Прямоугольные многогранники в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции

Н.Ю. Ероховец
МГУ имени М.В. Ломоносова
erochovetsn@hotmail.com

(по совместным работам с В.М. Бухштабером)

Декабрьские чтения в Томске

14 декабря, 2018

(Выпуклый) многогранник P – это ограниченное пересечение конечного числа замкнутых полупространств:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a_i, x\rangle + b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Если представление неизбыточно, то гиперграни F_i задаются пересечением многогранника с соответствующими гиперплоскостями.

Эквивалентно, P задаётся как выпуклая оболочка конечного набора точек:

$$P = \mathrm{Conv}(v_1, \ldots, v_N)$$

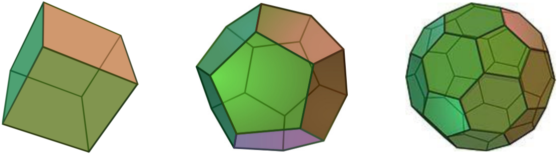
Если представление неизбыточно, то точки являются вершинами многогранника.

Многогранники

- По определению $\dim(P) = \dim \operatorname{aff}(P)$.
- Грани многогранника P – это его пересечения с опорными гиперплоскостями, для которых P лежит в одном замкнутом полупространстве.
- Каждая грань является многогранником и задаётся как пересечение содержащих её гиперграней.
- 0-мерные грани называются вершинами, 1-мерные – рёбрами, $(\dim(P) - 1)$-мерные – гипергранями.
- Вершины и рёбра образуют граф $G(P)$ многогранника.
- Многогранники P и Q комбинаторно эквивалентны, если существует биекция между множествами их граней, сохраняющая включение.
- Комбинаторный многогранник – это класс комбинаторной эквивалентности многогранников.
- Далее многогранником мы называем комбинаторный многогранник.

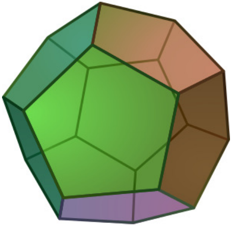
Простые многогранники

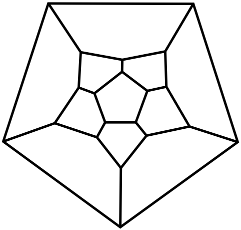
n-мерный многогранник P называется простым, если каждая его вершина принадлежит ровно n гиперграням.



(рисунки: www.wikipedia.org)

Проекция многогранника на одну из его гиперганей из близкой к ней точки даёт разбиение этой гиперграни на многогранники той же размерности – диаграмму Шлегеля





Далее по умолчанию мы будем говорить про трёхмерные многогранники и называть гранями гиперграни. Две грани смежны, если они пересекаются по ребру.

Теорема Штейница (1922)

Граф $G \subset S^2$ без петель и кратных рёбер комбинаторно эквивалентен графу трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда каждая связная компонента множества $S^2 \setminus G$ ограничена простым рёберным циклом и, если два граничных цикла пересекаются, то по вершине или ребру.

Теорема Уитни (1932)

Вложение графа трёхмерного многогранника в сферу комбинаторно единственно.

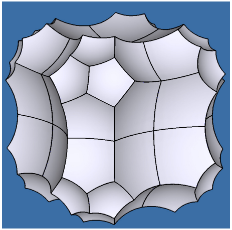
Прямоугольные многогранники

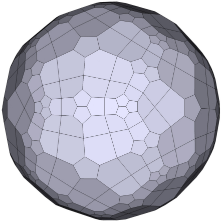
Вопрос (А.В. Погорелов, 1967)

Какие многогранники реализуются в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченных многогранников с прямыми двугранными углами?

Мотивация

Такие многогранники задают «правильное» разбиение Пространства $\mathbb{L}^3$ на равные многогранники.



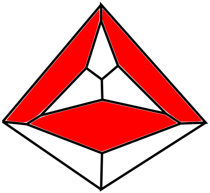


(рисунки Я.В. Кучириненко)

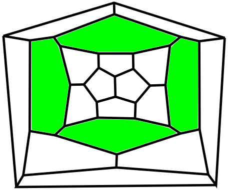
k-пояса (=k-угольные призматические элементы)

Определение

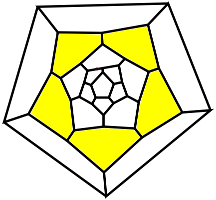
k-поясом многогранника мы называем циклическую последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие три грани не имеют общей вершины



3-пояс



4-пояс



5-пояс

Лемма

Любой простой многогранник P, кроме тетраэдра Δ^3, имеет 3-, 4-, или 5-пояс.

Теорема (А.В. Погорелов, 1967)

Многогранник $P \neq \Delta^3$ реализуется в виде ограниченного многогранника в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда P

- является простым;
- не имеет 3- и 4-поясов;
- реализуется с острыми двугранными углами.

Реализация единственна с точностью до изометрии.

Определение

Мы называем такие многогранники многогранниками Погорелова

Теорема Е.М. Андреева

Теорема (Е.М. Андреев, 1967)

Простой многогранник $P \neq \Delta^3$ реализуется в виде ограниченного многогранника в $\mathbb{L}^3$ с двугранными углами $\varphi_{i,j} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ при рёбрах $F_i \cap F_j$ тогда и только тогда, когда

- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} > \pi$ для каждой вершины $F_i \cap F_j \cap F_k$;
- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} < \pi$ для $\forall$ 3-пояса (F_i, F_j, F_k);
- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,l} + \varphi_{l,i} < 2\pi$ для $\forall$ 4-пояса (F_i, F_j, F_k, F_l);
- если $P = \Delta^2 \times I$, то $\exists$ угол при основании $< \frac{\pi}{2}$.

Реализация единственна с точностью до изометрии.

Мотивация

Классификация дискретных групп, порожденных отражениями в гиперплоскостях, действующих в пространствах Лобачевского.

Следствие 1

Простой многогранник $P \neq \Delta^3$ реализуется в $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченного многогранника с равными острыми ($<\frac{\pi}{2}$) двугранными углами $\Leftrightarrow$ у P нет 3-поясов.

Это в точности 3-мерные флаговые многогранники, то есть простые многогранники, у которых любой набор попарно смежных гиперграней имеет непустое пересечение.

Следствие 2

Простой многогранник $P \neq \Delta^3$ реализуется в $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченного многогранника с прямыми двугранными углами $\Leftrightarrow$ у P нет 3- и 4-поясов.

Это в точности многогранники Погорелова. Отметим, что из теоремы Андреева следует, что геометрическое условие в теореме Погорелова является избыточным.

Проблема 4 красок

Грани любого многогранника можно раскрасить в 4 цвета так, что смежные грани имеют разные цвета.

Определение

Многогранник $P \neq \Delta^3$ назовём многогранником Погорелова*, если у него нет 3- и 4-поясов, а любой 5-пояс окружает грань.

Теорема (Дж.Д. Биркгоф, 1913)

Для решения проблема 4 красок достаточно рассмотреть класс многогранников Погорелова*.

Проблема 4 красок была решена К.Аппелем и В.Хакеном в 1976 при помощи компьютера.

Определение

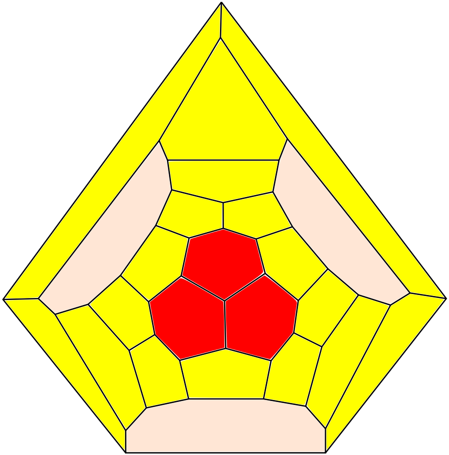
Гамильтоновым циклом называется простой рёберный цикл в графе, проходящий через все вершины.

Любой гамильтонов цикл определяет правильную раскраску многогранника в 4 цвета.

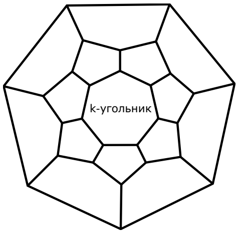
Х. Вальтер (1965) придумал пример многогранника Погорелова без гамильтоновых циклов

Пример Гринбергса

Простой пример многогранника Погорелова* без гамильтоновых циклов был предложен Е.Гринбергсом (1968)



k-бочки (многогранники Лёбелля)



k-бочка является многогранником Погорелова* для $k \geqslant 5$;

В 1931 Ф. Лёбелль при помощи склейки 8 копий 6-бочки построил первый пример замкнутого трёхмерного гиперболического многообразия.

В 1987 А.Ю. Веснин построил гиперболические многообразия «типа Лёбелля» для всех k-бочек, $k \geqslant 5$.

Конструкция А.Ю. Веснина

- Многогранник Погорелова, реализованный в $\mathbb{L}^3$ с прямыми углами, определяет прямоугольную группу Кокстера $C(P)$, порождённую отражениями в его гранях.
- Отображение Λ_2 множества граней $F_1, \ldots, F_m$ в $\mathbb{Z}_2^3$, для которого образы граней с общей вершиной линейно независимы, определяет гомоморфизм $C(P) \to \mathbb{Z}_2^m$. Его ядро $K(\Lambda_2)$ действует свободно на $\mathbb{L}^3$.
- Пример такого отображения даёт правильная раскраска в 4 цвета. Грань F_i, раскрашенная в цвет i отображается в вектор e_i, где e_1, e_2, e_2 – базис в $\mathbb{Z}_2^3$ и $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$.
- Факторпространство $\mathbb{L}^3/K(\Lambda_2)$ является гиперболическим многообразием.

Торическая топология многогранников Погорелова

Семейство многообразий называется когомологически жёстким, если для любых двух многообразий из семейства изоморфизим градуированных колец когомологий влечёт диффеоморфизм многообразий.

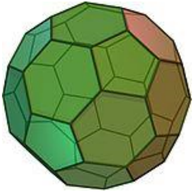
Многогранники Погорелова дают когомологически жёсткие семейства:

- $(m+3)$-мерных момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$; (F. Fan, J. Ma, X. Wang, 2015);
- 6-мерных квазиторических многообразий $M(P,\Lambda)$ и 3-мерных малых накрытий $R(P,\Lambda_2)$, совпадающих с многообразиями из конструкции А.Ю.Веснина (В. М. Бухштабер, Н. Ю Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Парк, 2017)

Фуллерены

Фуллереном называется **простой многогранник** только с 5- и 6-угольными гранями.

БакминстерфуллеренC_{60}



Усечённый икосаэдр

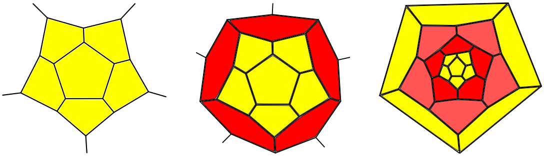
Из результатов T. Došlić (1998, 2003) следует, что

Любой фуллерен является многогранником Погорелова.

Теорема(F. Kardoš, 2014, при помощи компьютера)

Любой простой многогранник с не более чем 6-угольными гранями имеет гамильтонов цикл.

$(5,0)$-нанотрубки



1. Возьмём фрагмент C додекаэдра, изображённый слева;
2. добавим $k \geqslant 0$ пять-поясов 6-угольников;
3. снова приклеим такой же фрагмент;
4. получится фуллерен D_{5k}.

Фуллерен принадлежит семейству $\{D_{5k}, k \geqslant 0\}$ $\Leftrightarrow$ он содержит фрагмент C.

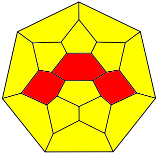
Из результатов F. Kardoš, R. Škrekovski или K. Kutnar, D. Marušič (2008) следует, что

Фуллерен не является многогранником Погорелова* $\Leftrightarrow$ он имеет вид D_{5k}, $k \geqslant 1$.

Определение (М.Деза, M. Dutour Sikirić и М.И.Штогрин)

n-диск-фуллереном нызвается простой многогранник с 5-, 6- и ровно одной n-угольной гранью, $n \neq 5, 6$.

7-диск-фуллерен, у которого 7-угольник смежен с 5-угольником назовём (7,5)-диск-фуллереном.



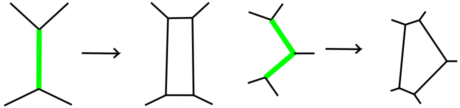
7-диск-фуллерен с минимальным числом граней

Теорема (В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, 2015)

Любой 7-диск фуллерен является многогранником Погорелова.

Теорема (В. Эберхард, 1891)

Многогранник P является простым $\Leftrightarrow$ он получается из тетраэдра Δ^3 операциями срезки вершины, ребра или пары смежных рёбер.

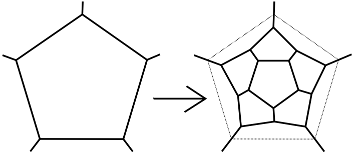


Из результатов A. Kotzig (1967) следует, что

Многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда он получается из куба I^3 операциями срезки ребра или пары смежных рёбер, не лежащих в 4- или 5-угольнике.

Связная сумма вдоль граней

Связная сумма простых многогранников P и Q вдоль k-угольных граней F и G – это комбинаторный аналог склейки двух многогранников вдоль одинаковых граней, перпендикулярных смежным граням.



Связная сумма с 5-бочкой вдоль 5-угольника.

Связная сумма многогранников Погорелова является многогранником Погорелова.

Теорема (Т.Иное, 2008)

$$\mathrm{vol}(P\#Q) \geqslant \mathrm{vol}(P) + \mathrm{vol}(Q).$$

Теорема (Д. Барнетт, 1977+В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, 2018)

- Многогранник $P \neq B_k$ является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда он получается из 5- или 6-бочки операциями срезки пары смежных рёбер, не лежащих в 5-угольнике, и связной суммы с 5-бочкой.
- Многогранник $P \neq B_k$ является многогранником Погорелова* тогда и только тогда, когда он получается из 6-бочки операциями срезки пары смежных рёбер, не лежащих в 5-угольнике.

Теорема (Т.Иное, 2008)

Операция срезки пары смежных рёбер увеличивает объём многогранника Погорелова.

Конструкция фуллеренов

Теорема (В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, 2017)

- $(5,0)$-нанотрубки являются связными суммами 5-бочек вдоль 5-угольников, окружённых 5-угольниками.
- Любой фуллерен, кроме 5-бочки и $(5,0)$-нанотрубок, получается из 6-бочки операциями срезки пары смежных рёбер 6- или 7-угольника так, что промежуточные многогранники являются фуллеренами или $(7,5)$-диск-фуллеренами.

Почти погореловские многогранники

Определение

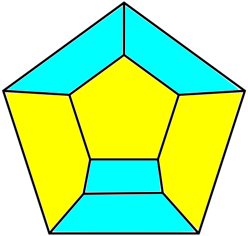
Назовём многогранник $P \neq \Delta^3$ почти погореловским, если у него нет 3-поясов, а любой 4-пояс окружает грань.

Лемма

Почти погореловский многогранник либо является кубом I^3, либо 5-угольной призмой $M_5 \times I$, либо не имеет смежных 4-угольников.

Многогранник P_8

Простой многогранник P является почти погореловским или многогранником P_8 тогда и только тогда, когда каждая его грань окружена поясом и при его внешнем обходе грани не повторяются.



P_8

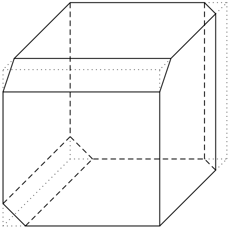
Многогранник P_8 был использован И.В.Баскаковым для построения первого примера нетривиального тройного произведения Масси в когомологиях момент-угол многообразий.

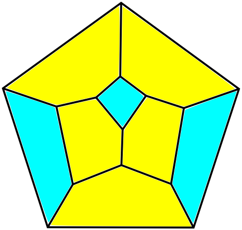
Конструкция почти погореловских многогранников

Из результатов Д.Барнетта (1974) следует

Теорема

Многогранник $P \neq I^3, M_5 \times I$ является почти погореловским тогда и только тогда, когда он получается из многогранника Сташефа As^3 операциями срезки ребра, не лежащего в 4-угольнике, или пары смежных рёбер, не лежащих в 4- или 5-угольнике.





Многогранник Сташефа As^3

Догадка Т.Е.Панова

Догадка (Т.Е. Панов, 2018)

Из результатов Е.М. Андреева следует, что почти погореловские многогранники $\approx$ прямоугольные многогранники конечного объёма в $\mathbb{L}^3$.

Вторая теорема Андреева (1970)

Многогранник P реализуется в пространстве $\mathbb{L}^3$ в виде многогранника конечного объёма с заданными двугранными углами $\varphi_{i,j} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ тогда и только тогда, когда

- его вершины имеют валентность 3 или 4;
- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} \geqslant \pi$ для каждой 3-валентной вершины;
- $\varphi_{i,j} = \frac{\pi}{2}$ для каждого ребра в 4-валентной вершине;
- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} < \pi$ для $\forall$ 3-пояса (F_i, F_j, F_k);
- $\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,l} + \varphi_{l,i} < 2\pi$ для $\forall$ 4-пояса (F_i, F_j, F_k, F_l);
- если $P = \Delta^2 \times I$, то $\exists$ угол при основании $< \frac{\pi}{2}$.
- $\varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} < \pi$, если грани F_i и F_j пересекаются по вершине, а грань F_k смежна с каждой из них, но не содержит эту вершину.

Пересечение многогранника с абсолютом состоит из 4-валентных вершин и 3-валентных вершин с суммой двугранных углов π.

Прямоугольные многогранники конечного объёма

Следствие

Многогранник P реализуется в $\mathbb{L}^3$ с конечным объёмом и прямыми двугранными углами $\Leftrightarrow$ P

- имеет вершины валентность только 3 или 4;
- не имеет 3- и 4-поясов;
- не имеет двух граней, пересекающихся по 4-валентной вершине и одновременно смежных с гранью, не содержащих эту вершину.

Пересечение многогранника с абсолютом состоит из 4-валентных вершин.

Следствие

Срезка 4-валентных вершин задаёт биекцию между многогранниками, реализуемыми в $\mathbb{L}^3$ с конечным объёмом и прямыми двугранными углами и почти погореловскими многогранниками $P \neq I^3, M_5 \times I$.

Теорема (Н.Ю. Ероховец, 2018)

- Любой почти погореловский многогранник $P \neq I^3, M_5 \times I$ получается срезкой дизъюнктного набора рёбер некоторого почти погореловского многогранника Q или многогранника P_8, производящим все четырёхугольники многогранника P.
- Срезка дизъюнктного набора рёбер почти погореловского многогранника Q или многогранника P_8 даёт почти погореловский многогранник тогда и только тогда, когда
  - либо набор состоит из одного ребра куба,
  - либо каждый 4-угольник, содержащий ребро из набора, пересекает другое ребро из набора по вершине; причём для многогранника P_8 набор должен содержать ребро пересечения двух 5-угольников.

Определение

Идеальный многогранник – это многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^3$, все вершины которого лежат на абсолюте.

Следствие

Идеальные многогранники соответствуют почти погореловским многогранникам $P \neq I^3, M_5 \times I$, все вершины которых лежат на 4-угольниках.

Идеальные многогранники

Определение

Совершенное паросочетание в графе G – это дизъюнктный набор рёбер, содержащий все вершины.

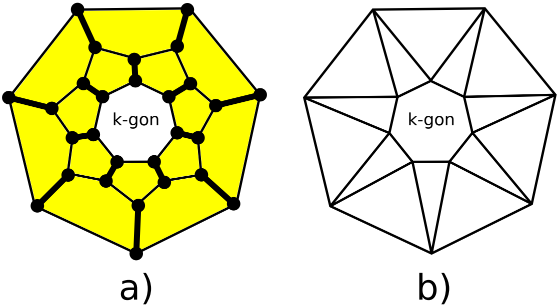
Следствие

Любой идеальный многогранник соответсвует срезке совершенного паросочетания графа почти погореловского многогранника или многогранника P_8, не содержащего двух рёбер одного 4-угольника и всякое такое паросочетание задаёт идеальный многогранник.

Совершенные паросочетания

- Из классической теоремы Петерсона (1891) следует, что простой многогранник имеет совершенное паросочетание.
- Более того, согласно результату T. Schönberger (1934) любое ребро можно дополнить до совершенного паросочетания.
- В работе L.Esperet, F.Kardoš, A.D.King, D.Kráľ, S.Norine (2011) доказано, что любой простой многогранник имеет по крайней мере $2^{\frac{|V(G)|}{3656}}$ совершенных паросочетаний.
- Совершенные паросочетания в графе фуллеренов отвечают структурам Кекуле в химии.

Идеальные многогранники



(a) Совершенное паросочетание на k-бочке, k $\geqslant$ 4.
(b) Соотвествующий идеальный многогранник является k-угольной антипризмой.

Из результатов работы А.Ю.Веснина (2017) получается

Следствие

Для любого идеального многогранника, кроме k-угольной антипризмы, существует совершенное паросочетание, такое что удаление одного из его рёбер из графа даёт совершенное паросочетание на новом почти погореловском многограннике, также отвечающее идеальному многограннику.

Литература

V.M.Buchstaber, N.Yu.Erokhovets, M.Masuda, T.E.Panov and S.Park,
Cohomological rigidity of manifolds defined by 3-dimensional polytopes,
Russian Math. Surveys 72:2 (2017), 199-256.

V.M.Buchstaber, N.Yu.Erokhovets,
Construction of families of three-dimensional polytopes, characteristic patches of fullerenes, and Pogorelov polytopes,
Izvestiya: Mathematics, 81:5 (2017), 901-972.

Nikolai Erokhovets,
Construction of Fullerenes and Pogorelov Polytopes with 5-, 6- and one 7-Gonal Face,
Symmetry 2018, 10, 67; doi:10.3390/sym10030067

A.Yu.Vesnin,
Right-angled polyhedra and hyperbolic 3-manifolds,
Russian Math. Surveys, 72(2):335 (2017), 335-374.

М.Деза, М.Дютур Сикирич, М.И. Штогрин,
Фуллерены и диск-фуллерены
УМН, 68:4(412) (2013), 69–128.