ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Научно-Образовательный Математический Центр ТГУ

Избранные математические задачи – 2026

Мехмат ТГУ приглашает на праздник!
Образовательные программы на ММФ
Задачи на проценты, прогрессии, телескопические суммы, булевы функции

ММФ в социальных сетях:

ВКонтакте: **https://vk.com/mexmat_tsu**

Telegram: **https://t.me/mmf_tsu**

Сайт для абитуриентов: **http://www.mmf-tsu.ru**

Сайт Научно-Образовательного Математического Центра ТГУ:

https://nomc.math.tsu.ru/uchitelyam-i-shkolnikam/us/den-chisla-pi/

QR-код сайта Научно-Образовательного Математического Центра ТГУ:

Томск
2026

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
И.о. зав. кафедрой общей математики, доцент Ю.А. Лобода

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ
Протокол №1 от 20.02.2026г.
Председатель комиссии доцент Е.А. Тарасов

В первой части учебно-методического пособия представлены материалы, связанные с мероприятиями ММФ ТГУ для школьников по празднованию Дня математика, Международного Дня числа пи, в частности вопросы для квиза-викторины, темы для самостоятельного исследования о числе π, правила математической игры про число π, конструирование одежды (панамы). А также представлен туториал для знакомства с современными направлениями математики по трём программам, реализуемым на механико-математическом факультете ТГУ.

Во второй части приводится задания, использовавшиеся составителями пособия при проведении занятий с учащимися 8-10 классов в летней физико-математической школе при ТГУ. Темы: задачи на проценты, на движение, задачи, связанные с теорией чисел, прогрессии, телескопические суммы, булевы функции. Задачи снабжены ответами, указаниями, решениями, ссылками на источники.

Пособие может быть полезным для школьников старших классов, учителей и преподавателей математики, студентов физико-математических и педагогических специальностей, а также для всех интересующихся математикой.

Авторы и составители:
Галанова Н.Ю., Гензе Л.В., Королева А.М., Лобода Ю.А.,
Подстригич А.Г., Францев Д.Ю.

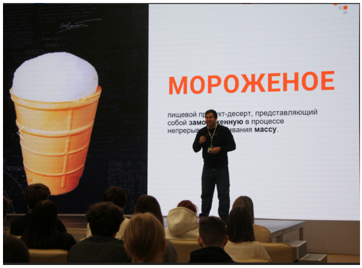
СОДЕРЖАНИЕ

МЕХМАТ ПРИГЛАШАЕТ НА ПРАЗДНИК!

Все мы любим праздники! А вы знаете, какие есть праздники, связанные с математикой? Друзья, у нас для вас хорошая новость! Появился официальный профессиональный математический праздник **День математика**, утвержденный приказом Минпросвещения Российской Федерации № 1086-р от 3 мая 2024 года, который теперь отмечается **1 декабря** и приурочен ко дню рождения российского математика, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии Николая Ивановича Лобачевского. Давайте, праздновать вместе с мехматом ТГУ!

ММФ при поддержке Регионального научно - образовательного математического центра является площадкой для проведения Всероссийского математического диктанта от «Т-образования». В 2025 г. более 100 тыс. человек приняли участие в ежегодном Всероссийском математическом диктанте. Мероприятие в преддверии Дня математика, который отмечается в стране 1 декабря, традиционно организовала образовательная платформа Т-Банка «Т-Образование» совместно с ведущими вузами. Школьники, их родители, учителя и просто любители математики собрались на офлайн-площадках в 18 городах России (на 2025 г.), а также присоединились онлайн, чтобы разделить друг с другом радость решения интеллектуальных задач! Как отметил президент группы «Т-Технологии» Станислав Близнюк, математика очень важна и лежит в основе всего – от промышленности до космоса, поэтому компания стремится популяризировать точные науки среди всех жителей России.

Ко дню математика на мехмате ТГУ стал уже традиционным **«Томский математический форум»**. В 2025 г. в нём участвовало более 130 школьников, учителя и родители. Главной особенностью форума стал его игровой формат, превративший серьезную науку в увлекательное приключение: в стратегическом квесте «Альтерра: профессиональный вызов» школьники решали нестандартные задачи; конкурс «Код разума» стал испытанием для студентов на креативность, логику и эрудицию; математический квиз был ориентирован на тех, кто любит скорость мышления, а в инженерном и астрономическом мастер - классах школьники поработали над реальными техническими задачами. Даже традиционная лекция на форуме была представлена нестандартно.



РНОМЦ – структурное подразделение ММФ ТГУ выступил **одним из партнёров XIX Всероссийского турнира по математическим боям для школьников 8-11 классов**. 420 учащихся из 35 школ страны в командах решали задачи и защищали свои решения перед соперниками и жюри.– Главная особенность математических боев – это дух единства, когда ребята работают на общий результат – прокомментировала заслуженный учитель РФ Светлана Киреенко, главный организатор турнира, преподаватель лицея при ТПУ, сотрудник РНОМЦ ТГУ и выпускница ММФ ТГУ.

$\pi =$**3,1415926535897932384626433832795...**

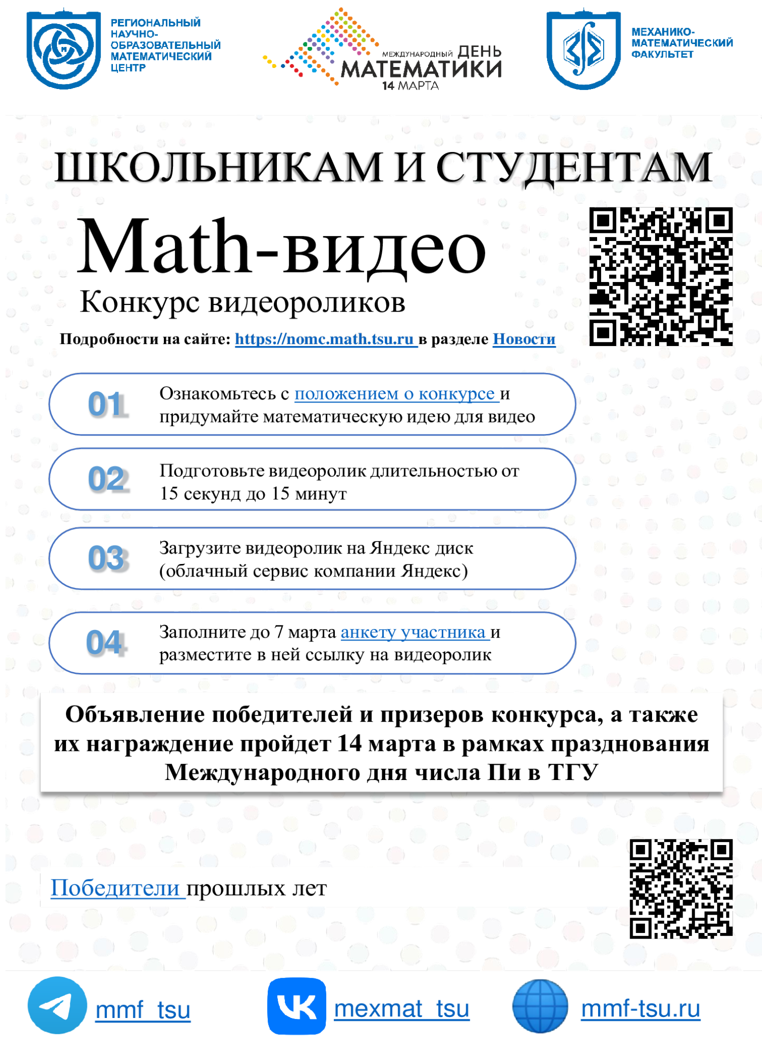
Любимый неофициальный праздник математиков – **Международный День числа** π отмечается во всём мире **14 марта** с 1987 года.

Число π – математическая константа, равная отношению длины окружности к длине её диаметра, выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Никто не знает и не может записать все цифры числа π, его приближения искали с древности. В настоящее время известно несколько сотен триллионов знаков-цифр числа π, которые используются для тестирования суперкомпьютеров. Через число π выражается длина окружности, площадь круга, число π имеет многочисленные применения в математике, физике, технике и др.

На Механико-математическом факультете ТГУ Международный День числа π отмечается 14 марта с 2012 года. Основное празднование проходит 14 марта с мастер-классами, играми, конкурсами и конечно **чаеПИтием с ПИрогами и ПИццей**. Информацию о праздновании дня числа π можно найти на сайтах ММФ в социальных сетях или воспользовавшись QR-кодом сайта Научно-Образовательного Математического Центра ТГУ:

Будем рады видеть вас на нашем ежегодном празднике – Дне числа π!

Стал уже традиционным, приуроченный ко Дню числа π, конкурс видеороликов Math-видео



Вопросы на квиз-викторину ко Дню числа пи

Раунд. «Такие разные числа».

1. Запишите четное простое число;

2. Запишите натуральное число n, представимое в виде $n = x^y = y^x$, где x, y – различные натуральные числа;

3. Запишите букву греческого алфавита, которой обозначается математическая константа, равная отношению длины окружности к длине её ее диаметра;

4. Запишите обозначение иррационального числа, равного длине гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами;

5. Запишите мнимую единицу;

Раунд. Вычислительный. «Вокруг числа Пи».

1. Мобильный робот получил команду сделать 100 оборотов колеса. Диаметр колеса 1/2 метра. Какое расстояние L пройдёт робот по прямой?

2. Путешественник обошёл Планету по экватору. На сколько голова путешественника «пройдёт» больший путь, чем его ноги, если Планета имеет форму шара, экватор – окружность радиуса R, рост путешественника – h.

3. На Юпитере и на Венере один и тот же астронавт обходит планету по экватору. На какой из планет разность между длиной пути, «пройденным» головой астронавта и длиной пути пройденным его ногами, больше? Варианты ответа: на Юпитере разность больше чем на Венере, На Венере разность больше чем на Юпитере, Разность одинаковая.

4. Какое из приближений числа Пи точнее:
$3,14$ – как сейчас в школе

$\frac{22}{7}$ – Архимед (III век до н. э.) – древнегреческий математик, физик и инженер;

$\frac{355}{113}$ – Цзу Чунчжи (V веке н. э.) – китайский астроном и математик;
$\frac{377}{120}$ – Ариабхата (V веке н. э.) – индийский астроном и математик;

Раунд. «Термины и не только».

1. Геометрическое место точек на плоскости равноудалённых от данной точки.

2. На древнегреческом – $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$, на русском – поперечник. Какой математический термин соответствует этому слову?

3. В 1706 году в книге «Новое введение в математику» британского ученого Уильяма Джонса для обозначения $3,141592...$ впервые была использована буква греческого алфавита π. Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов «$\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$» и «$\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$». Как эти термины звучат на уроках геометрии?

4. Геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от данной точки.

5. Именно этим словом древние римляне называли спицу в колесе.

6. С латинского языка слово «circus» переводится как ... ?

Раунд. «Древние гипотезы» (истинно, ложно или нерешённая проблема на 2026 год ?)

1. **Гипотеза Кеплера**, сформулированная в XVII веке, утверждает, что наиболее плотная упаковка сфер в трехмерном пространстве достигается путем укладки их в виде гранецентрированной кубической решетки. 2. **Гипотеза Пуанкаре** была сформулирована французским математиком и физиком Анри Пуанкаре в 1904 году. По сути гипотеза утверждает, что поверхность сферы односвязна, а поверхность тороида – нет. Поверхность – односвязна, это значит каждый контур лежащий на поверхности можно снять с этой поверхности не разрывая (стянуть в точку). 3. **Гипотеза Бюффона** о бросании иглы. На разлинованную равноудалёнными прямыми плоскость произвольно бросается игла, длина которой равна расстоянию между соседними прямыми, так что при каждом бросании игла либо не пересекает прямые, либо пересекает ровно одну. Тогда отношение числа пересечений иглы с какой-нибудь линией к общему числу бросков стремится к числу $\frac{2}{\pi}$ при увеличении числа бросков до бесконечности. 4. **Гипотеза Гольдбаха** гласит: «Каждое чётное число (больше двух) является суммой двух простых чисел».

ОТВЕТЫ.

Раунд. Вычислительный. «Вокруг числа Пи».

1. $L = 100$ длин окружности радиуса $1/2 = 100\pi = 314,15\ldots$ м.; **2.** $2\pi h$; **3.** одинаковая и равна $2\pi h$. **4.** $\frac{355}{113}$ – Цзу Чунчжи (V веке н. э.) – китайский астроном и математик. Сравнение точности приближений: $\pi = 3,14159265\ldots$ $\frac{22}{7} = 3,14285714\ldots$ 2 разряда после запятой; $\frac{377}{120} = 3,14166667\ldots$ 3 разряда после запятой; $\frac{355}{113} = 3,14159292\ldots$ 6 разрядов после запятой.

Раунд. «Термины и не только». 1. Окружность; **2.** Диаметр; **3.** Окружность и периметр; **4.** Сфера; **5.** Радиус; **6.** Окружность.

Раунд. «Древние гипотезы». 1. Эта гипотеза была доказана Томасом Хейлсом в 1998 году с помощью компьютерного моделирования и анализа. Спустя 400 лет! Для пространств большей размерности есть как решённые, так и нерешённые случаи. **2.** Формулировка гипотезы – всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере. Российский математик Григорий Перельман решил эту задачу в 2002–2003 годах. Для этого он использовал методы дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений. В 2006 году было вынесено решение – доказательство Перельмана верно, а гипотезу Пуанкаре следует считать доказанной. За это Перельману присудили премию Филдса, однако принять её он отказался. **3.** Ответ: да, гипотеза верна и она доказана!!! Приходите на мехмат изучать тервер!!! **4.** Вы можете проверить это в уме для небольших чисел: 18 — это 13+5, а 42 — это 23+19. Компьютеры проверили гипотезу для чисел до определённой величины. Но нам нужно доказательство для всех натуральных чисел. Гипотеза Гольдбаха была выдвинута в 1742 году в переписке между немецким математиком Кристианом Гольдбахом и легендарным швейцарским и русским математиком Леонардом Эйлером, которого считают одним из величайших математиков в истории. По словам Эйлера, «я считаю [это] абсолютно достоверной теоремой, хотя и не могу её доказать». Нерешённая проблема!

Темы исследования про число π

ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН (1900-1600 гг. до н.э.)

Загадка 1: «Вавилонская загадка». В чём магия числа 6, обнаруженная вавилонскими учёными? Как объяснить рецепт нахождения длины хорды, известный халдеям, с помощью современной математики? Какие значения для числа π использовали в древнем Вавилоне? Подсказка: их вычисления площади круга таятся в древних глиняных табличках.

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ (около 1600 года до н.э.)

Загадка 2: «Чудо Древнего Египта». Как архитектор, строивший пирамиды, смог бы измерить площадь круга с помощью веревки, если единственное, что он знает, – это дроби и примитивная геометрия? Подсказки: в папирусе Ринда есть рецепт для нахождения площади круга, в нём зашифровано приближение числа π. Известный египетский рецепт – приближение площади круга площадью квадрата со стороной, равной $8/9$ диаметра.

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ (около 3-го века до н.э.)

Загадка 3: «Секрет Архимеда». Как древний грек мог определить, что длина окружности связана с ее диаметром, если инструментов почти не было? В чём секреты Архимеда приближённого вычисления числа π? Подсказки: Архимед использовал вписанные и описанные многоугольники для вычисления числа π. Чем больше сторон у многоугольника, тем точнее приближение.

ДРЕВНЯЯ ИНДИЯ (от 800 г. до н.э. до 200 г. н.э)

Загадка 4: «Мудрецы Древней Индии». Как древний индийский математик мог описать длину окружности, используя только стихи и числа, которые легко запомнить? Подсказки: в трактате «Сиддхант», в трактате индийского астронома и математика Ариабхаты и других трактатах приводятся расчеты, связанные с числом π. Индийские математики использовали числа в форме стихов для упрощения запоминания.

ДРЕВНИЙ КИТАЙ (3-й век н.э.)

Загадка 5: «Тайна Китая». Как китайский ученый мог вычислить значение числа π с потрясающей точностью, если у него было только чернильное перо и бамбуковые палочки для записей? Подсказки: китайцы, такие как Лю Хуэй, использовали метод увеличения количества сторон многоугольников, чтобы получить точное значение, при этом был придуман специальный алгоритм для вычислений. Для 3072-угольника они приблизили π до 3,1416.

СРЕДНИЕ ВЕКА (5 в.-16 в. н.э.)

Загадка 6: «Средневековый поиск». Почему в средневековой Европе число π стало «забытым», каким образом ученые, такие как Виет (1540-1603) снова возвратили его в научный мир?

Подсказки: В Средние века интерес к античным открытиям затих, но затем был возрожден. Франсуа Виет нашел способ выразить π через бесконечные произведения.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА (20 в., 21 в. н.э.)

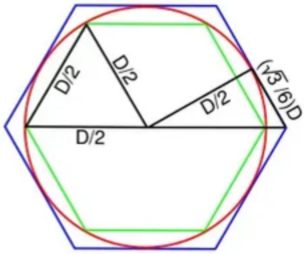
Загадка 7: «Компьютерные гонки за числом π». Почему с изобретением компьютеров вычисление числа π стало состязанием среди ученых, и какую роль в этом сыграли алгоритмы?

Подсказки: современные методы вычисления π базируются на численных алгоритмах, таких как, например, алгоритм Монте-Карло. Некоторые ученые нашли π через вероятность (например, бросание иголок).

ВАША ЗАГАДКА, СВЯЗАННАЯ С ИСТОРИЕЙ ЧИСЛА π. Загадка 8: «Свой вариант». Укажите исторический период, народ или ученых, занимавшихся задачами, связанными с числом π; расскажите, какие вопросы были им непонятны и как их решили. Подсказки: читайте книги про число π!

Литература для подготовки исследования

1. Жуков А. В. Вездесущее число «пи». – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
2. Хоакин Наварро. Секреты числа π. Почему неразрешима задача о квадратуре круга. Мир математики: Том 7. Изд-во DeAgostini, 2014.–144 с.
3. Шумихин С., Шумихина А. Число π. История длиною в 4000 лет.- М.: Эксмо, 2011. – 192 с.

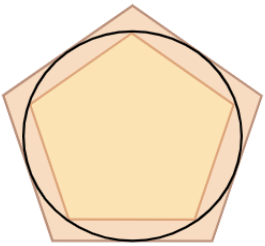


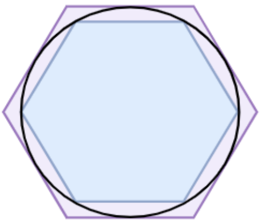
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

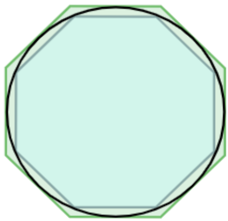
$$e^{i\pi} = -1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$







Игра про число π -2025

«Собери число π в Дек»

Зюбин Влад, МАОУ СОШ № 32, г. Томск, 9 Б класс

Дек (deque, double-ended queue) – в информатике двусторонняя очередь (сокращённо deque, DEK) – это абстрактный тип данных, обобщающий очередь, в которую элементы могут добавляться или удаляться как с начала (head), так и с конца (tail).

Кто может играть

Количество игроков неограничено. Только рекомендуется увеличивать количество раундов с ростом числа игроков для разнообразия результатов (см. далее *Правила игры*).

Что потребуется

1. Кубик с 10 гранями или генератор случайных чисел от 0 до 9 (просто найдите в интернете любой бесплатный или скачайте приложение). Если у вас всё же случайно оказался под рукой кубик, то считайте, что 10 это 0.

2. По одному листу бумаги на каждого играющего.

3. Ручка.

В чём суть игры

Составить число, максимально приближенное к числу π.

Правила игры

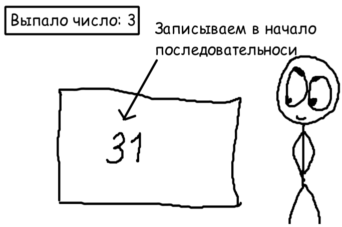
1. Вся игра состоит из маленьких раундов, вы сами вольны выбирать их число, но один совет: если вас двое, то проводите 15 раундов, с увеличением числа людей на одного человека, увеличивайте количество раундов на 2-3.

В начале каждого раунда один раз бросается кубик (генерируется число).

2. В первом раунде каждый записывает цифру к себе на листок (и не показывает другим).

3. В остальных раундах вы можете сделать одно из действий:

3.1 Добавить выпавшую на кубике цифру в начало своей последовательности:



3.2 Добавить выпавшую на кубике цифру в конец последовательности:

3.3 Удалить выпавшую на кубике цифру из последовательности (если такая цифра есть). В этом случае просто зачеркните выпавшую на кубике цифру в любом месте вашей последовательности на свой выбор:

4. У вас обновилась последовательность цифр! Продолжайте раунды далее, пока каждый не получит свою последовательность.

5. В конце, поставьте после самой левой цифры (между второй и первой цифрой) в последовательности точку (или запятую). У вас получилось какое-то число! (зачёркнутые цифры в числе не учитываются). Теперь сравните числа друг друга с числом π. Победит тот игрок, чьё число (без округлений) будет самым близким к числу π.

$3,0129$
$\pi =$**3,14159265358979323846264338327 95...**

Удачи!

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ НА ММФ

ПУТЕШЕСТВИЕ НА КАФЕДРЫ ММФ

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Козловская Татьяна Анатольевна

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ГЕОМЕТРИИ ММФ ТГУ
СТАРШИЙ НАУЧНЫЙ СОТРУДНИК НОМЦ ТГУ

Кафедра геометрии: ВИДЕО

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Гурина Елена Ивановна

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ММФ ТГУ
ИНЖЕНЕР НОМЦ ТГУ

Кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования: ВИДЕО

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Пчелинцев Евгений Анатольевич

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ММФ ТГУ

Кафедра математического анализа и теории функций (теория вероятности и математическая статистика): ВИДЕО

ПУТЕШЕСТВИЕ НА КАФЕДРЫ ММФ

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Лазарев Вадим Ремирович

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ММФ ТГУ

Кафедра математического анализа и теории функций (функциональный и комплексный анализ): ВИДЕО

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Мирошниченко Игорь Валерьевич

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ММФ ТГУ
СТАРШИЙ НАУЧНЫЙ СОТРУДНИК НОМЦ ТГУ

Кафедра теоретической механики: ВИДЕО

ПРЕЗЕНТАЦИИ КАФЕДР ММФ

Лобода Егор Леонидович

ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ММФ ТГУ

Кафедра физической и вычислительной механики: ВИДЕО

ТУТОРИАЛЫ

Машинное обучение простым языком. Ч.1
Машинное обучение простым языком. Ч.2

Построение финансовой стратегии для опциона

Теплообмен в повседневной жизни

Кейс «Знакомство с пакетом OpenFOAM»

Туториалы погружают в направления подготовки, реализуемые на механико-математическом факультете, и помогают заложить фундамент будущей учебы и работы в области теоретической и прикладной математики. После прохождения этого модуля Вы:

1) Получите представление о том, **чем занимается современная математика**;

2) Сравните несколько специальностей, относящихся к современной математике и ее приложениям, **и выберете ту, которая больше подходит Вам.**

РАБОЧАЯ ПРОФЕССИЯ НА ММФ – «Помощник программиста»

Код профессии 06.001 (по приказу от 20.07.2022 № 424н)
Квалификационный разряд: 3

Трудоемкость: 148 ч.
Форма обучения: очная.
Чем занимается помощник программиста: разработка, отладка, проверка работоспособности, модификация компьютерного программного обеспечения.

ПРОФЕССИЯ «ПРЕПОДАВАТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ» НА ММФ – УЧИТЕЛЬСКИЙ ТРЕК

В рамках направлений 01.03.01 «Математика» (профиль «Современная математика и математическое моделирование») и направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» (профиль «Вычислительная математика и компьютерное моделирование») на ММФ реализуется учительский трек. Это означает, что студенты первые 2 года получают фундаментальную математическую подготовку наравне с будущими исследователями и аналитиками, а с третьего курса углубленно изучают спецкурсы трека для присвоения квалификации "Математик. Преподаватель". В этом году двое студентов ММФ, работающих учителями в школах города получили стипендиальную поддержку Эндаумент фонда.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ МАГИСТРАТУРА НА ММФ – «МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЦИФРОВЫЕ ДВОЙНИКИ»

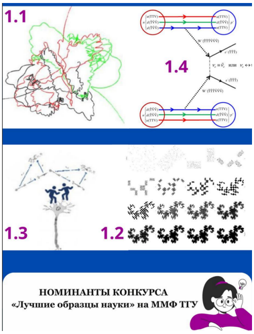
Профессиональная магистратура «Моделирование и цифровые двойники» («Simulation and DTwins»). Это программа для тех, кто хочет работать с цифровыми двойниками – виртуальными копиями реальных объектов и процессов, помогающими оптимизировать производство, прогнозировать неисправности и снижать затраты на их профилактику и устранение.

Навыки, которые получат студенты, уже сейчас востребованы в энергетике, транспорте, промышленности и здравоохранении.

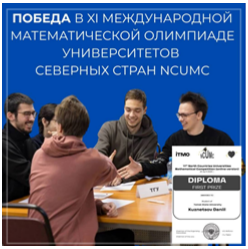
Подробности в телеграм-канале:

Из ЖИЗНИ МЕХМАТА -несколько штрихов!

8 февраля – День науки!– конкурс научных работ ММФ –



– студенческие олимпиады –



– выпускные квалификационные работы –

–

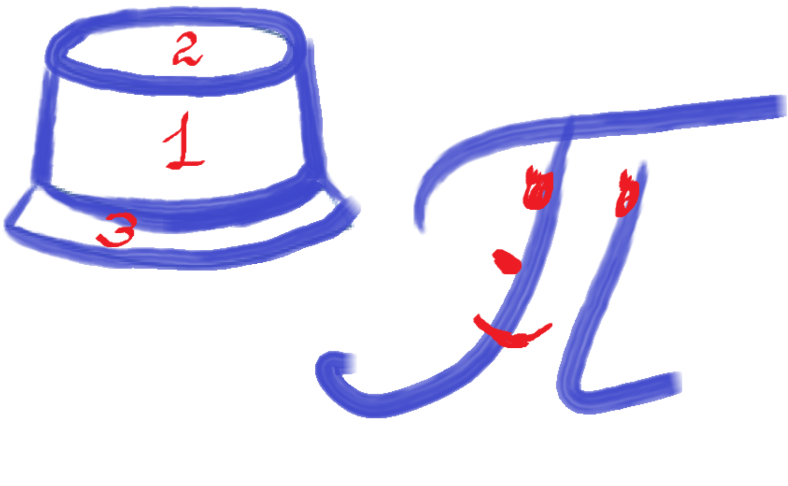
семинары и математические гостиные для студентов

– стажировки – работодатели – реальные перспективы трудоустройства после окончания ММФ!!!

Традиционные места прохождения практик вне г. Томска: РФЯЦ ВНИИТФ (https://vniitf.ru/) (г. Снежинск, Челябинская область), РФЯЦ ВНИИЭФ (https://vniief.ru/) (г. Саров, Нижегородская область), ИТЭБ РАН (г. Пущино, Московская обл.)

ЧИСЛО ПИ В ПАНАМЕ

Число Пи широко используется в конструировании одежды. Приведем **простые вычисления с использованием числа Пи для построения выкройки головного убора – панамы.** Выкройка панамы включает в себя детали **донышка, тульи и полей.** Для построения **нужна одна мерка — обхват головы ОГ.** Пусть, при измерении обхват головы ОГ получился 54 см.

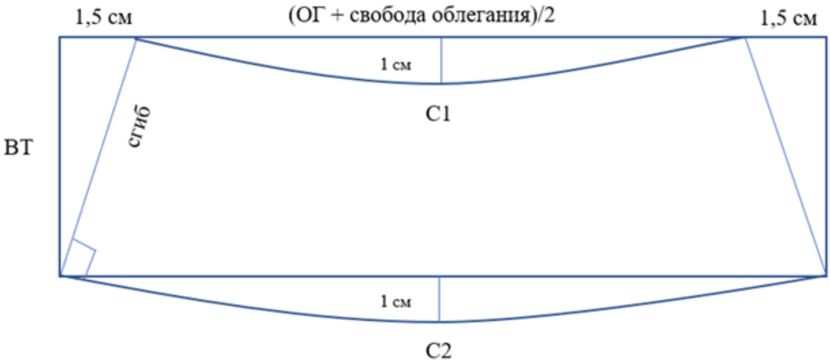


1 – тулья панамы

2 – донышко панамы

3 – поля панамы

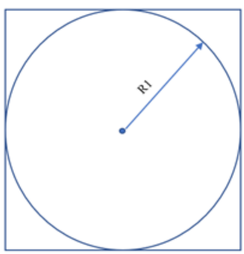
1. Построим тулью – боковую часть панамы, соединяющую донышко и поля. Возьмем высоту тульи ВТ равной 9 см. Будем строить деталь со сгибом – не всю тулью, а половину. На листе бумаге строим прямоугольник. Берем длину прямоугольника 1/2 (ОГ+2 см на свободу облегания), т.е. (54+2)/2=28 см. Ширина прямоугольника равна высоте тульи ВТ=9 см.



Сверху панама должна быть уже, поэтому с каждой из сторон сверху убираем по 1,5 см. Соединяем точки, у нас получилась трапеция. Теперь из середин верхнего и нижнего основания полученной трапеции откладываем вниз по 1 см. Плавными линиями соединяем точки. Все четыре уголка должны быть прямыми.

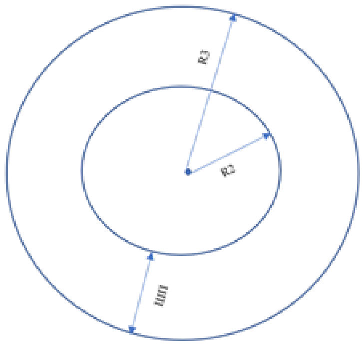
2. Построим донышко панамы – это верхняя круглая часть (круг) панамы, радиус которого можно выразить из формулы длины окружности: $C = 2\pi R$.

Измеряем длину C_1 верхней дуги тульи с помощью сантиметровой ленты, ставя ленту «на ребро». Для наших измерений $C_1 = 24$ см. Тогда длина окружности донышка будет равна $C = 2C_1$ и радиус донышка: $R_1 = \frac{2 \cdot C_1}{2\pi} = \frac{2 \cdot 24}{2 \cdot 3{,}14} \approx 7{,}6$ см.



3. Построим поля панамы. Измеряем длину C_2 нижней дуги тульи с помощью сантиметровой ленты, ставя ленту «на ребро». Для наших измерений $C_2 = 27$ см. Тогда длина окружности донышка будет равна $C = 2C_2$ и радиус донышка: $R_2 = \frac{2 \cdot C_2}{2\pi} = \frac{2 \cdot 27}{2 \cdot 3{,}14} \approx 8,6$ см.

Радиус внешнего круга R_3 равен сумме радиуса внутреннего круга R_2+ширина полей. В нашем случае ширину полей возьмем равными 6,5 см, т.е. имеем $R_3 = R_2 + \textit{ШП} = 8,6 + 6,5 = 15,1$см. Чтобы получились поля, нужно вырезать внутренний круг радиуса R_2.

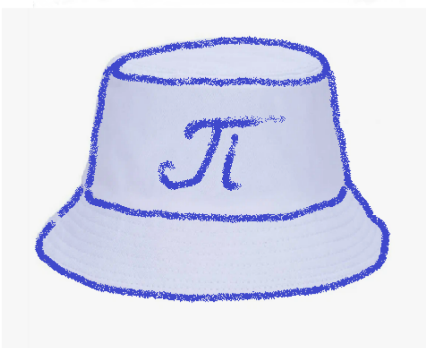


После построения выкройку нужно перенести на ткань.

Не забудьте добавить 8–10 мм на припуски.

Выкройка готова!

А, вот и панама! Привет!!!



Мехмат в летней физико-математической школе при ТГУ

1 Задачи на проценты, на движение

1.1. Два пешехода вышли навстречу друг к другу и встретились через 3 часа. За сколько времени пройдет все расстояние каждый, если первый пришел в то место откуда вышел второй на 2,5 часа позже, чем второй в то место, откуда вышел первый?

1.2. Предприятие повысило цену товара на 25%. На сколько процентов оно должно ее понизить, чтобы вернуться к первоначальной цене?

1.3. В мешке с сахаром образовалась дырка, через которую в 1-ю минуту высыпалась 1/5 часть сахара, во вторую - 1/6 часть остатка и т. д. В каждую k-ю минуту высыпалась $1/(4+k)$ часть оставшегося сахара. Какая часть сахара останется в мешке через пол часа?

1.4. Два приятеля собрались на охоту. Их дома отстоят от базы на 18 км. и 33 км., причем первый живет между базой и домом второго. Они отправились одновременно: сначала навстречу друг другу(первый на своей машине, второй пешком). После того как приятели встретились, они ехали к базе на машине. Всего они добирались до базы час. Если бы второй вышел на час раньше, они встретились бы в 6 км от дома второго. Определите скорость движения машины.

1.5. Вклад в банке обратился по истечении года в 1365 руб. (проценты начислялись по истечении срока хранения). Если бы вклад был на 200 руб. больше, а приносил на 1% меньше, то через год он обратился бы в 1560 руб. Каков был вклад и сколько процентов годовых выплачивал банк?

1.6. Сколько нужно смешать 5% серной кислоты и 30% серной кислоты, чтобы получить 10 литров 10% кислоты?

1.7. Сколько воды нужно добавить к 30 литрам 30% серной кислоты, чтобы уменьшить концентрацию кислоты в 10 раз?

1.8. Сколько 5% серной кислоты нужно добавить к 30 литрам 30% серной кислоты, чтобы уменьшить концентрацию кислоты в 5 раз?

1.9. На сколько процентов возрастет выпуск продукции предприятия после того, как производительность труда возрастет на 20%, а численность рабочих на 10%.

1.10. Два ежа устроили состязание по скоростному бегу. Первый на своем пути не встретил никаких препятствий, а на пути второго оказались две огромные черепахи, и он не сворачивая, побежал по их спинам. Одна черепаха длиной 1 м. двигалась ему навстречу со скоростью 6 см/мин., а другая длиной 0.5 м., двигалась со скоростью 16 см/мин, в том же направлении что и еж. Оба ежа затратили на пробег одинаковое время. Кто из них был лучшим бегуном? Попробуйте обобщить задачу, если второй ёж встретил m черепах.

1.11. Пять рыбок могут жить в аквариуме, куда поступает кислород, – 2 дня, три рыбки – 4 дня. Сколько времени могут жить в этом аквариуме две рыбки, если кислород поступает равномерно и с одинаковой скоростью, а рыбки вдыхают и тот кислород, который был, когда их поместили в аквариум, и тот который поступил за время их пребывания в аквариуме? А полторы рыбки (рыбка и малёк)? А одна рыбка?

1.12. Из сосуда, наполненного до краев чистым глицерином, отлили 2 литра и затем долили сосуд водой. После тщательного перемешивания отлили из сосуда 2 литра смеси и долили сосуд водой. Затем тщательно перемешали и снова отлили из сосуда 2 литра смеси и дополнили сосуд водой. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше оставшегося в нем глицерина. Найдите объем сосуда.

1.13. (Доп.) Решить уравнение: $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$.

1.14. *Задача-исследование.* Петя и Вася опаздывают на самолёт. После досмотра они одновременно побежали по аэропорту кратчайшим путём к выходу на посадку, расталкивая других пассажиров. Их скорости постоянны. На пути Пети встретилось m горизонтальных "дорожек"длины L_j, движущихся с постоянной скоростью w_j (если дорожка движется по ходу движения Пети, то $w_j > 0$, если противоположно, то $w_j < 0$ и Петя бежит по всем этим двум видам дорожек). Вася не встретил на своём пути никаких значимых препятствий. К выходу на посадку мальчики прибежали одновременно. Кто лучший бегун Петя или Вася в зависимости от известных длин и скоростей "дорожек"?

Ответы, указания, решения

1.1. Пусть S – все расстояние. V_1 – скорость первого, V_2 – скорость второго, t_1 – время, затраченное первым на весь путь, t_2 – время, затраченное на весь путь вторым.

Тогда $\begin{cases} S = 3(V_1 + V_2); \\ \frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} + 2,5; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}; \\ t_1 = t_2 + 2,5; \end{cases}$

Из системы, $t_2^2 - 3,5 \cdot t_2 - 7,5 = 0$, $t_2 = 5$ ч; $t_1 = 7,5$ ч.

1.2. Пусть цена товара равна 100 каких-нибудь денежных единиц. После повышения цены на 25% она составит 125 таких единиц. Теперь уменьшим цену на 25 единиц, но 25 единиц составляют только 20% от 125. Ответ: на 20%.

1.3. Оставшийся сахар можно записать в виде:

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{34}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{33}{34} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}.$$

1.4. Пусть V_1 – скорость автомобиля, V_2 – скорость пешехода, t_1 – время автомобиля до встречи с пешеходом, t_2 – время автомобиля от встречи до базы. Тогда

$$(V_1+V_2)\cdot t_1 = 15; t_1+t_2 = 1; V_1\cdot t_2 = 18; V_2\cdot(t_3-1) = 6; V_1\cdot t_3 = 9.$$

где t_3 – время, которое затратил бы автомобиль на путь до встречи, если бы второй вышел на час раньше.
$V_1^2 - 18 \cdot V_1 - 45 \cdot 9 = 0; D = 36^2; V_1 = 27$ км/ч; $V_2 = 4,5$ км/ч; $t_1 = \frac{1}{3}$ ч.

1.5. Пусть вклад в банке составлял x рублей, годовая процентная ставка $p\%$, $\begin{cases} x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1365; \\ (x + 200)\left(1 + \frac{p-1}{100}\right) = 1560; \end{cases}$

Из второго уравнения:

$(x + 200)(100 + p - 1) = 156000, (x + 200)(99 + p) = 156000;$

тогда, $\begin{cases} 99 \cdot x - 198000 + px + 200p = 156000; \\ 100x + px = 136500; \end{cases}$

вычитая из первого уравнения второе, получим

$-x + 19800 + 200p = 19500;\ x = 100(2p + 3);$

$2p^2 + 203p - 1065 = 0;$

$D = (203)^2 - 8 \cdot 1065 = 41209 + 8520 = 49729 = (223)^2;$

Ответ: $p = 5\%$, $x = 1300$ руб.

1.6. Концентрация вещества в растворе – это доля вещества в растворе выраженная в процентах. Т.е., если в n литрах раствора содержится m литров вещества, то концентрация этого вещества в растворе вычисляется по формуле $k = \frac{m}{n}100\%$. Возьмем x литров 5% серной кислоты и y литров 30% кислоты, тогда по формуле получим: $x + y = 10$,

$\frac{\frac{x}{100} \cdot 5 + \frac{y}{100} \cdot 30}{x+y} \cdot 100\% = 10\%$, отсюда, $x = 8$ литров, $y = 2$ литра.

1.7. В 30 литрах 30%-й серной кислоты содержится $\frac{30 \cdot 30}{100} = 9$ литров концентрированной кислоты. Если добавить литров воды,то количество кислоты не изменится и будет составлять 3% нового раствора. Стало быть по формуле $\frac{9}{30+x} \cdot 100\% = 3\%$. Тогда $x = 270$ литров.

1.8. В литрах 5%-й серной кислоты содержится $\frac{5x}{100} = \frac{x}{20}$ л концентрированной кислоты, так, что в $x + 30$ литрах смеси будет $9 + \frac{x}{20}$ литров кислоты. Это составляет 6% смеси, так, что по формуле получим $\frac{9 + \frac{x}{20}}{30+x}100\% = 6\%$, тогда $x = 720$ литров.

1.9. Пусть исходный выпуск продукции = Q, исходная производительность труда = P, исходная численность рабочих = N. Тогда исходный выпуск: $Q = P \cdot N$. После изменений: новая производительность: $P_1 = (1 + A)P = 1,2P$, (рост на $A\%$), новая численность: N_1= $(1 + B)N = 1.1N$, (рост на $B\%$), новый выпуск: $Q_1 = P_1 \cdot N_1 = 1.2P \cdot 1.1N = 1.32PN = 1.32Q$, процент роста выпуска:

$$\frac{Q_1}{Q}100\% - 100\% = \left(\frac{Q_1}{Q} - 1\right)100\% = \left(\frac{APNB}{Q} - 1\right)100\% =$$
$$= (AB - 1)100\% = (1.32 - 1)100\% = 32\%$$

Ответ: выпуск продукции возрастет на $(AB - 1)100\% = 32\%$.

1.10. Пусть S – длина дистанции, которую бежали ежи, V_i – скорость i-го ежа, m – количество черепах, w_j – скорость j-й черепахи (если черепаха идёт навстречу ежу – скорость отрицательная, если в одну с ежём сторону – положительная), L_j – длина j-й черепахи. Так как второй ёж добежал своими ножками до конца дистанции, то считаем, что его скорость больше модуля скорости каждой из черепах. Нужно сравнить скорости ежей V_1 и V_2. Найдем время, которое затралил второй еж пока бежал по j-й черепахе: $t_j = \frac{L_j}{V_2}$. Найдём расстояние, которое прошла j-я черипаха, пока второй еж по ней бежал: $s_j = t_j \cdot w_j = \frac{L_j \cdot w_j}{V_2}$ (положительное или отрицательное). Найдем ту часть длины дистанции, которую преодолел второй ёж, находясь на j-й черепахе - это длина черепахи плюс расстояние, которое она прошла: $L_j + s_j$. Зная, что оба ежа прибежали в одно время, составим уравнение, приравнивая время пробега дистанции для двух ежей:

$$\frac{S}{V_1} = \frac{S - \sum\limits_{j=1}^{m}(L_j + s_j)}{V_2} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} L_j}{V_2} = \frac{S - \sum\limits_{j=1}^{m} s_j}{V_2};$$

$$\frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2} = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{m} s_j}{V_2}; \; S \cdot \frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{L_j \cdot w_j}{V_2}}{V_2};$$

Выводы делаются в зависимости от знака выражения:

$sign(V_2 - V_1) = sign\left(-\sum_{j=1}^{m} L_j w_j\right)$.

При числовых значения $m = 2$, $L_1 = 1$м., $w_1 = -6$см./мин., $L_2 = 0.5$м., $w_2 = 16$см./мин., получим: $sign(V_2 - V_1) = sign(-200)$, $V_1 > V_2$.

1.11. Пусть V – первоначальный объем кислорода; h – количество кислорода, поступающего за 1 день; p – сколько кислорода вдыхает 1 рыбка за 1 день; $m = 5$ рыбок могут жить в аквариуме, куда поступает кислород, – $a = 2$ дня, $n = 3$ рыбки – $b = 4$ дня, тогда $\begin{cases} map = V + ah, \\ nbp = V + bh. \end{cases}$

Решая систему, находим $p = \frac{a-b}{(am-nb)} h = h$, $V = amh - ah = a(m-1)h = 8h$. Для k рыбок и t дней: $kpt = V + ht$, подставляя p и V, получим, $kht = 8h + ht$, $t = \frac{8}{k-1}$. Для 2 рыбок: $t = 8$ дней. Для "полторы рыбки": $t = 16$ дней. Для одной рыбки: уравнение $t = \frac{8}{k-1}$ дает, что одна рыбка живет бесконечно долго (кислорода поступает столько же, сколько тратит одна рыбка).

1.12. Пусть объем сосуда x л. После первого переливания стало глицерина: $(x-2)$, воды: 2. После второго переливания, глицерина: $(x-2) - \frac{2}{x}(x-2)$, воды: $2 - \frac{4}{x} + 2$. После третьего – глицерина: $(x-2)(1-\frac{2}{x}) - \frac{2}{x}(x-2)(1-\frac{2}{x}) = (x-2)(1-\frac{2}{x})(1-\frac{2}{x})$, воды: $4(1-\frac{1}{x}) - \frac{2}{x}4(1-\frac{1}{x}) + 2 = 4(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x}) + 2$; зная, что воды в сосуде стало на 3 литра больше оставшегося в нем глицерина, составим уравнение: $(x-2)(1-\frac{2}{x})(1-\frac{2}{x}) + 3 = 4(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x}) + 2$; $(x-2)^3 + x^2 = 4(x-1)(x-2)$; $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$, $(x-1)(x-4)^2 = 0$. Ответ: $x = 4$ литра.

1.13. Уравнение $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$. Переносим все в одну сторону: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$. Это возвратное уравнение. Делим на x^2: $x^2 + 2x - 13 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Замена $t = x + \frac{1}{x}$. Тогда $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, и уравнение становится: $t^2 + 2t - 15 = 0$. Корни $t = 3$ и $t = -5$. Далее решаем $x + \frac{1}{x} = 3$ и $x + \frac{1}{x} = -5$.

2 Задачи, связанные с теорией чисел

2.1. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье, если каждый пил и кофе и молоко?

2.2. Ни одно из 40 целых чисел не делится на 5. Доказать, что сумма сороковых степеней этих же чисел делится на 5.

2.3. Можно ли вычеркнуть из произведения 1!2!3!...100! один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

2.4. В классе меньше 40, но не меньше 32 человек. Любая девочка дружит с пятью мальчиками. Любой мальчик дружит с тремя девочками. Сколько человек в классе?

2.5. *Доказать, что для любого целого числа $a > 2$, найдется такое простое p, что сумма $(1 + a + a^2 + ... + a^{p-1})$ – составное число.

2.6. *Может ли иррациональное число, возведенное в иррациональную степень, давать рациональное число?

2.7. *Пятиугольник на плоскости имеет равные внутренние углы. Каждая сторона пятиугольника имеет рациональную длину. Доказать, что пятиугольник – правильный.

2.8. *Доказать, что $\cos 1^\circ$ иррационально.

2.9. Найти трехзначное число, если его произведение на 7 является кубом натурального числа.

2.10. * Пусть p простое число, $p \neq 2$. Доказать, что число $\frac{2}{p}$ можно представить, и единственным способом, в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где $x \neq y$.

2.11. Найти все натуральные числа x и y, если известно, что из 4-х высказываний одно ложно, а три других истинны.

I) $x = 2 \cdot y + 5$, II) $(x + y) \vdots 3$,
III) $(x + 7y)$ – простое, IV) $(x + 1)$ делится на y .

2.12. Сумма чисел x и y равна 53, а разность их квадратов – простое число. Найти эти числа.

2.13. Простое или составное число $100^{100} - 1$?

2.14. * Назвать три подряд идущих составных числа; четыре подряд идущих составных числа; сто подряд идущих составных чисел, n подряд идущих составных чисел.

2.15. Числа 2146, 1991, 1805 дают равные остатки при делении на некоторое число x. Найти это число.

2.16. Найти все такие натуральные числа x, для которых $(x + 26)$, $(x - 63)$ точные квадраты.

2.17. Чему равно x, если следующие числа простые: x; x+10; x+14?

Ответы, указания, решения

2.1. Пусть n – число человек в семье, x – количество выпитого молока (в чашках); тогда $(n-x)$ – количество выпитого кофе. Катя выпила 1 чашку$= \frac{x}{4} + \frac{n-x}{6}$. Тогда $x+2n = 12; x = 12-2n$. Зная, что x – целое число и $x \leq n$, получим: $n = 5$.

2.2. Пусть $a_1^{40} + a_2^{40} + \ldots + a_{40}^{40} = S$. Разделим каждое из a_i на 5 с остатком: $a_i = 5n_i + r_i$, где $r_i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $a_i^{40} = (5n_i + r_i)^{40}$. По биному Ньютона, все слагаемые, кроме последнего r_i^{40}, делятся на 5. Остается рассмотреть сумму $r_1^{40} + \ldots + r_{40}^{40}$. Заметим, что по малой теореме Ферма (или непосредственной проверкой) для любого r, не кратного 5, $r^4 \equiv 1 \pmod 5$. Тогда $r^{40} = (r^4)^{10} \equiv 1^{10} = 1 \pmod 5$. Следовательно, сумма 40 таких остатков равна $40 \equiv 0 \pmod 5$. Значит, вся исходная сумма делится на 5.

2.3. Указание: $1!2!3!...100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot ... \cdot 100^1$.
Имеем: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 98 \cdot 100 = 2^{50} \cdot 50!$. Можно вычеркнуть 50!, тогда оставшееся произведение будет полным квадратом.

2.4. Пусть в классе D девочек и M мальчиков. Из условия: $5D = 3M$. Отсюда M кратно 5, D кратно 3. Общее число $D + M$

должно быть между 32 и 39. $D + M = D + \frac{5}{3}D = \frac{8}{3}D$. Значит, $\frac{8}{3}D$ – целое между 32 и 39, D кратно 3. При $D = 12$, общее число $= 32$. Подходит. При $D = 15$, общее $= 40$ – не подходит (меньше 40, но не меньше 32 – значит, меньше 40). Ответ: 32 человека (12 девочек, 20 мальчиков).

2.5. Имеем, для натуральных чисел $a > 2,\ k > 1$,

$S(k) = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a-1}$.

Пусть $p \neq 1$ есть делитель числа $a - 1$.

Тогда $S(p) = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{p-1} = 1 + (a-1) + (a^2 - 1) + ... + (a^{p-1} - 1) + (p-1) = p + (a-1) + ... + (a^{p-1} - 1)$. Каждое слагаемое в этой сумме делится на p. Следовательно, $S(p) \vdots p$. Кроме того, $p < a$, значит $p < S(p)$.

2.6. Да, может. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если это число рациональное – пример найден. Если оно иррациональное, то возведем его в иррациональную степень $\sqrt{2}$: $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ – рациональное число.

2.7. Пусть AB – наименьшая сторона пятиугольника $ABCDE$, каждый внутренний угол пятиугольника будет по $108°$. Достроим сторону AB до правильного пятиугольника $ABC_1D_1E_1$, с внутренними углами по $108°$. Тогда BC_1 лежит на стороне BC, сторона AE_1 лежит на стороне AE. Сторона C_1D_1 параллельна стороне CD. Сторона E_1D_1 параллельна стороне ED. (Пятиугольник $ABC_1D_1E_1$ находится внутри пятиугольника $ABCDE$). Все сторона обоих пятиугольников – рациональные. Из вершины C проведем прямую CF параллельно стороне ED, до пересечения с C_1D_1. Покажем, что FC_1 – рационально. Обозначим точку пересечения E_1D_1 и CD через K. $EA - EE_1 = DK$ – рациональное. $CK = CD - DK$ есть число рациональное. $FD_1 = CK; FC_1 = C_1D_1 - FD_1$. С другой стороны FC_1 не может выражаться рациональным числом. Рассмотрим треугольник FC_1C. Углы $\angle FC_1C = \angle C_1FC = 72°; CC_1 = FC_1 = a$, где a – некоторое рациональное число. Обозначим FC_1 через x. Найдем x. Проведем в треугольнике

CFC_1 биссектрису FL. Тогда $\angle LFC = \angle LFC = 36°$; $\angle FLC_1 = \angle FC_1L = 72°$; значит треугольники $\triangle FCC_1$ и $\triangle LFC_1$ подобны. $\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}; a^2 - ax - x^2 = 0; \frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$.

2.8. Предположим, что $cos1°$ – рационально, т.е. $cos1° = \frac{k}{l}$. Тогда $cos2° = 2cos^2 1° - 1 = \frac{2k^2-l^2}{l^2}$ – тоже число рациональное, $cos3° = cos(2°+1°) = 2cos1°cos2° - cos1° = 2\frac{2k^2-l^2}{l^2} \times \frac{k}{l} - \frac{k}{l}$ – тоже число рациональное. С помощью формулы $cos(m° + 1°) = 2cosm°cos1° - cos(m° - 1°)$ по индукции получаем, что $cos(m°)$ – рационально для любого m. Но, $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – число иррациональное. Противоречие.

2.9. $X \cdot 7 = N^3$. Значит, N^3 делится на 7, следовательно N делится на 7. Пусть $N = 7k$. Тогда $X \cdot 7 = (7k)^3 = 343k^3$, откуда $X = 49k^3$. Чтобы X было трехзначным, $k = 2$, тогда $X = 49 \cdot 8 = 392$.

2.10. Имеем, $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, тогда $2x \cdot y = p(x + y)$; отсюда либо x делится на p , либо y делится на p. Пусть x делится на p, тогда $x = c \cdot p$; $2 \cdot c \cdot p \cdot y = p(y + cp)$; получим $y(2c - 1) = cp$;

так как c и $(2c - 1)$ взаимно просты, то p делится на $2c - 1$. Но, p – простое число, и значит $p = 2c - 1$ (если $2c - 1 = 1$, то $c = 1, x = y = p$, что противоречит условию). Итак,

$c = \frac{p+1}{2}; x = \frac{p \cdot (p+1)}{2}; y = \frac{p+1}{2}$.

2.11. Утверждения I и II одновременно истинными быть не могут; заметим, что утверждения II ($(x+y)$ делится на 3) и III ($(x+7y)$ – простое) не могут быть одновременно истинными для $y > 0$, так как их сумма $(x+y)+(x+7y) = 2x+8y$ делится на 2, и если $(x+y)$ делится на 3, то $(x+7y) = (x+y)+6y$ тоже делится на 3, и при $y > 0$ будет больше 3, значит составное; если допустить, что истинно II, то I и III одновременно ложны, что быть не может по условию задачи. Следоватеьно ложно утверждение II. Тогда $(x+y)$ не делится на 3. Из I: $x = 2y+5$. Из IV: $(x + 1)$ делится на y, т.е. $(2y + 6)$ делится на y, значит y делитель 6. Возможные $y : 1, 2, 3, 6$. Проверяем III для этих y. Получаем две пары: $(x = 9, y = 2)$ и $(x = 17, y = 6)$.

2.12. Имеем, $x + y = 53$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = p$ (простое). Так как 53 – простое, то либо $x - y = 1$, либо $x - y = p$ и $x + y = 1$, что невозможно при натуральных x, y. Значит, $x - y = 1$, $x + y = 53$. Отсюда $x = 27, y = 26$.

2.13. $100^{100} - 1 = (10^{100})^2 - 1 = (10^{100} - 1)(10^{100} + 1)$. Оба множителя больше 1, следовательно число составное.

2.14. Например, $8, 9, 10$; $24, 25, 26, 27$;
$(100 + 1)! + 2, (100 + 1)! + 3, ..., (100 + 1)! + (100 + 1)$;
$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, ..., (n + 1)! + (n + 1)$.

2.15. Разности чисел: $2146 - 1991 = 155, 1991 - 1805 = 186, 2146 - 1805 = 341$. Искомый делитель x должен делить все эти разности. Наибольший общий делитель (НОД) $155, 186, 341$ равен 31. Проверим: $2146/31 = 69$ ост.7, $1991/31 = 64$ ост.7, $1805/31 = 58$ ост.7. Ответ: $x = 31$.

2.16. $x + 26 = m^2$, $x - 63 = n^2$. Вычитаем: $89 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Так как 89 простое, то $m - n = 1$, $m + n = 89$. Отсюда $m = 45, n = 44$. Тогда $x = m^2 - 26 = 2025 - 26 = 1999$.

2.17. При $x = 3$ числа $3, 13, 17$ – все простые. При $x > 3, x$ может давать остатки $0, 1, 2$ при делении на 3. Если остаток 0, то x делится на 3 и больше трёх, следовательно – не простое. Если остаток 1, то $x + 14$ делится на 3. Если остаток 2, то $x + 10$ делится на 3. Значит, единственная возможность $x = 3$.

3 Прогрессии. Телескопические суммы

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d – разности прогрессии.

3.1. 1) Найдите суммы: $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 =?$, $\sum\limits_{k=0}^{n} 2 =?$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k =?$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k =?$, где $a_2 = a_1 + d, ..., a_n = a_1 + nd$, – сумма первых n членов арифметической прогрессии;

3.2. Заполните пустые клетки таблицы так, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце составляли арифметические прогрессии.

2		16
	7	
1		

3.3. Спортсмен за первую минуту пробежал 400 м, а в каждую следующую минуту пробегал на 5 м меньше, чем в предыдущую. Какой путь пробежал он за 1 час?

3.4. В огороде 30 грядок, каждая длиной 16м. И шириной 2,5 м. Поливая грядки огородник приносит ведра из колодца, расположенного в 14 м. от края огорода, и обходит грядки по меже причем воды, приносимой за 1 раз, достаточно для полива только одной грядки. Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

3.5. Винни-Пух задумал вырыть яму для поимки слонопотама. К нему присоединилось несколько жителей сказочного леса. Если бы они сразу стали работать все вместе, то яма была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности сначала только Винни-Пух рыл яму. Спустя некоторое время к нему присоединился

Пяточок, еще через столько же времени – Кролик, за ним через такой же промежуток времени Тигра и так пока все обитатели этого леса ни присоединились к Винни-Пуху. Оказалось, что Винни-Пух работал в 11 раз дольше последнего обитателя леса, помогавшего Винни-Пуху. Сколько времени работал последний?

3.6. При делении 13-го члена арифметической прогрессии на её 3-й член в частном получается 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получается 2 и в остатке 8. Найти 20-й член прогрессии.

3.7. Четны или нечетны числа $S_{1990} = 1+2+3+\ldots+1990$? $S_{2026} = 1+2+3+\ldots+2026$? $S_n = 1+2+3+\ldots+n$?

3.8. *Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма первых n членов равна n^2.

3.9. *Могут ли цифры простого четырехзначного числа образовать арифметическую прогрессию.

3.10. *В гору едет автомобиль, который проезжает в 1 сек 15 м, а в каждую следующую на 1 м меньше, чем в предыдущую. Навстречу ему через 3 сек. выехал другой автомобиль, находящийся от места выезда первого автомобиля на расстоянии 308 метров, причем второй автомобиль в первую секунду проехал 20 м, а в каждую следующую секунду проезжает на 3 м. больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал 1 автомобиль до встречи?

3.11. *Найти все трехзначные числа, каждое из которых делится на 45 и цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих членов, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на ненулевое число q (знаменатель прогрессии).

3.12. Заполните пустые клетки таблицы так, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце составляли геометрические прогрессии.

	72	
36		6
	8	

3.13. Найдите сумму:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = ?$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + ... + q^n = ?$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = ?$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(2^k - 3^k\right) = ?$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = ?$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k = ?$;

3.14. Садовник продал первому покупателю половину всех яблок и еще пол-яблока, второму покупателю – половину оставшихся и еще пол-яблока, третьему – половину оставшихся и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока, после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

3.15. Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за вторую – 2 копейки, за третью – 4 копейки и т. д. После подсчета оказалось, что воин получил всего вознаграждения 655 рублей 35 копеек. Сколько он получил ран?

3.16. Семь старух отправились в Рим. У каждой по семи мулов, каждый мул несет по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всего предметов?

3.17. Москит летит горизонтально навстречу воздушному потоку и в первую секунду пролетает 1м, за каждую следующую секунду москит пролетает расстояние вдвое меньше, чем в предыдущую секунду. Сколько времени будет лететь москит до цели, расположенной на расстоянии 2 м?

3.18. Могут ли числа 1,2, $\sqrt{3}$ быть членами одной арифметической прогрессии? А геометрической?

3.19. Найти сумму 20 членов последовательности $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\ldots$

3.20. Три числа образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел будет представлять собой конечную арифметическую прогрессию. Если третье число этой новой тройки увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первую тройку чисел.

3.21. *Доказать, что числа 49, 4489, 444889, ... получаемые вставкой 48 в середину предыдущего числа, являются квадратами целых чисел.

Телескопическая сумма – это вид математической суммы, в которой большая часть элементов взаимно сокращается, оставляя только начальные и конечные элементы. Термин "телескопическая" произошёл от сходства с устройством телескопа, способного складываться и уменьшать свою длину путём последовательного сокращения частей. Пусть последовательность $\{f_n\}$, определена на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Телескопичесой суммой называется следующий тип выражения: $\sum\limits_{k=m}^{n}(f_{k+1}-f_k)$, где n и m — целые числа, удовлетворяющие условию $m \leq n$. При вычислении такой суммы мы видим следующее сокращение промежуточных членов:

$$(f_{m+1}-f_m)+(f_{m+2}-f_{m+1})+\cdots+(f_n-f_{n-1})+(f_{n+1}-f_n)= \\ =f_{n+1}-f_m.$$

3.22. 1) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}=?$;

2) $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 14}=?$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!=?$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=?$; 5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)(k+3)}=?$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$ =?; 7) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{14}{49k^2-70k-24}$ =?;

3.23. Вычислите $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+...+k}$

3.24. Вычислите $H_n=\frac{2\cdot n}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+...+n}}$, где n – натуральное число. Найдите значение выражения при $n=1990$, при $n=2026$. А если n равно году вашего рождения?

3.25. ** $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot x^{k-1}$ =?;

Ответы, указания, решения

Арифметическая прогрессия

3.1. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n}1=n$, $\sum\limits_{k=0}^{n}2=2(n+1)=2n+2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$;

2) Рассмотрим сумму $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ и

$S_n=a_n+a_{n-1}+...+a_1$, тогда

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+...(a_n+a_1)=(a_1+a_n)n$;

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ – формула для суммы арифметической прогресии.

3.2. -

3.3. $a_1=400$, $d=-5$, $n=60$. Сумма $S_{60}=\frac{2\cdot 400+(60-1)\cdot(-5)}{2}\cdot 60=\frac{800-295}{2}\cdot 60=\frac{505}{2}\cdot 60=15150$ м = 15 км 150 м.

3.4. Длина пути для полива каждой следующей грядки увеличивается на 5 м. Первая грядка: $14+16+2.5+16+2.5+14=65$ м. Последняя (30-я): $65+5\cdot 29=65+145=210$ м. Сумма арифметической прогрессии: $S_{30}=\frac{65+210}{2}\cdot 30=137.5\cdot 30=4125$ м = 4.125 км.

3.5. Пусть x – время работы последнего, n – число помощников. Винни-Пух работал время nx (так как он начал первым и работал, пока не присоединился последний, и потом еще x времени). Суммарная производительность всех вместе за время x равна $1/24$ ямы в час. Работа Винни-Пуха и помощников: $\frac{nx}{24}+\frac{(n-1)x}{24}+...+\frac{x}{24}=\frac{x}{24}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=1$ (вырыли яму). Также по условию: время Винни-Пуха nx в 11 раз больше времени последнего x: $nx=11x$, откуда $n=11$. Тогда уравнение: $\frac{x}{24}\cdot\frac{11\cdot 12}{2}=1$, $\frac{x}{24}\cdot 66=1$, $x=\frac{24}{66}=\frac{4}{11}$ часа. Ответ: последний работал $\frac{4}{11}$ часа.

3.6. $a_{13}=a_1+12d$, $a_3=a_1+2d$. По условию: $\frac{a_1+12d}{a_1+2d}=3$. Отсюда $a_1+12d=3a_1+6d$, $2a_1=6d$, $a_1=3d$. Аналогично, $\frac{a_{18}}{a_7}=2$ с остатком 8: $a_1+17d=2(a_1+6d)+8$. Подставляем $a_1=3d$, получим $3d+17d=2(3d+6d)+8$, $20d=18d+8$, $2d=8$, $d=4$, $a_1=12$. Тогда $a_{20}=a_1+19d=12+76=88$.

3.7. $S_{1990}=1+2+...+1990=\frac{1991\cdot 1990}{2}=1991\cdot 995$. Произведение нечетных чисел – нечетно.

$S_{2026}=1+2+3+\ldots+2026=\frac{2027\cdot 2026}{2}=2027\cdot 1013$ – нечётно.

$S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$, если $(n+1)$ делится на 4 или n делится на 4, то сумма S_n – чётная, иначе – нечётная.

3.8. $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=n^2$. Приравнивая коэффициенты при n^2 и n, получаем $d/2=1$, $d=2$, и $a_1-d/2=0$, $a_1=1$.

Прогрессия: $1,3,5,7,....$

3.9. Пусть $x,x+d,x+2d,x+3d$ – цифры искомого простого числа. Тогда сумма цифр $S=4x+6d=2(2x+3d)$. Так как сумма цифр не должна делиться на 3, то x не равно 3. Так как $x+3d$ – цифра, то $x+3d\leq 9$ Следовательно, либо $d=1$, либо $d=2$. Если $d=2$, то $x\leq 3, x\neq 2$ иначе будет – чётное, поэтому остаётся $x=1$ но, число $1357=23\cdot 59$ – составное. Остаётся $d=1$, перебираем x от 1 до 6. Возможны варианты $1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789$. Проверяем на простоту 4567. Проверим делимость на простые до $\sqrt{4567}\approx 67.6$. Не делится на $3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67$. Значит, 4567 – простое.

3.10. Обозначим через $t+1$ – время до встречи. Тогда первый автомобиль прошел до встречи $\frac{15+(15-t)}{2}(t+1)$, второй прошел до встечи $\frac{20+(20+3(t-3))}{2}(t-3+1)$, зная, что $S_1+S_2=308$, приходим к уравнению $t^2+27t-324=0$. Тогда $t=9$.
Ответ: 105 м.

3.11. Число делится на 45, значит, делится на 5 и на 9. Поэтому последняя цифра 0 или 5. Цифры образуют арифметическую прогрессию. Перебором получаем числа: 630 (прогрессия $6,3,0$), $135(1,3,5), 765(7,6,5)$. Все они делятся на 45.

Геометрическая прогрессия

3.12. -

3.13. 1) Найдите сумму: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+...+q^n = ?$;
Найдем сначала сумму геометрической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n$ со знаменателем q. Рассмотрим две суммы:
$S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_n$;
$S_n \cdot q = a_1q+a_2q+a_3q+\ldots+a_nq$;
Так как $a_2=a_1q, a_3=a_2q, ..., a_{n+1}=a_nq$, получаем, что $S_n \cdot q = a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n+1}$;
Вычтем из второй суммы первую, получим:
$S_n \cdot q - S_n = (a_2+a_3+\ldots+a_{n+1})-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$;
$S_n(q-1) = a_{n+1}-a_1 = a_1q^n - a_1$;
$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ получили формулу для суммы конечной геометрической прогрессии. Тогда, $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q+q^2+...+q^n = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 1+2+2^2+\cdots+2^n$, используем формулу для суммы конечной геометрической прогрессии,
$S_n = 2^{n+1}-1$.
3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(2^k-3^k\right) = 2^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}$.
4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{6^k}+\frac{3^k}{6^k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{6}\right)^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{6}\right)^k =$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} =$
$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n} - \frac{1}{2^n}.$

5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k =$?; Рассмотрим возможные случаи:

а) n – чётное, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 = 1;$

б) n – нечетное, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots - 1 = 0.$

3.14. Пусть изначально было x яблок. После продажи первому осталось $x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$. После второго: $\frac{1}{2}(\frac{x-1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x-3}{4}$. Можно заметить закономерность: после k-го покупателя остаётся $\frac{x-(2^k-1)}{2^k}$. После седьмого остаток равен 0: $\frac{x-(2^7-1)}{2^7} = 0$, откуда $x = 2^7 - 1 = 127$.

3.15. Вознаграждение: $1+2+4+...+2^{n-1} = 2^n - 1$ копеек. 655 руб. 35 коп. = 65535 коп. Имеем $2^n - 1 = 65535$, $2^n = 65536 = 2^{16}$, $n = 16$ ран.

3.16. $7 + 7^2 + ... + 7^6 = 7\frac{1-7^6}{1-7} = 137256.$

3.17. Москит пролетает за первую секунду 1 м, за вторую 1/2 м, за третью 1/4 м и т.д. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $1 + 1/2 + 1/4 + ... = 2$ м. Таким образом, при данных теоретических условиях, москит приближается к точке расположенной на расстоянии 2 м как угодно близко, но не достигнет этой точки ни за какое конечное время.

3.18. Допустим, что $1, 2, \sqrt{3}$ являются членами одной арифметической прогрессии. Тогда

$1 = a_0 + n_1 d, 2 = a_0 + n_2 d \Rightarrow d = 1\frac{1}{n2-n1}$ – рациональное. $\sqrt{3} = a_0 + n_3 d$; $\sqrt{3} = 2 + d(n_3 - n_2)$ – рациональное. Противоречие.

Допустим, что данные три числа являются членами одной геометрической прогрессии. Тогда $1 = b_0 q^n$; $2 = b_0 q^m; \sqrt{3} = b_0 q^k; 2 = q^{m-n}; q = 2^{\frac{1}{m-n}}; b_0 = 2^{\frac{n}{n-m}}; \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{n+k}{n-m}}; log_2 3 = 2 \cdot \frac{n+k}{n-m}$ – рационально. $log_2 3$ – иррационально. Противоречие.

3.19. Последовательность можно записать так
$\sum\limits_{k=1}^{20} \frac{2^k+1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{20}(1+\frac{1}{2^k}) = 20 + \sum\limits_{k=1}^{20} \frac{1}{2^k} = 20 + \frac{1-(1/2)^{20}}{1-1/2}$. Сумма геометрической прогрессии: $\frac{1/2(1-(1/2)^{20})}{1-1/2} = 1-(1/2)^{20}$. Тогда общая сумма: $20+1-(1/2)^{20} = 21-\frac{1}{2^{20}}$.

3.20. Геом. b_1, b_2, b_3. Арифм. b_1, b_2+2, b_3. Геом. b_1, b_2+2, b_3+9. Кроме того, $b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2$. Из системы $2(b_1 q + 2) = b_1 + b_1 q^2$; $(b_1 q+2)^2 = b_1(b_1 q^2 + 9)$ получаем $q = 2, q = -4; b_1 = 4, b_1 = 4\backslash 25$.

3.21. Общий вид таких чисел следующий:

$$\underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 = 4\cdot\underbrace{11...1}_{n}\cdot 10^n + 8\cdot\underbrace{11...1}_{n} + 1$$

Число $\underbrace{11..1}_{n}$ можно записать в виде суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем десять:

$$\underbrace{11..1}_{n} = 1+10+10^2+...+10^{n-1} = \frac{10^n-1}{9}.$$

Таким образом имеем:

$$\frac{4}{9}(10^n-1)10^n + \frac{8}{9}(10^n-1)+1 = \frac{4}{9}10^{2n} + \frac{4}{9}10^n + \frac{1}{9} = \left[\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right]^2.$$

Телескопические суммы

3.22. 1) $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{99\cdot 100} + \frac{1}{100\cdot 101} = ?$;
Мы можем выразить каждое из слагаемых в виде разности: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; тогда искомую сумму можно записать: $S = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$; заметим, что эта сумма является телескопической и все промежуточные члены сокращаются: $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{101} = \frac{99}{202}$.
2) $S = \frac{11}{42}$.
3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum\limits_{k=1}^{n}(k\cdot k! + k! - k!) = \sum\limits_{k=1}^{n}((k+1)\cdot k! - k!) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum\limits_{k=1}^{n} k! =$
$= 2!-1!+3!-2!+...+n!-(n-1)!+(n+1)!-n! = (n+1)!-1.$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ =?; Разложим $\frac{1}{k(k+1)}$ на сумму простых дробей:
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{k(A+B)+A}{k(k+1)}$, откуда получаем:
$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ = это телескопическая сумма $= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

5) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+3)}$ =?; Разложим дробь $\frac{1}{k(k+2)(k+3)}$ на сумму простых дробей:
$\frac{1}{k(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3} = \frac{A(k+2)(k+3)+Bk(k+3)+Ck(k+2)}{k(k+2)(k+3)} =$
$= \frac{Ak^2+5Ak+6A+Bk^2+3Bk+Ck^2+2Ck}{k(k+2)(k+3)} = \frac{k^2(A+B+C)+k(5A+3B+2C)+6A}{k(k+2)(k+3)}$,
откуда получаем:
$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+3B+2C=0 \\ 6A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{6}+B+C=0 \\ \frac{5}{6}+3B+2C=0 \\ A=\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} C=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{6} \end{cases};$

$6S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+2)(k+3)} = 6\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{6}}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{2}}{k+2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{3}}{k+3}\right) =$
$= 6\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3}{k+2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k+3} =$
$= \left(1 - \frac{3}{3} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{2}{6}\right) +$
$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7} + \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{8} + \frac{2}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{3}{n-1} + \frac{2}{n}\right) +$
$+ \left(\frac{1}{n-2} - \frac{3}{n} + \frac{2}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n+2} + \frac{2}{n+3}\right) =$
получаем обобщение телескопической суммы, все дроби начиная с дробей со знаменателями 4 и до дробей со знаменателями $n+1$ сократятся, останутся дроби со знаменателями меньше 4 и больше n
$= 1 - \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{n+2} + \frac{2}{n+3} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3}\right)$

В итоге: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3}\right)$.

6) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ =?;

Для упрощения выражения внутри суммы, заметим, что:
$\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.
Обозначим $a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

Тогда, $\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=a_{k+1}-a_k$;
Таким образом, получаем сумму разностей:

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)$;
Это выражение является телескопической суммой. При раскрытии скобок получится: $S_n=a_{n+1}-a_0$.

Вычислим $a_0=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1$ и $a_{n+1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$,
Итак, $S_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1$.

7) $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{14}{49k^2-70k-24}=?$; Преобразуем и разложим $\frac{14}{49k^2-70k-24}$ на сумму простых дробей:
$\frac{14}{49k^2-70k-24}=\frac{14}{(7k+2)(7k-12)}=\frac{A}{7k+2}+\frac{B}{7k-12}=\frac{A(7k-12)+B(7k+2)}{(7k+2)(7k-12)}=\frac{7k(A+B)-12A+2B}{(7k+2)(7k-12)}$, тогда:
$\begin{cases}A+B=0\\-12A+2B=14\end{cases}\quad\begin{cases}A=-B\\-12A+2B=14\end{cases}\quad\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$;
$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{14}{49k^2-70k-24}=-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{7k+2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{7k-12}$;
Проследим, чему равна сумма при различных k:
$\underline{k=0}$: $-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}$;
$\underline{k=1}$: $-\frac{1}{9}-\frac{1}{5}$;
$\underline{k=2}$: $-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}$;
$\underline{k=3}$: $-\frac{1}{23}+\frac{1}{9}$;
$\underline{k=4}$: $-\frac{1}{30}+\frac{1}{16}$;
...
$\underline{k=n-2}$: $-\frac{1}{7n-12}+\frac{1}{7n-26}$;
$\underline{k=n-1}$: $-\frac{1}{7n-5}+\frac{1}{7n-19}$;
$\underline{k=n}$: $-\frac{1}{7n+2}+\frac{1}{7n-12}$;
Заметим, что в сумме останется всего четыре слагаемых, тогда искомая сумма $S_n=-\frac{17}{60}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}$.

3.23. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+...+k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=$

$\frac{2\cdot n}{n+1}$. Тогда исходное выражение: $\frac{2\cdot n}{\frac{2\cdot n}{n+1}} = n+1$.

3.24. Вычислите $H_n = \frac{2\cdot n}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}}$.

Найдём суммы арифметических прогрессий:

$1 = \frac{2}{2}$, $1+2 = \frac{3\cdot 2}{2}$, ..., $1+2+...+n = \frac{(n+1)n}{2}$, тогда сумма их обратных величин: $\frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+...+n} = \frac{2}{2} + \frac{2}{3\cdot 2} + ... + \frac{2}{(n+1)n} = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + ... + \frac{1}{(n+1)n}\right) =$ телескопическая сумма$=2\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = 2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = = \frac{2n}{n+1}$. Тогда исходное выражение $H_n = \frac{2n}{\frac{2n}{n+1}} = n+1$.

3.25. $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1} = 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$?;

Заметим, что сумму $S(x)$ можно получить продифференцировав по x сумму геометрической прогрессии

$T(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k = x+x^2+x^3+...+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x\neq 1)$.

$S(x) = \frac{d}{dx}T(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}T = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = = \frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$, при $x\neq 1$.

Для $S_n(1) = 1+2++...+n = \frac{(n+1)n}{2}$.

4 Булевы функции

Булевой функцией от n аргументов называется функция f от n аргументов, заданная на множестве $\{0,1\}^n$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$.

Другими словами, булева функция $f(x_1,...,x_n)$ от n аргументов $x_1,...,x_n$ сопоставляет каждому упорядоченному набору $x_1,...,x_n$, составленному из 0 и 1, либо 0 либо 1.

Задать булеву функцию можно с помощью таблицы значений (таблицы истинности).

Примеры.

1) Логическое отрицание является булевой функцией от одного аргумента. Её таблица значений выглядит следующим образом:

x	x'
0	1
1	0

2) Конъюнкция «$\cdot$» (логическое умножение) и дизъюнкция «$\vee$» (логическое сложение) являются булевыми функциями от двух аргументов. Их можно задать с помощью таблиц истинности:

x_1	x_2	x_1x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

3) Сумма Жегалкина «+» (сложение по модулю 2) является булевой функцией от двух аргументов. Она задаётся следующей таблицей значений:

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Будем говорить, что булевы функции f и g от n аргументов **различны**, если найдётся такой набор аргументов $x_1, ..., x_n$, что $f(x_1, ..., x_n) \neq g(x_1, ..., x_n)$.

Задачи.

4.1. Сколько существует различных булевых функций:

а) от одного аргумента?

б) от двух аргументов?

Составьте таблицы значений для каждой из них.

4.2. Сколько существует различных наборов длины n, составленных из 0 и 1?

4.3. Сколько существует различных булевых функций от n аргументов?

4.4. Каково число булевых функций от n аргументов, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения? Противоположными называются наборы $(a_1, ..., a_n)$ и $(a'_1, ..., a'_n)$. Например, $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ – противоположные наборы длины $n = 3$.

4.5. На скольких наборах значений аргументов принимает значение 1 следующая булева функция от n аргументов:

а) $x_1x_2...x_n + 1$;

б) $x_1x_2...x_n + x_1$;

в) $1 + x_1 + x_2x_3...x_n$;

г) $(x_1...x_k) + (x_{k+1}...x_n)$;

д) $(x_1 \vee ... \vee x_k) + (x_{k+1} \vee ... \vee x_n)$;

е) $(x_1...x_k) \vee (x_{k+1}...x_n)$.

4.6. Четыре школьницы – Мария, Нина, Ольга и Полина – участвовали в соревнованиях и заняли четыре призовых места. Когда стали узнавать, как распределились места, получили три разных ответа:

1) Ольга первая, Нина вторая;

2) Ольга вторая, Полина третья;

3) Мария вторая, Полина четвёртая.

В каждом ответе по крайней мере одна часть верна. Определите правильное расположение мест.

4.7. На экзамене преподаватель предлагает студентам определить, какие из пяти утверждений истинны и какие из них ложны. Студент знает, что всегда преподаватель дает истинных утверждений больше, чем ложных, и никогда не задает подряд три вопроса, требующих одинакового ответа. Из содержания первого и последнего утверждений ему ясно, что ответы на них должны быть противоположными. Единственный вопрос, ответ на который он знает, – второй. Это уже гарантирует ему правильные ответы на все вопросы. Какими должны быть эти ответы?

4.8. Некто А держит в руке (неизвестно в правой или левой) монету. Известно, что А всегда лжет или всегда говорит правду (но неизвестно, что именно). Как с помощью единственного вопроса узнать, в какой руке находится монета?

Ответы, указания, решения

4.1. а) 4; б) 16. 4.2 2^n. 4.3. 2^{2^n}. 4.4. $2^{2^{n-1}}$. 4.5. а) 2^n-1; б) $2^{n-1}-1$; в) 2^{n-1}; г) $2^k+2^{n-k}-2$; д) $2^k+2^{n-k}-2$; е) $2^k+2^{n-k}-1$. 4.6. Ольга – первая, Мария – вторая, Полина – третья, Нина – четвёртая. 4.7. Истина, ложь, истина, истина, ложь. 4.8. Это можно сделать при помощи вопроса: «Верно ли, что либо у тебя монета в правой руке, либо ты правдив?» Указание. Ввести два высказывания: p_1 – монета в правой руке; p_2 – А говорит правду и стоставить таблицу истинности искомого вопроса.

ЛФМШ-2025

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. — 3-е изд., стер. — М.: Изд. центр «Академия», 2007.

2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

3. Гарднер М. Математические досуги. — М.: Оникс, 1995.

4. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изуч. математики. — 7-е изд. — М.: Просвещение, 1998.

5. Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учеб. пособие. — Минск: Вышэйшая школа, 1982.

6. Ященко И. В. Приглашение на математический праздник. — М.: МЦНМО; ЧеРо, 1998.

7. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — СПб.: Манускрипт, 1994.

8. Квант. Занимательно о физике и математике: Библиотечка «Квант». Вып. 50. М.: Наука, 1988.

9. Байиф Ж.-К. Логические задачи. М.: Мир, 1983.

10. Гельфман Э. Г. Дело о делимости и другие рассказы. — Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1991.