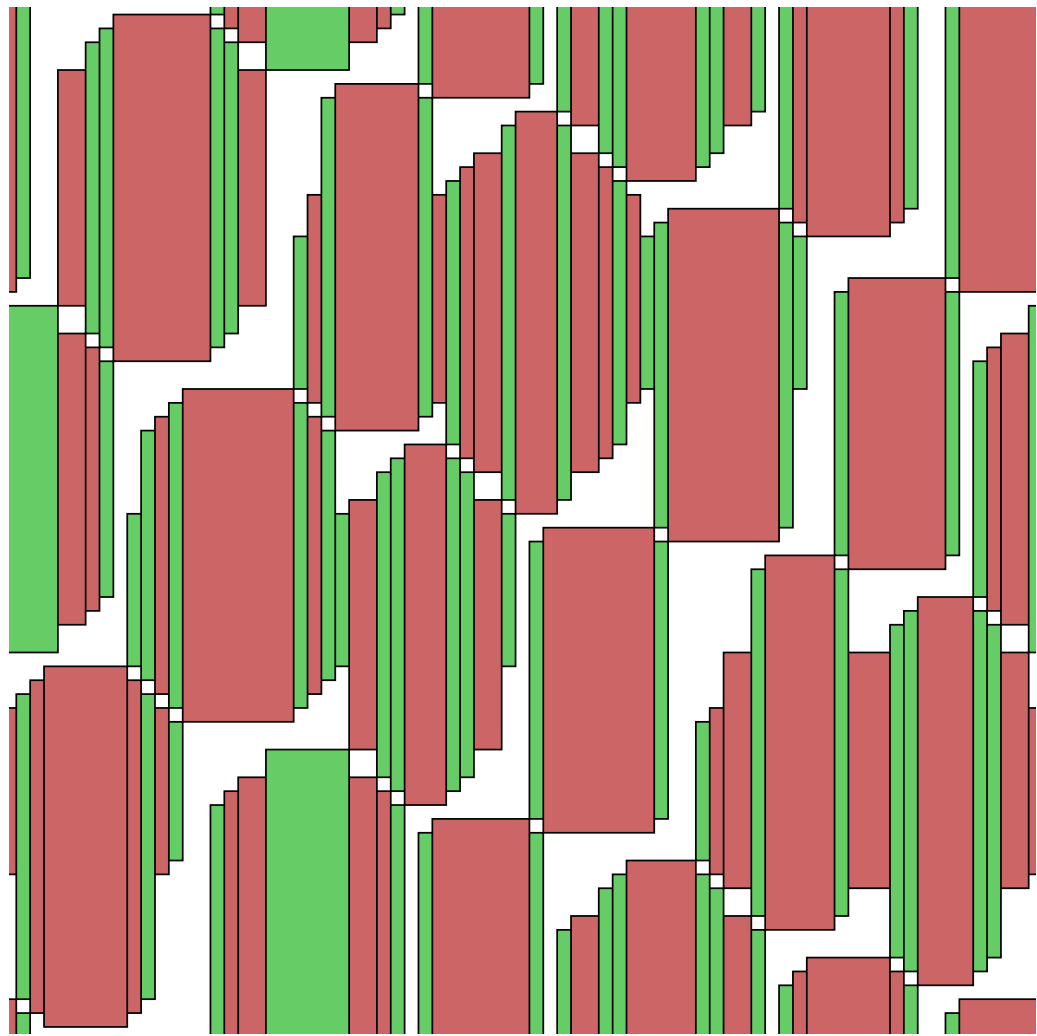


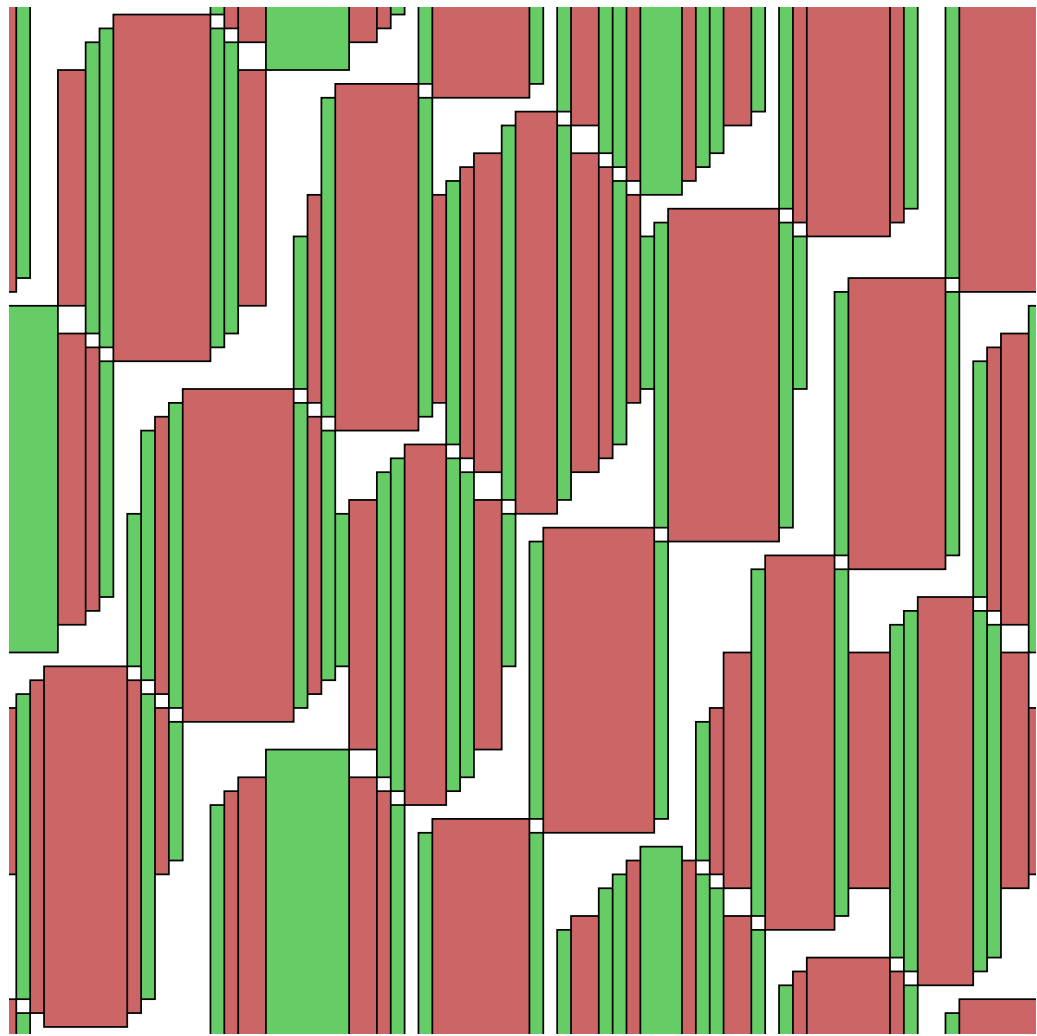


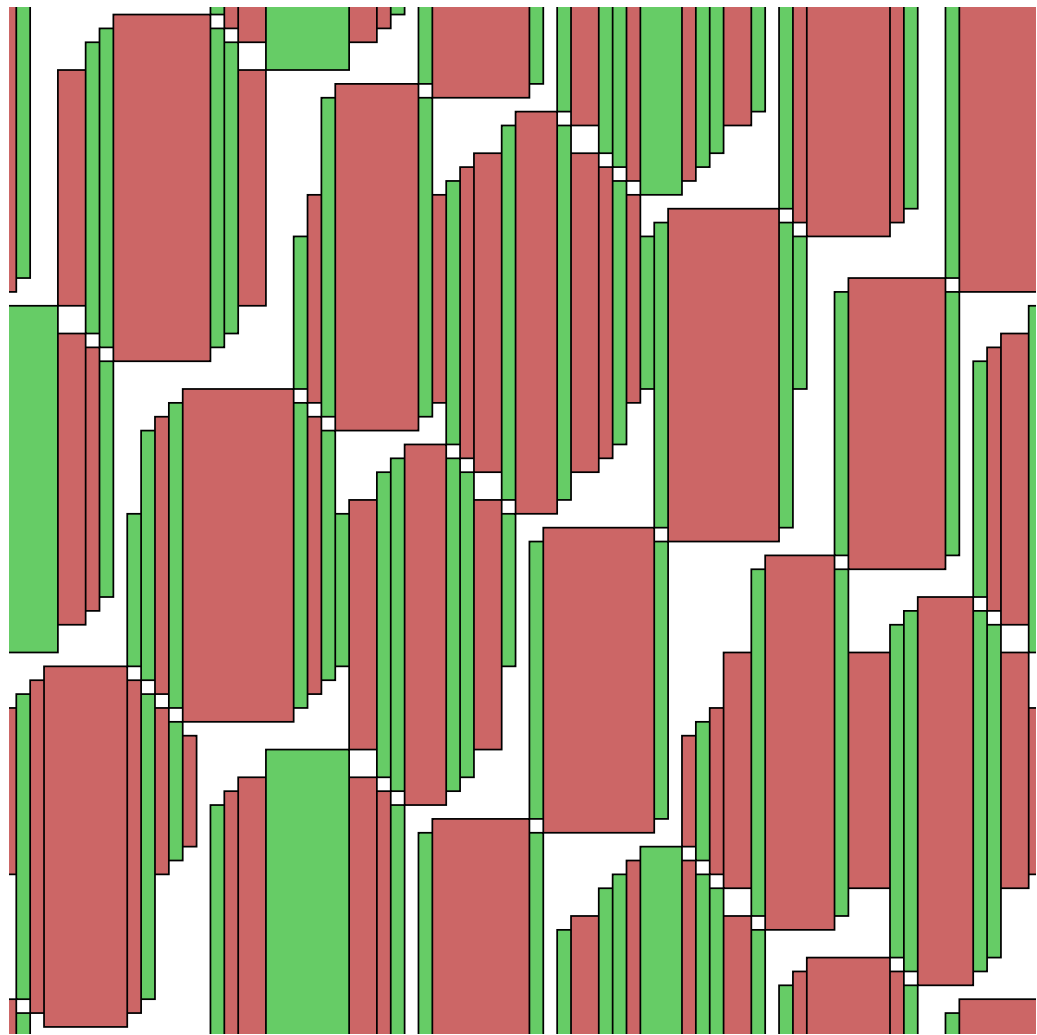


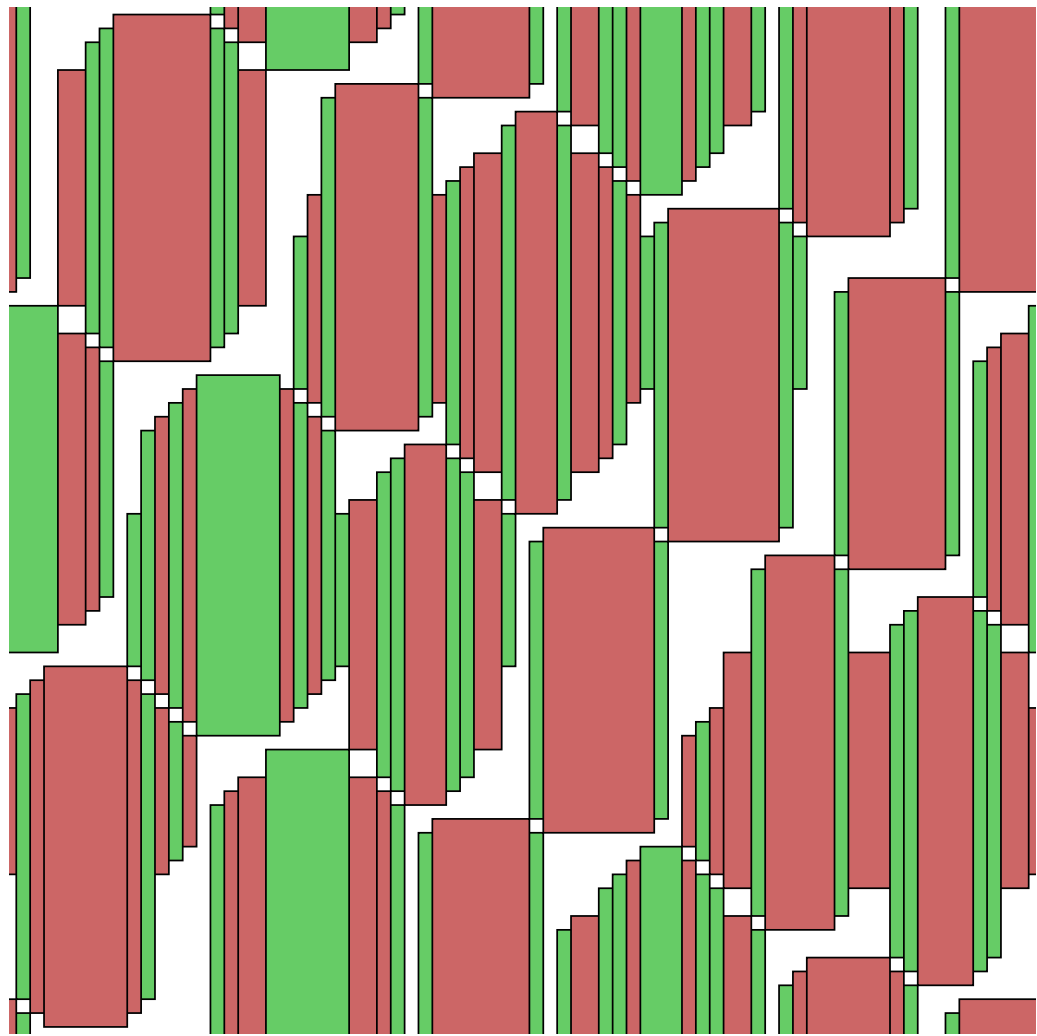


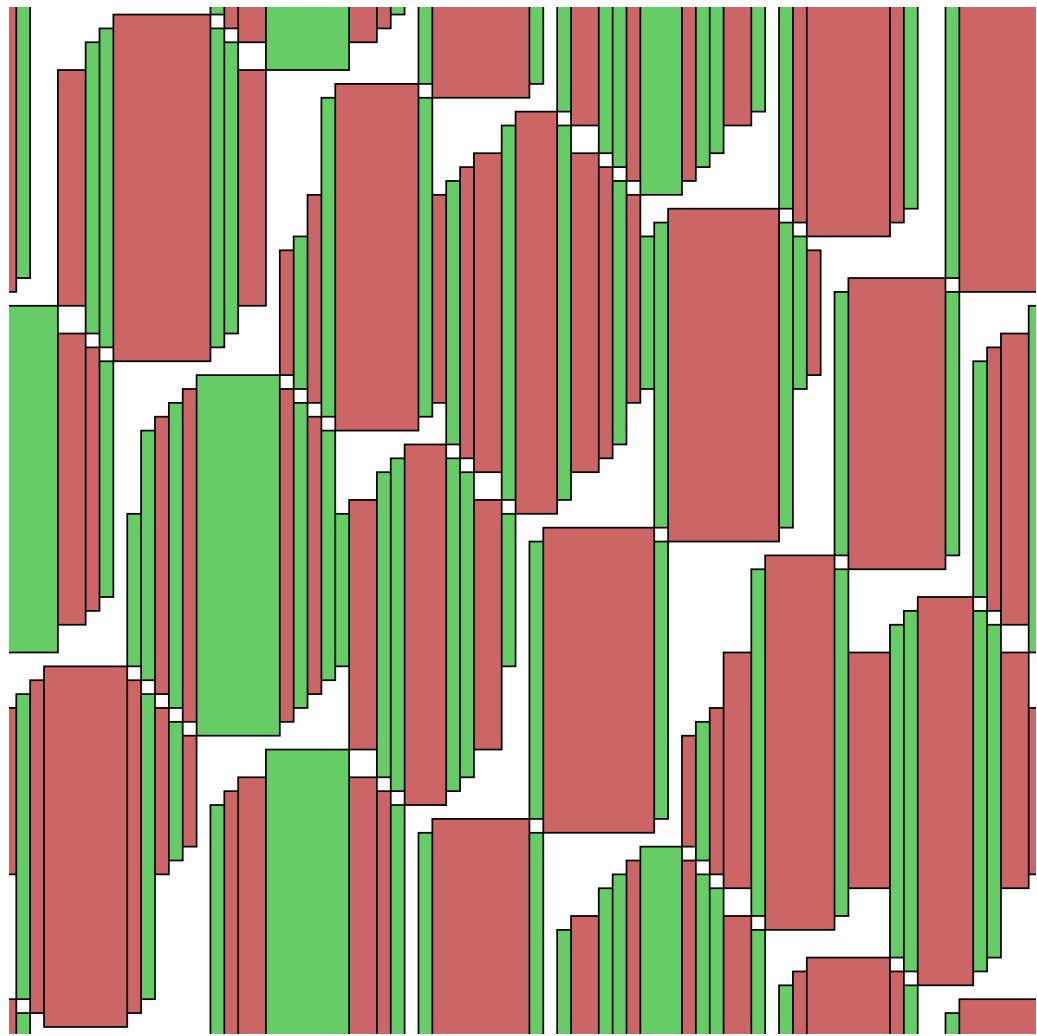


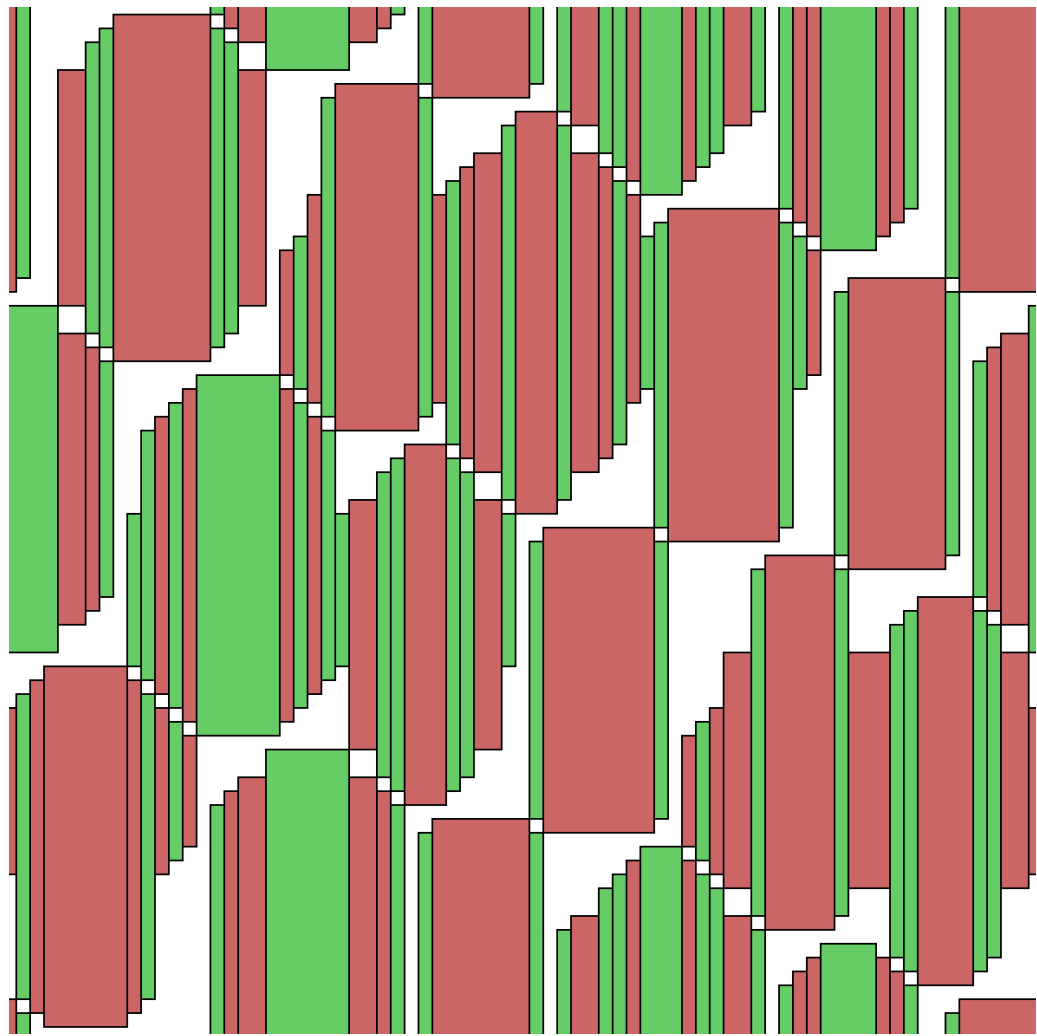


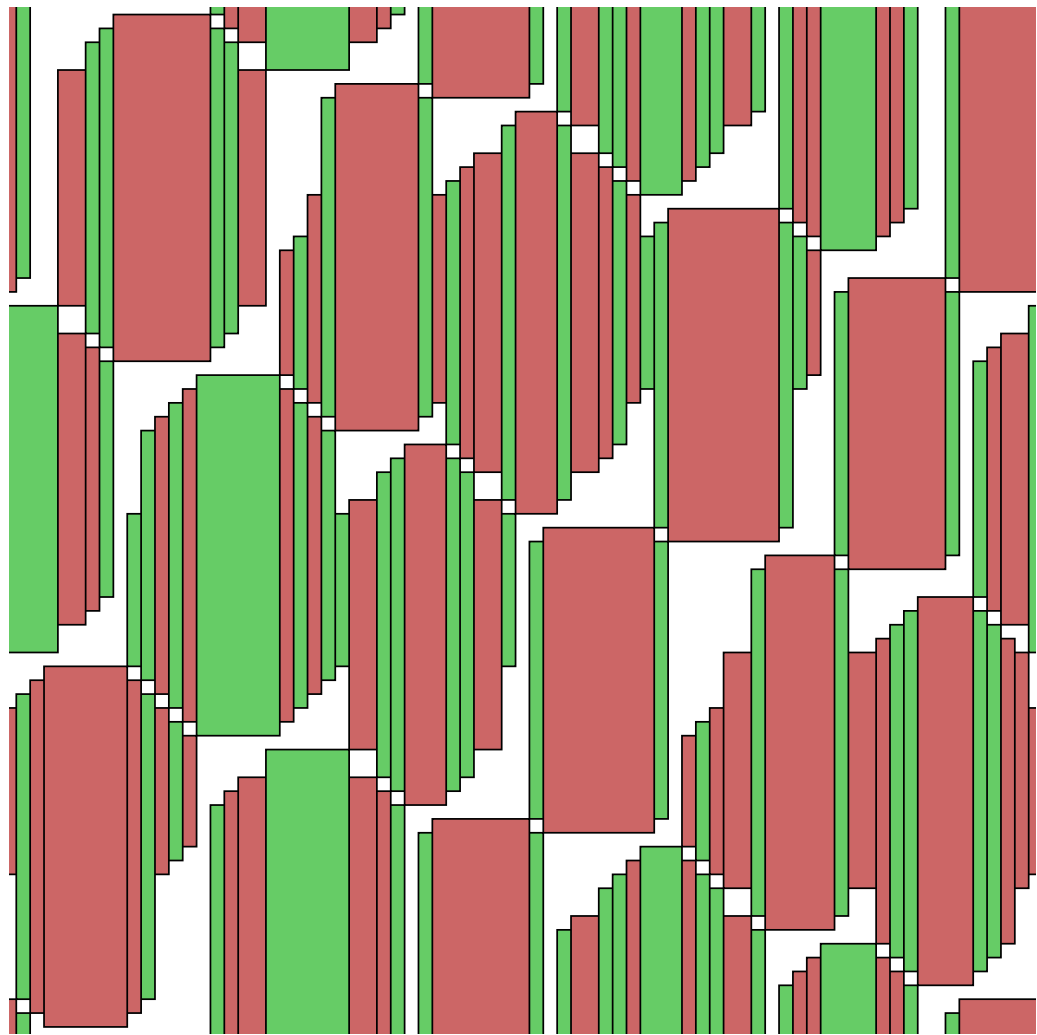




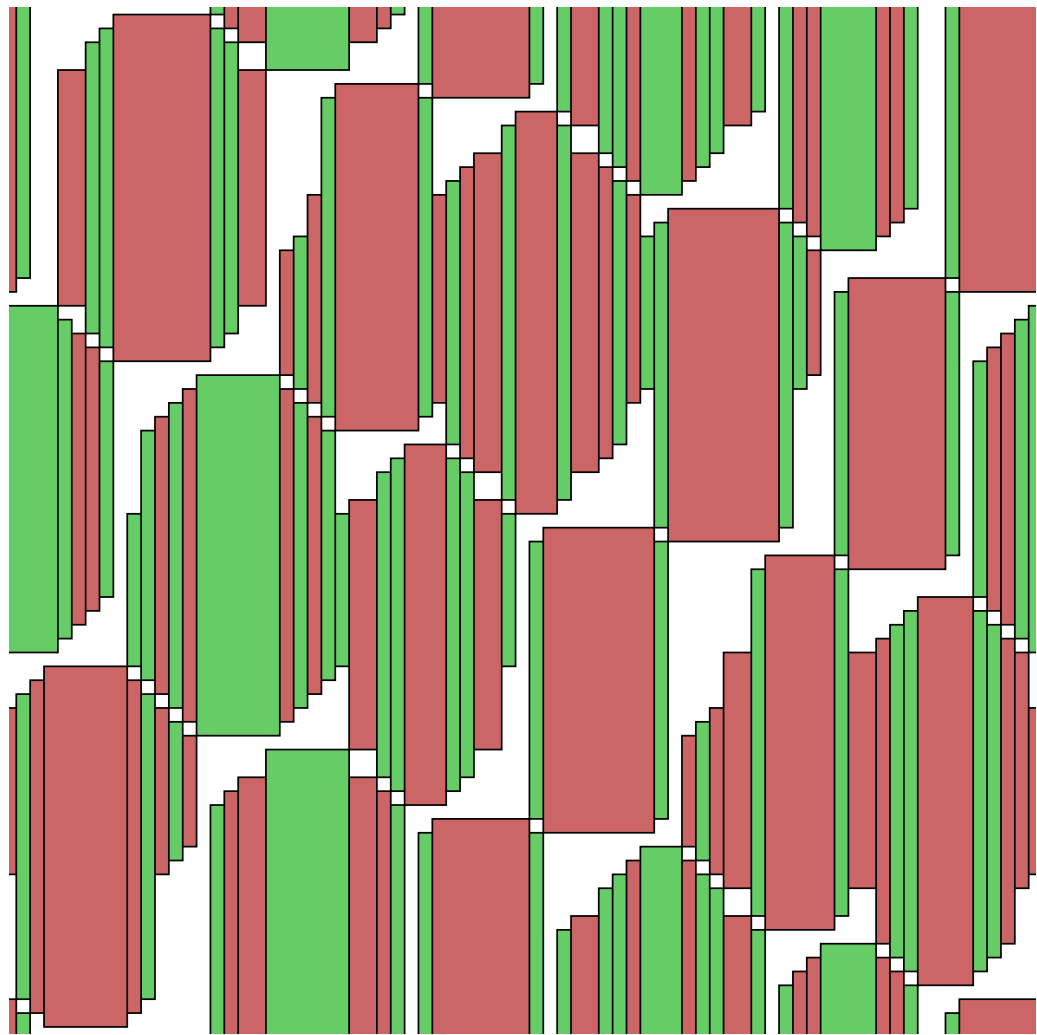


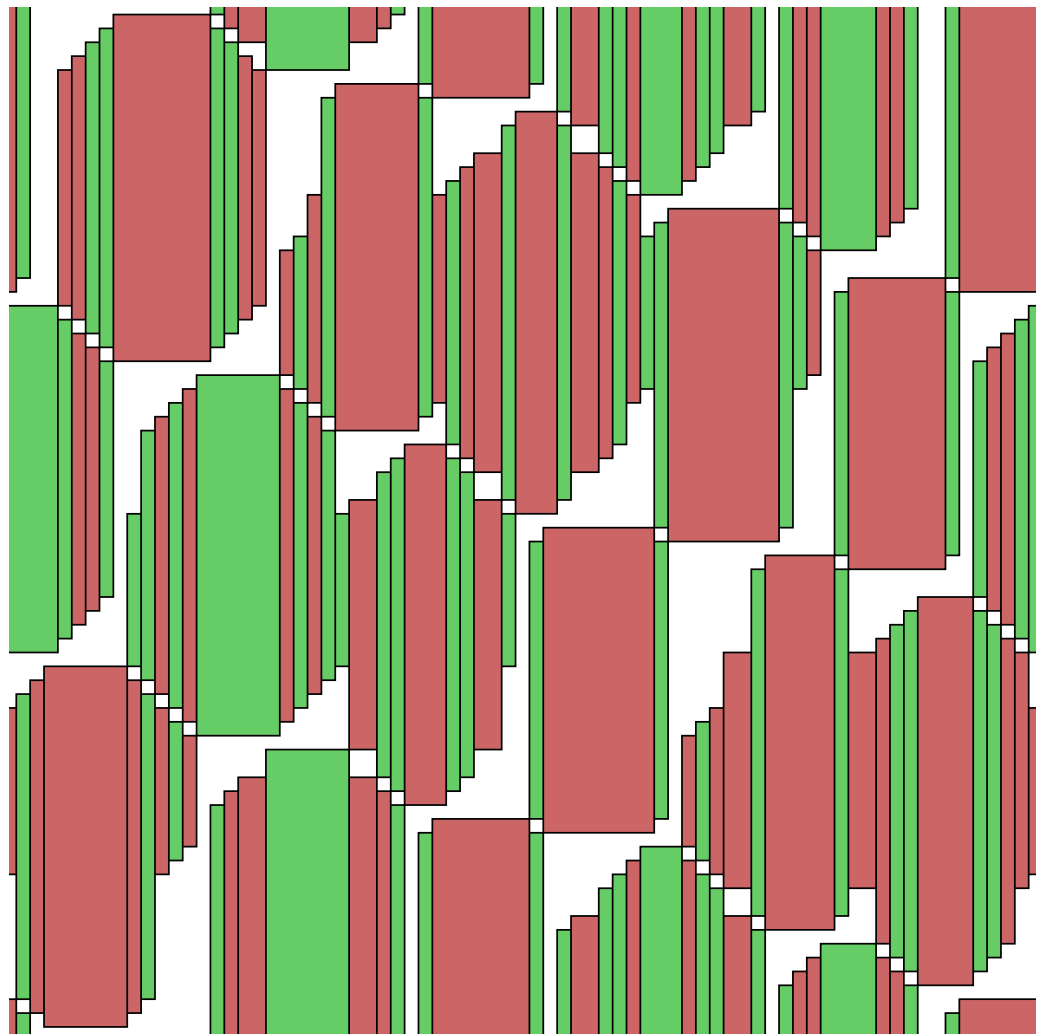


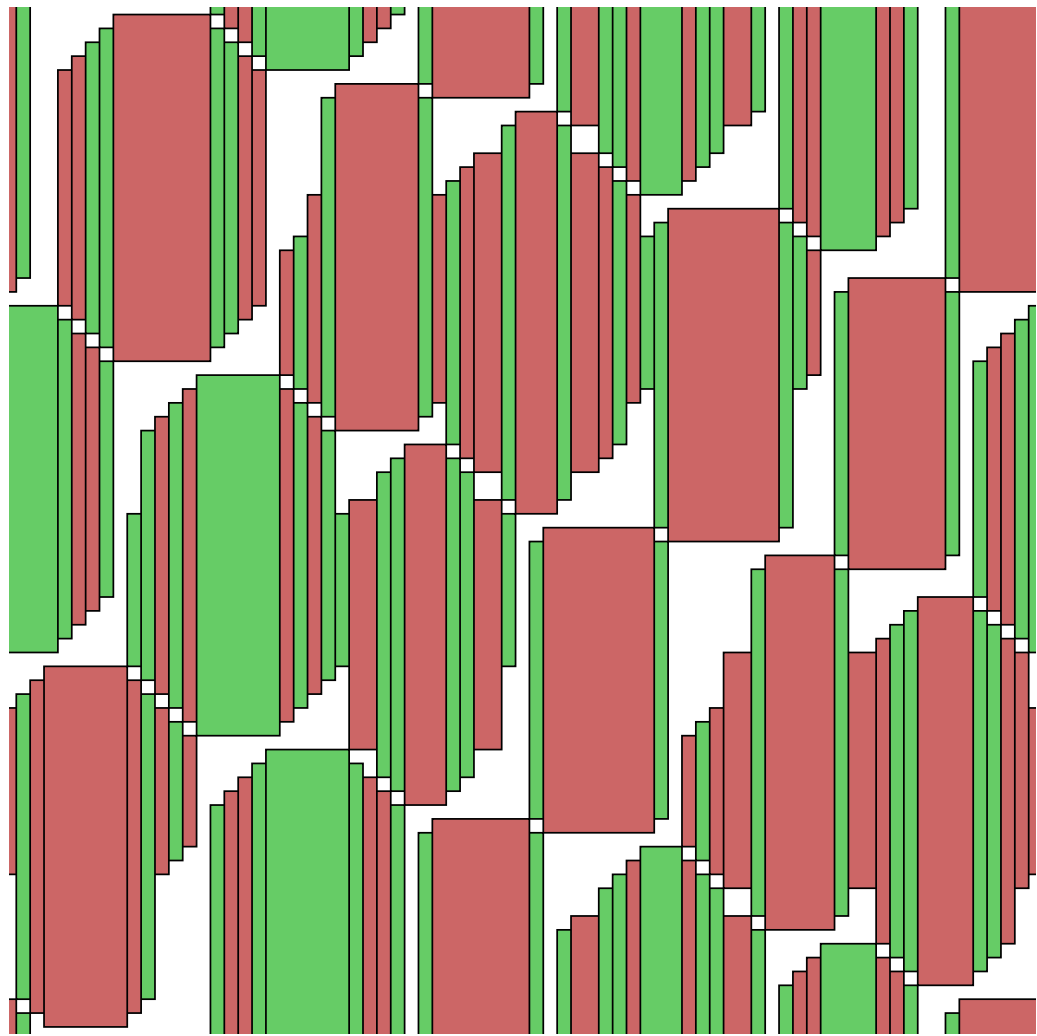


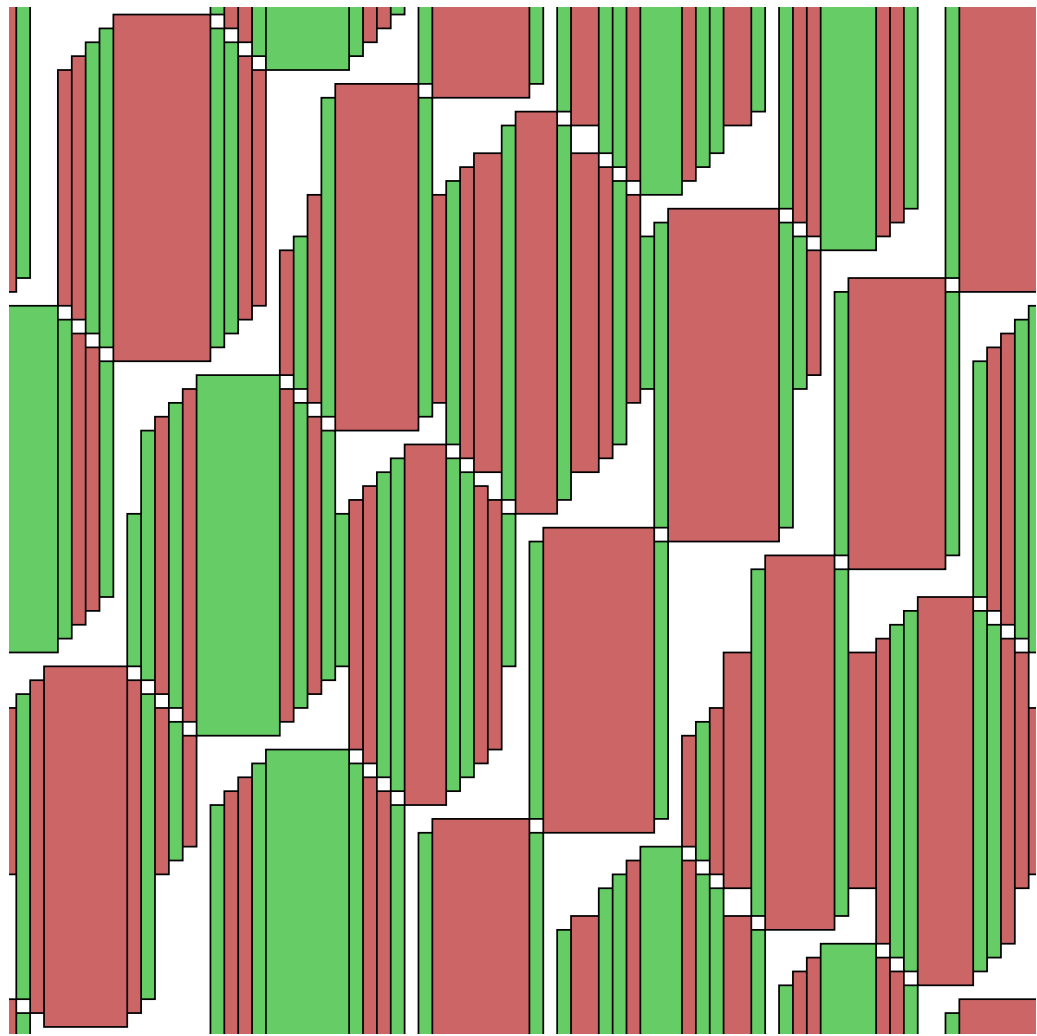


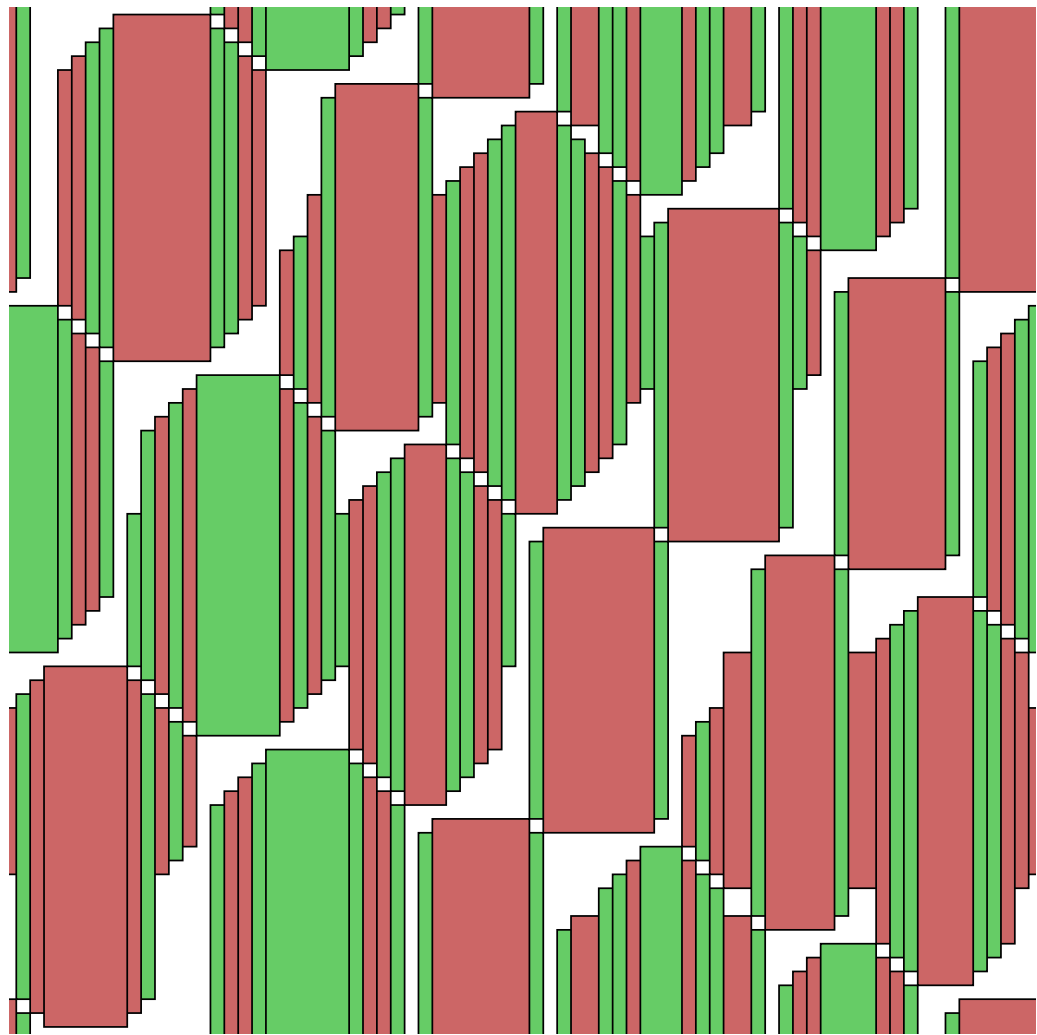


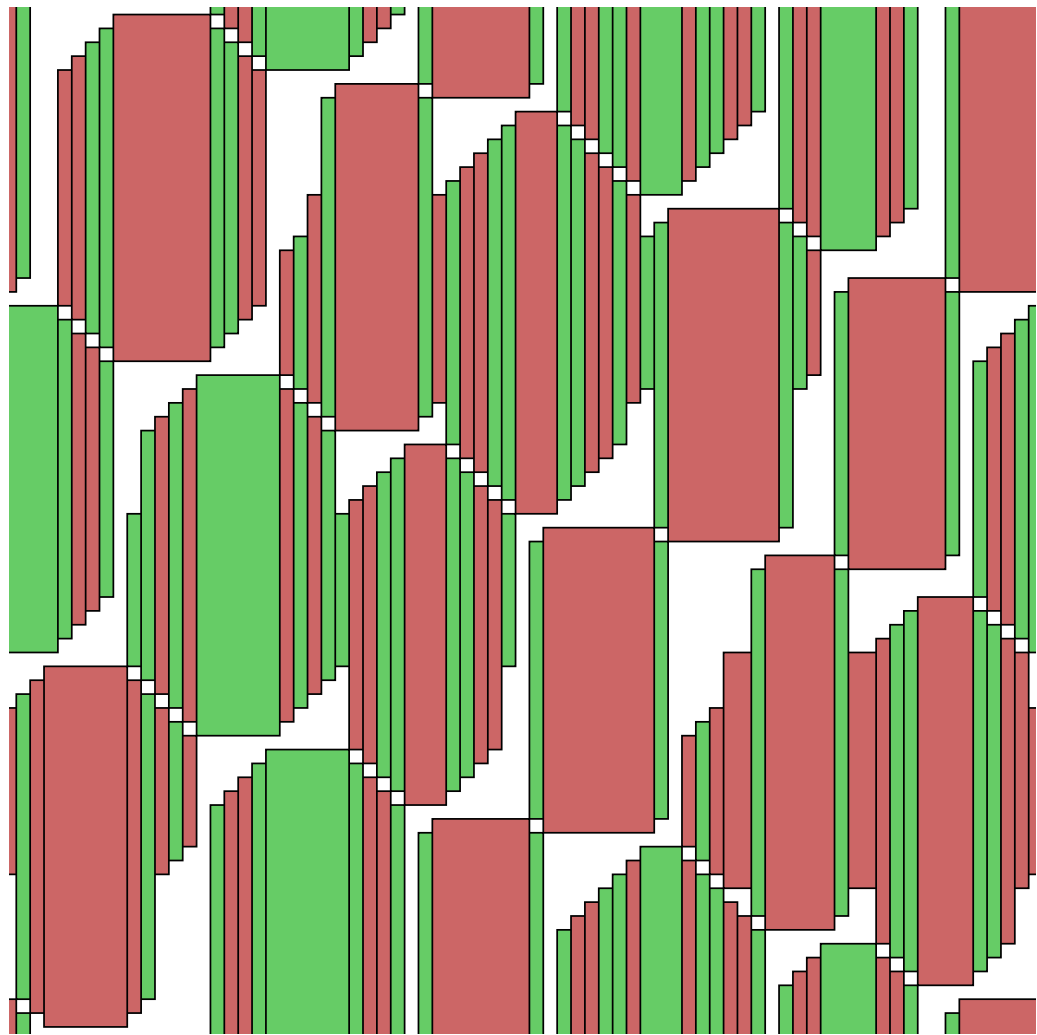


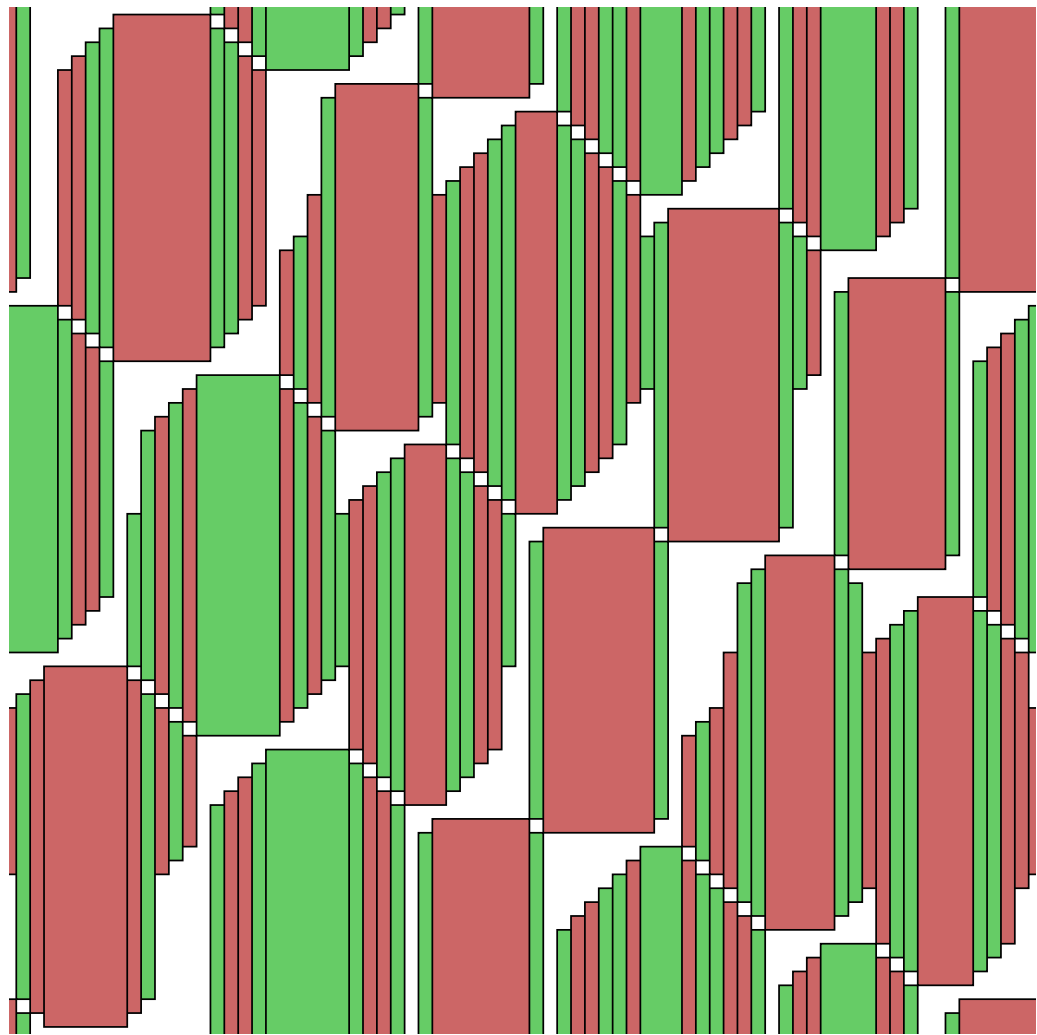


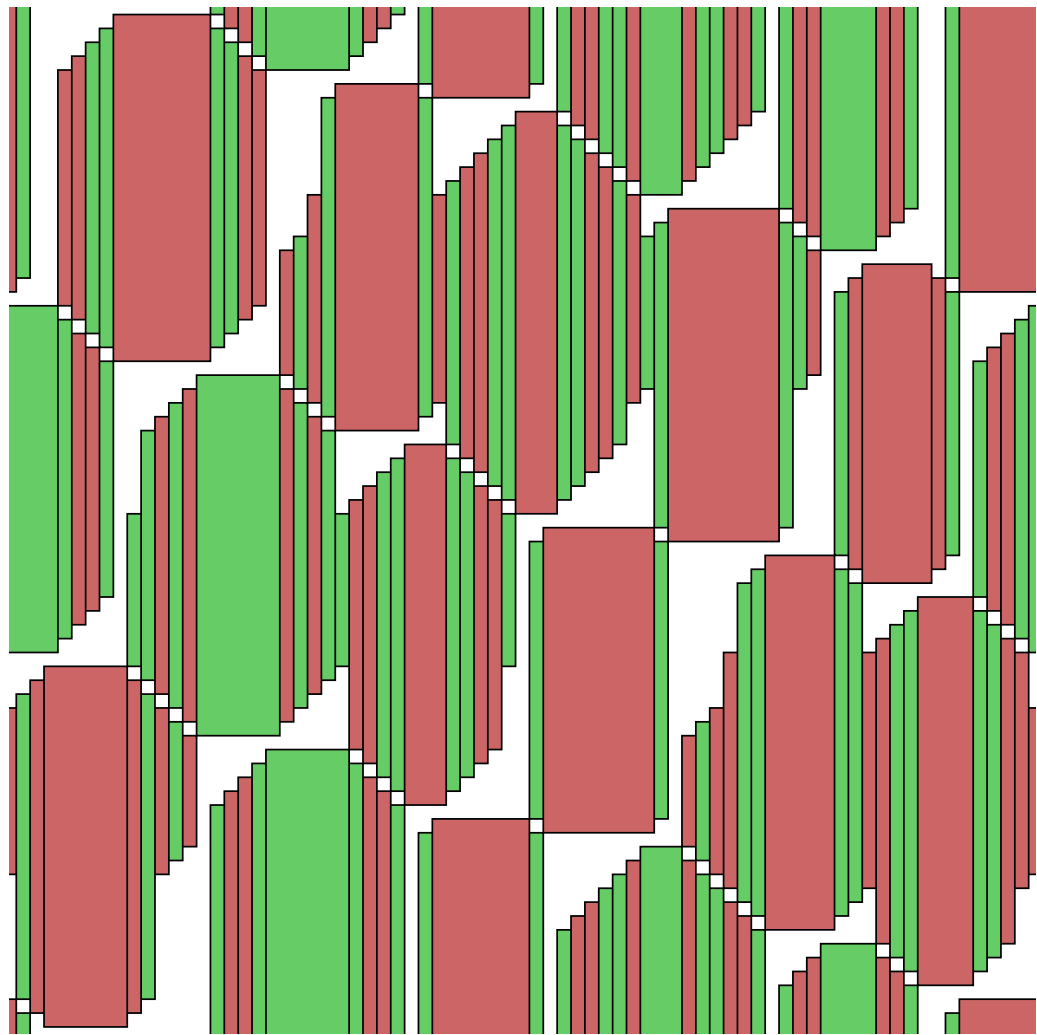




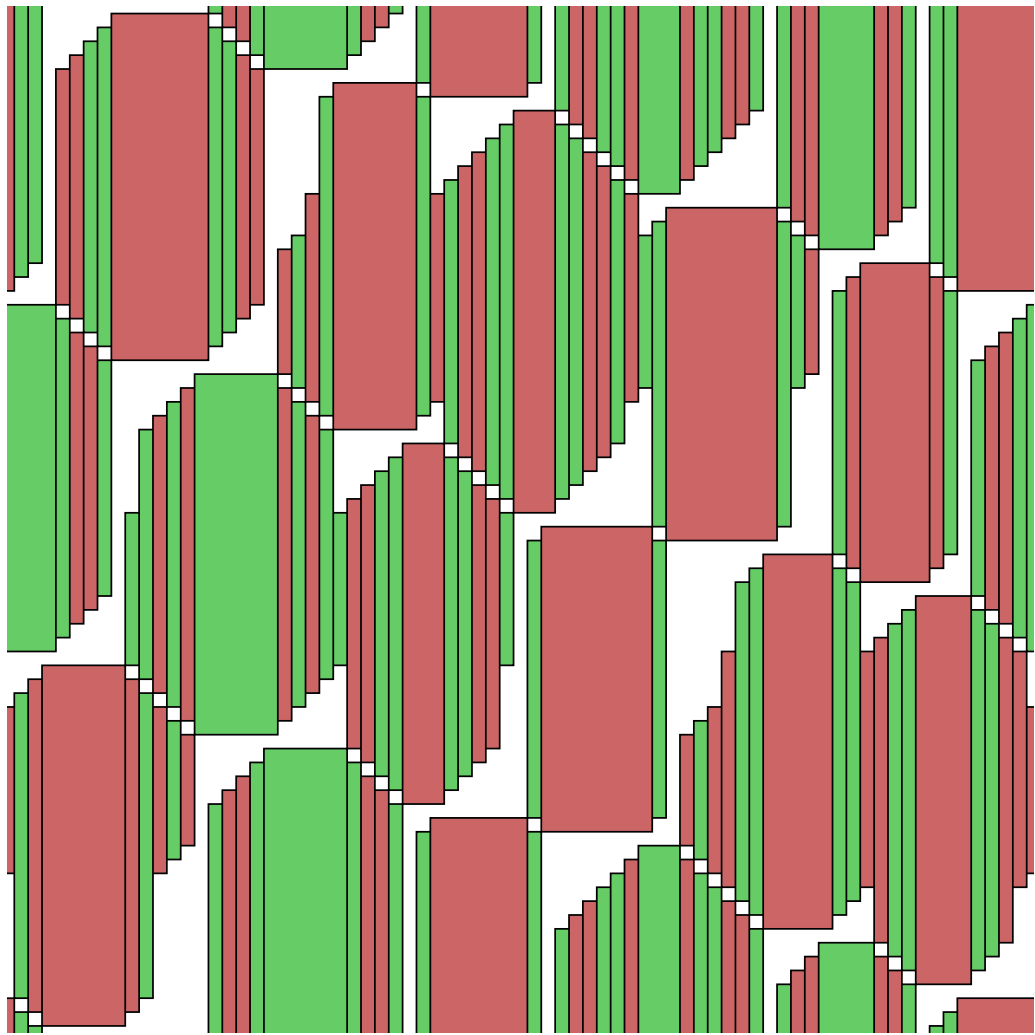


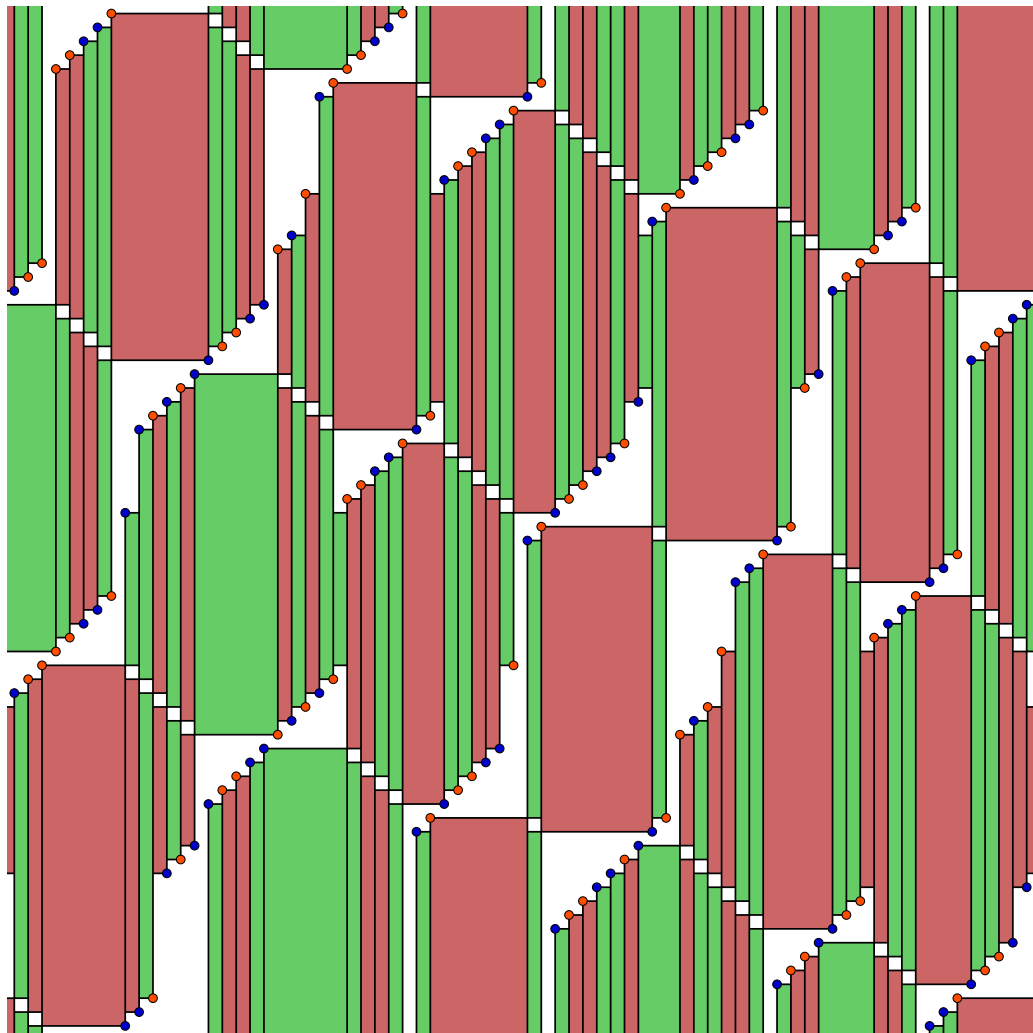


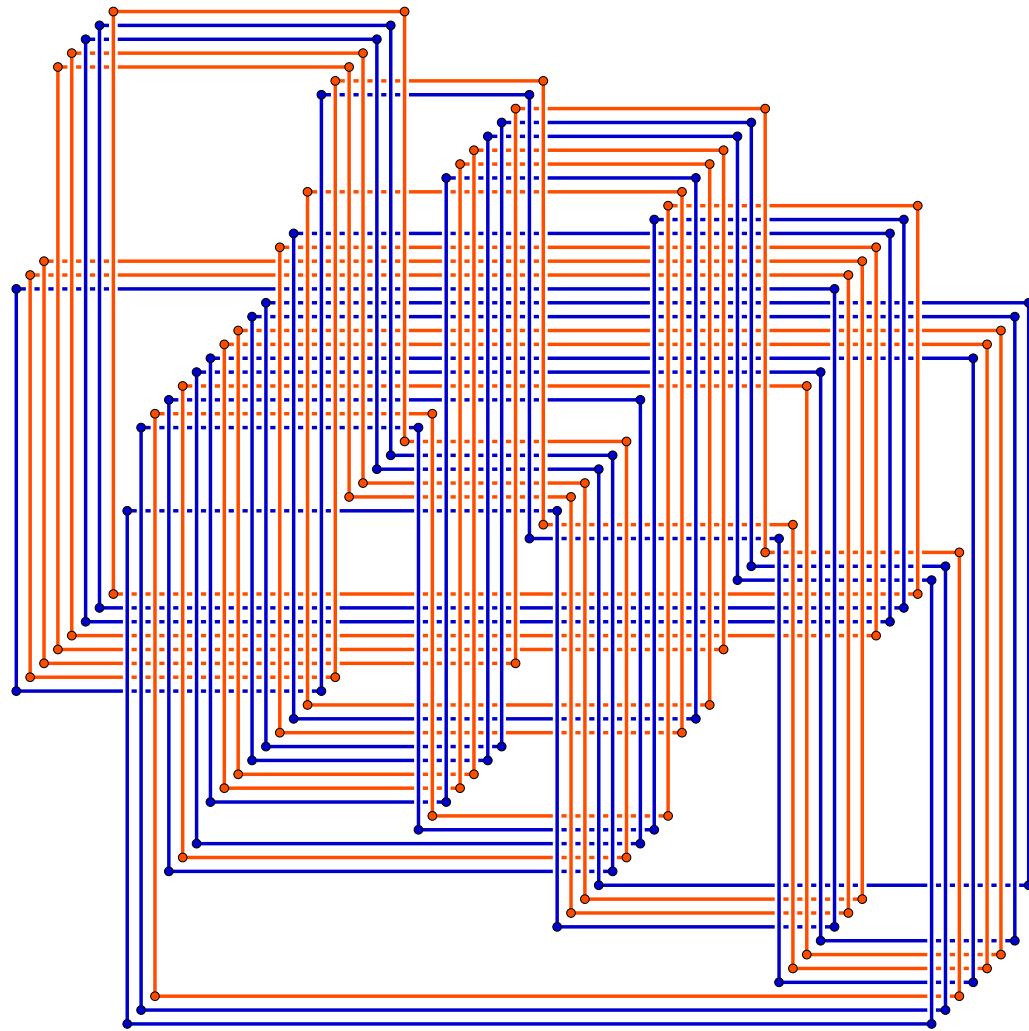


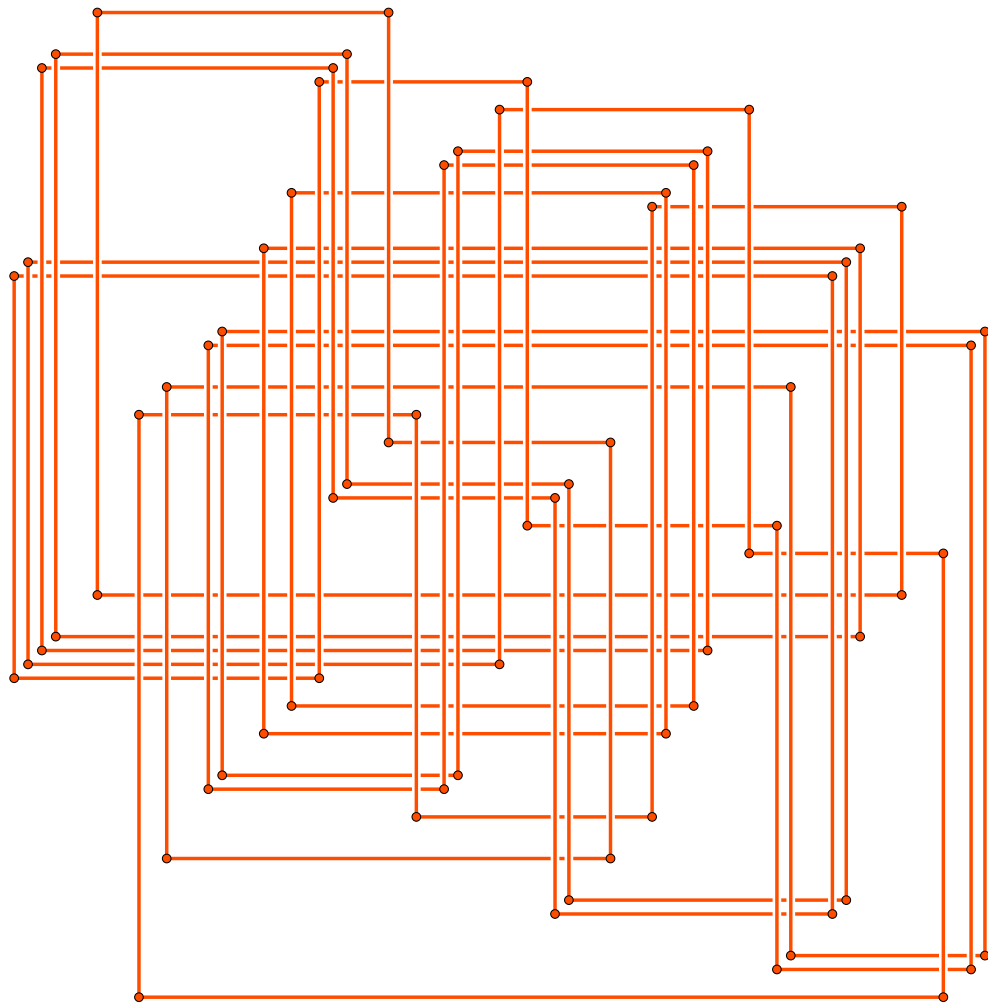


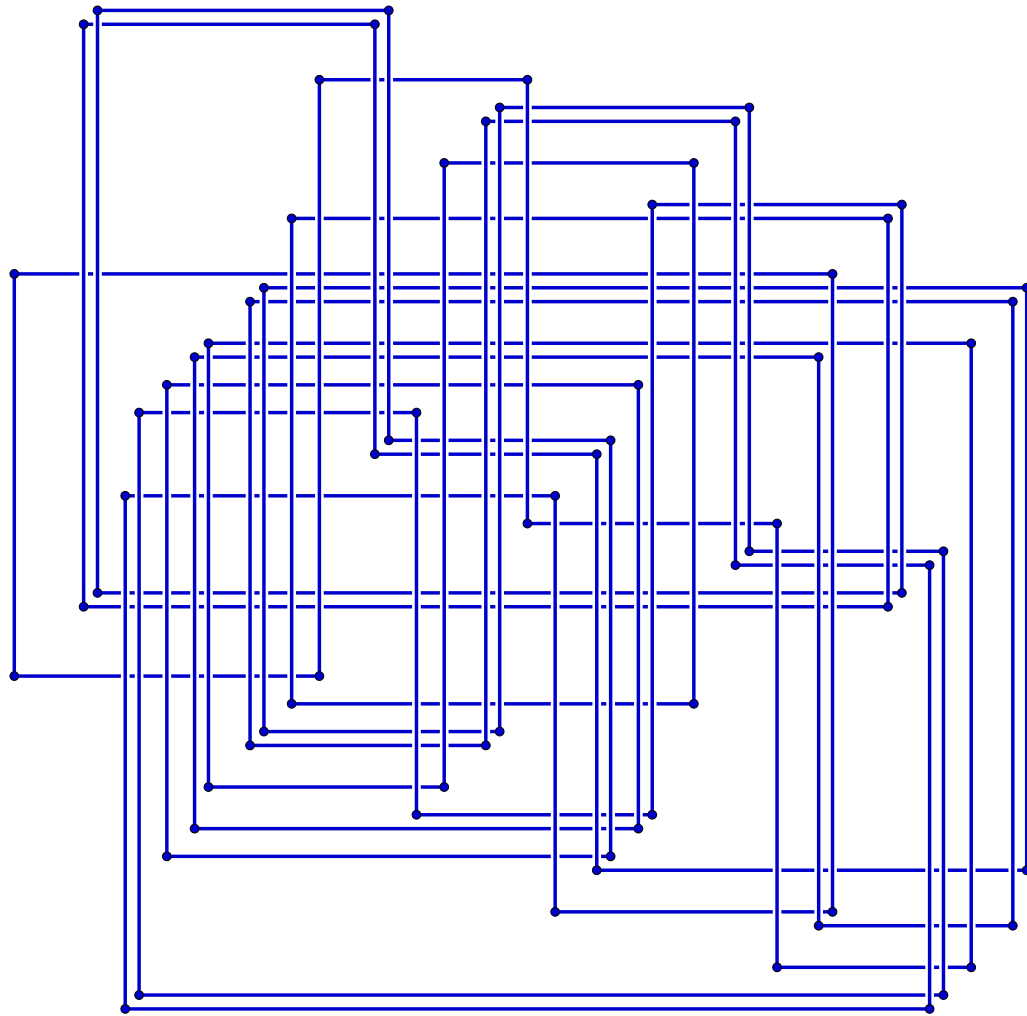




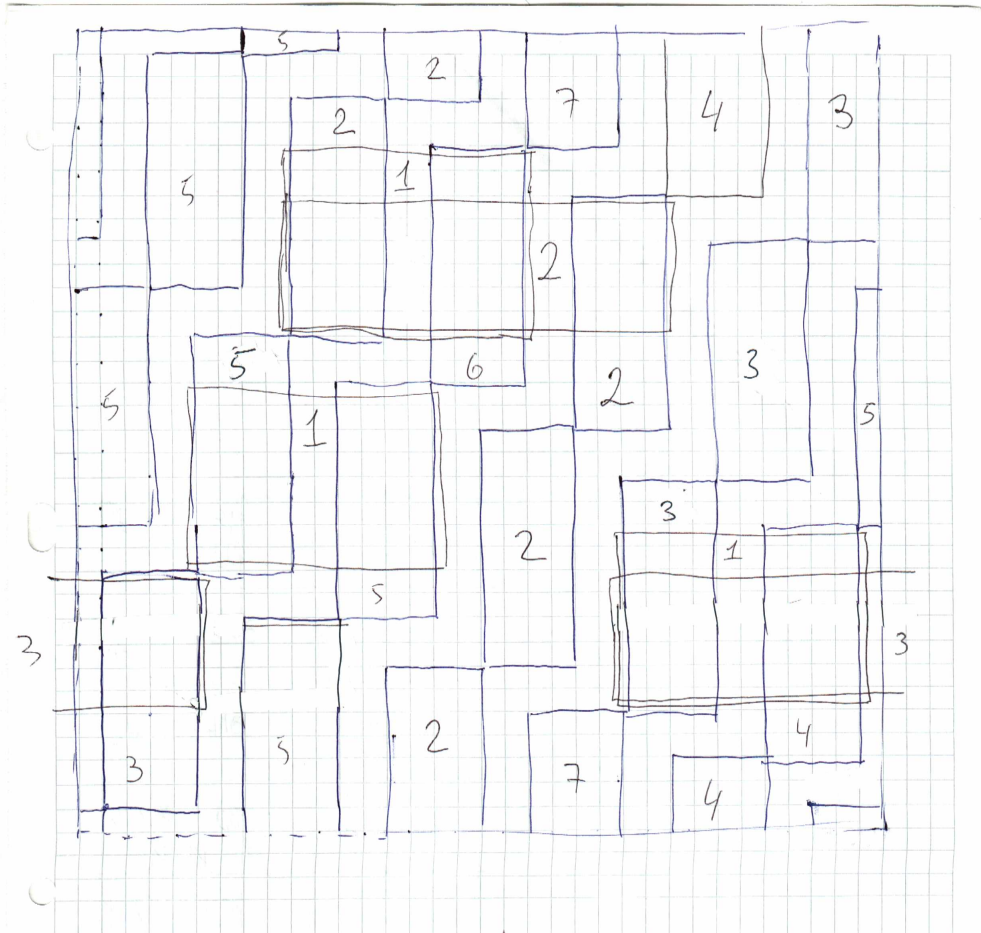








# Схема построения примера



**Теорема.** Если  $\mathcal{L}_+(R_1) = \mathcal{L}_+(R_2)$ ,  $\mathcal{L}_-(R_1) = \mathcal{L}_-(R_2)$  и группа сохраняющих ориентации симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна, то  $R_1$  и  $R_2$  получаются друг из друга рокировками.

**Теорема.** Если  $\mathcal{L}_+(R_1) = \mathcal{L}_+(R_2)$ ,  $\mathcal{L}_-(R_1) = \mathcal{L}_-(R_2)$  и группа сохраняющих ориентации симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна, то  $R_1$  и  $R_2$  получаются друг из друга рокировками.

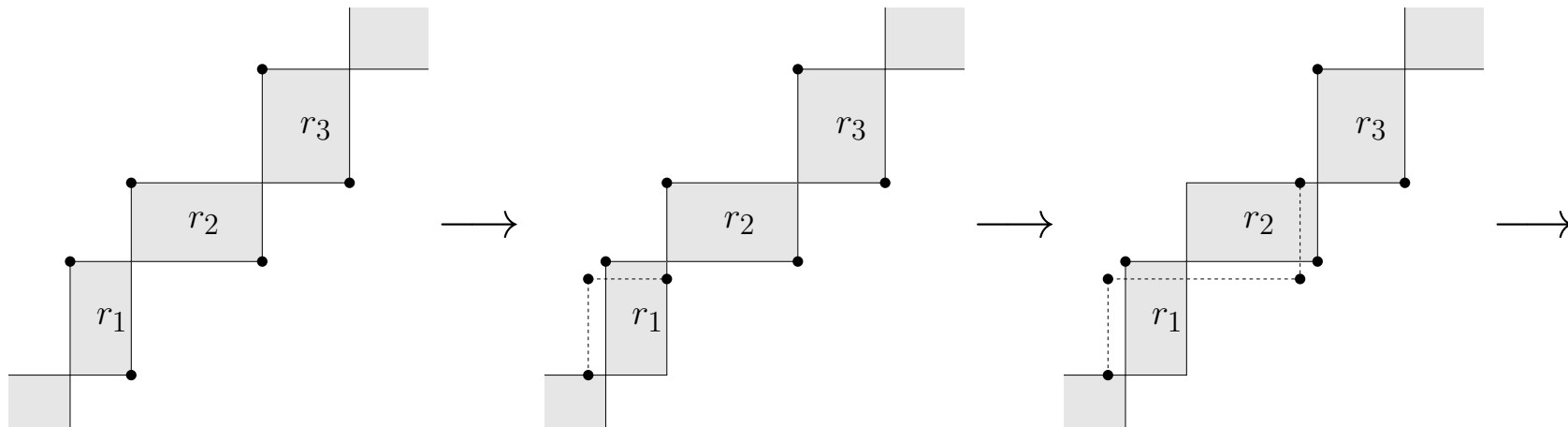
*Группа симметрий* узла  $K \subset \mathbb{S}^3$  — это фактор-группа

$$\text{Diff}(\mathbb{S}^3; K) / \text{Diff}_0(\mathbb{S}^3; K).$$



Для нашей конструкции автоматически выполнено  $\mathcal{L}_-(R_1) = \mathcal{L}_-(R_2)$ .

Для нашей конструкции автоматически выполнено  $\mathcal{L}_-(R_1) = \mathcal{L}_-(R_2)$ .





Остается проверить, что в нашем конкретном примере группа симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна.

Остается проверить, что в нашем конкретном примере группа симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна.

Для этого вычислим многочлен Александера:

$$\begin{aligned} \Delta(t) = t^{20} - t^{19} + t^{18} - 3t^{17} + 3t^{16} - 5t^{15} + 10t^{14} - 5t^{13} + 6t^{12} - 14t^{11} + \\ 15t^{10} - 14t^9 + 6t^8 - 5t^7 + 10t^6 - 5t^5 + 3t^4 - 3t^3 + t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

Остается проверить, что в нашем конкретном примере группа симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна.

Для этого вычислим многочлен Александера:

$$\Delta(t) = t^{20} - t^{19} + t^{18} - 3t^{17} + 3t^{16} - 5t^{15} + 10t^{14} - 5t^{13} + 6t^{12} - 14t^{11} + \\ 15t^{10} - 14t^9 + 6t^8 - 5t^7 + 10t^6 - 5t^5 + 3t^4 - 3t^3 + t^2 - t + 1.$$

Отсутствие симметрий следует из того, что:

- после приведения по любому простому модулю  $p$  многочлен  $\Delta(t)$  не является  $p$ -й степенью многочлена и не делится на  $(1 + t + \dots + t^d)^{p-1}$  при  $d \geq 1$ ;

Остается проверить, что в нашем конкретном примере группа симметрий узла, представленного  $R_1$  и  $R_2$ , тривиальна.

Для этого вычислим многочлен Александера:

$$\Delta(t) = t^{20} - t^{19} + t^{18} - 3t^{17} + 3t^{16} - 5t^{15} + 10t^{14} - 5t^{13} + 6t^{12} - 14t^{11} + 15t^{10} - 14t^9 + 6t^8 - 5t^7 + 10t^6 - 5t^5 + 3t^4 - 3t^3 + t^2 - t + 1.$$

Отсутствие симметрий следует из того, что:

- после приведения по любому простому модулю  $p$  многочлен  $\Delta(t)$  не является  $p$ -й степенью многочлена и не делится на  $(1 + t + \dots + t^d)^{p-1}$  при  $d \geq 1$ ;
- ни при каком  $p > 1$  многочлен  $\Delta(t^p)$  не имеет возвратного множителя степени 20 с целыми коэффициентами.