Сергей Порфирьевич Гулько. Научные достижения

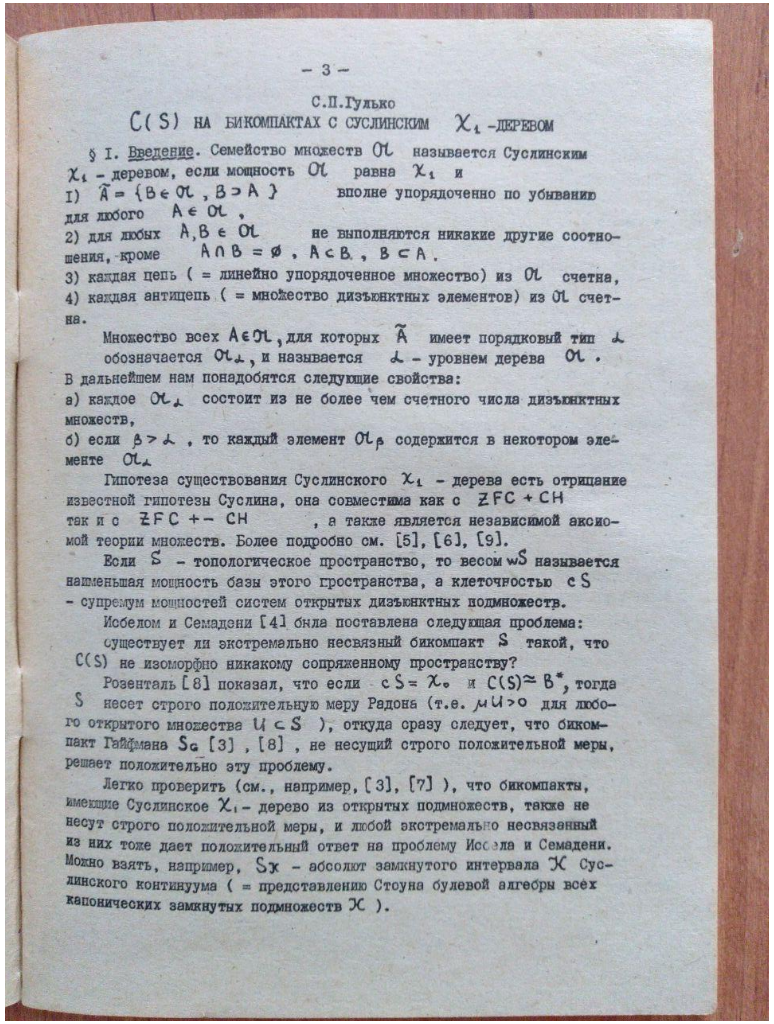
К 75-летию

Томск 2025

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.В.КУЙБЫШЕВА

СБОРНИК
АСПИРАНТСКИХ РАБОТ
по математике

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ТОМСК - 1973



С.П.Гулько

$C(S)$ НА БИКОМПАКТАХ С СУСЛИНСКИМ $\aleph_1$-ДЕРЕВОМ

§ I. Введение. Семейство множеств $\mathfrak{A}$ называется Суслинским $\aleph_1$ - деревом, если мощность $\mathfrak{A}$ равна $\aleph_1$ и
I) $\tilde{A} = \{B \in \mathfrak{A}, B \supset A\}$ вполне упорядоченно по убыванию для любого $A \in \mathfrak{A}$,
2) для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ не выполняются никакие другие соотношения, кроме $A \cap B = \emptyset$, $A \subset B$, $B \subset A$.
3) каждая цепь (= линейно упорядоченное множество) из $\mathfrak{A}$ счетна,
4) каждая антицепь (= множество дизъюнктных элементов) из $\mathfrak{A}$ счетна.

Множество всех $A \in \mathfrak{A}$, для которых $\tilde{A}$ имеет порядковый тип α обозначается $\mathfrak{A}_\alpha$, и называется α - уровнем дерева $\mathfrak{A}$.
В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства:
а) каждое $\mathfrak{A}_\alpha$ состоит из не более чем счетного числа дизъюнктных множеств,
б) если $\beta > \alpha$, то каждый элемент $\mathfrak{A}_\beta$ содержится в некотором элементе $\mathfrak{A}_\alpha$

Гипотеза существования Суслинского $\aleph_1$ - дерева есть отрицание известной гипотезы Суслина, она совместима как с $ZFC + CH$ так и с $ZFC + \neg CH$, а также является независимой аксиомой теории множеств. Более подробно см. [5], [6], [9].

Если S - топологическое пространство, то весом wS называется наименьшая мощность базы этого пространства, а клеточностью cS - супремум мощностей систем открытых дизъюнктных подмножеств.

Исбелом и Семадени [4] была поставлена следующая проблема:
существует ли экстремально несвязный бикомпакт S такой, что $C(S)$ не изоморфно никакому сопряженному пространству?

Розенталь [8] показал, что если $cS = \aleph_0$ и $C(S) \simeq B^*$, тогда S несет строго положительную меру Радона (т.е. $\mu U > 0$ для любого открытого множества $U \subset S$), откуда сразу следует, что бикомпакт Гайфмана S_G [3], [8], не несущий строго положительной меры, решает положительно эту проблему.

Легко проверить (см., например, [3], [7]), что бикомпакты, имеющие Суслинское $\aleph_1$- дерево из открытых подмножеств, также не несут строго положительной меры, и любой экстремально несвязанный из них тоже дает положительный ответ на проблему Исбела и Семадени. Можно взять, например, $S_{\mathcal{X}}$ - абсолют замкнутого интервала $\mathcal{X}$ Суслинского континуума (= представлению Стоуна булевой алгебры всех канонических замкнутых подмножеств $\mathcal{X}$).

жеств мощности $|A_n|$, значит $c\Lambda \geqslant |A_n| > cT$, но последнее противоречит 3) лемма 2.

<u>Теорема 2</u>. Если $u : C(S) \to C(T)$ – линейный ограниченный взаимно однозначный оператор и S имеет Суслинское $\aleph_1$ – дерево из открытых подмножеств, то T также имеет Суслинское $\aleph_1$ – дерево из открытых подмножеств.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ – $\aleph_1$ – дерево из открытых подмножеств S и Λ, как в лемме 2. Мы построим Суслинское $\aleph_1$ – дерево в Λ и этим теорема будет доказана, так как Λ – является непрерывным образом T.

В силу тотальности Λ существует номер n, такой что $\mathscr{L} \subset \mathfrak{A}$ всех $U \in \mathscr{L}$, для которых $E^1_{\frac{1}{n}}(U) \neq \emptyset$ несчетно. Зафиксируем это n. Легко проверить, что $\mathscr{L}$ снова $\aleph$ – дерево. Обозначим $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_\alpha, \dots$ $\alpha < \omega_1$ – уровни дерева $\mathscr{L}$. Отметим прежде всего, что семейство $\mathscr{L}' = \{E^1_{\frac{1}{n}}(U),\ U \in \mathscr{L}\}$ несчетно. В самом деле, если это не так, то существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что множество $E^1_{\frac{1}{n}}(U), U \in \bigcup_{\beta \leq \alpha_0} \mathscr{L}_\beta$ исчерпывает все семейство $\mathscr{L}'$. Возьмем $U_{\alpha_0} \in \mathscr{L}_{\alpha_0}$ такое, что поддерево $\{U \in \mathscr{L}, U \subset U_{\alpha_0}\} = \bigcup_{\beta > \alpha_0} \{U \in \mathscr{L}_\beta, U \subset U_{\alpha_0}\}$ несчетно. Отметим следующий хорошо известный [5] и легко проверяемый факт:

любое семейство множеств, удовлетворяющее I) – 3) § I и, кроме того, 4) "каждая антицепь конечна", счетна. (**)

Из (**) сразу выводим, что существует $\beta > \alpha_0$ и $U_1 \subset U_{\alpha_0}, \dots, U_{n_0+1} \subset U_{\alpha_0}$ причем $U_i \in \mathscr{L}_\beta$ все различны и в силу (α) не пересекаются. Из (C) получаем равенство

$$E^1_{\frac{1}{n}}(U_1) \cap \dots \cap E^1_{\frac{1}{n}}(U_{n_0+1}) = \emptyset,$$

которое вместе с (B) дает требуемое противоречие. Таким образом,

$$\mathscr{L}' = \{E^1_{\frac{1}{n}}(U),\ U \in \mathscr{L}\}$$

несчетно. Теперь определим

$$\mathscr{L}'_\alpha = \{E^1_{\frac{1}{n}}(U),\ U \in \mathscr{L}\},\ \alpha < \omega_1 .$$

Заметим, что в силу (α) и (C) пересечение каждых n_0+1 элементов $\mathscr{L}'$ пусто. Как в доказательстве теоремы I, строим в $\mathscr{L}'$ образующие и пусть $\mathscr{L}_\alpha(\kappa)$ – множество всех образующих порядка κ. Пусть далее $\mathscr{L}'(\kappa) = \bigcup_{\alpha < \omega} \mathscr{L}'_\alpha(\kappa)$ В силу свойств (A) и (C) легко проверить, что для любого κ, $0 \leq \kappa < n_0+1$ $\mathscr{L}'(\kappa)$ удовлетворяет I) – 4) § I.

В силу несчетности $\mathscr{L}'$ ясно, что найдется κ_0 такое, что $\mathscr{L}'(\kappa_0)$ несчетно и $\mathscr{L}'(\kappa_0)$ будет требуемым Суслинским $\aleph_1$ – деревом. Теорема 2 доказана.

Заметим, что для экстремально несвязного пространства множество замыканий всех элементов Суслинского $\aleph_1$ – дерева из открытых подмножеств снова дает Суслинское $\aleph_1$ – дерево уже из открыто-замкнутых подмножеств.

<u>Следствие I</u>. Если S имеет Суслинское $\aleph_1$ – дерево из открытых подмножеств, то $C(S)$ не изоморфно $C(S_G)$, где S_G – бикомпакт Гайфмана.

<u>Доказательство</u>. В силу теоремы 2 и предыдущего замечания достаточно показать, что булева алгебра $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств S_G не содержит Суслинского $\aleph_1$ – дерева. Но последнее очевидно, так как $\mathfrak{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$, где $\mathfrak{F}_n$ имеет не более чем n дизъюнктных элементов [3], поэтому для всякого дерева $\mathfrak{A}$ в силу (**) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$ не более чем счетно и $\mathfrak{A}$ должно быть не более чем счетным.

<u>Замечание</u>. Напомним, что теорема 2 имеет смысл лишь тогда, когда принята гипотеза существования Суслинского $\aleph_1$ – дерева.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Бурбаки. Мера. Интегрирование мер. ИЛ, М, I97I.
2. М.М.Дей. Нормированные линейные пространства. ИЛ, М, I97I.
3. H. Gaifman, Concerning measures on Boolean algebras, Pacific. J. Math. 14.(1964), 61-73.
4. J.R. Isbell, Z. Semandi, Prosections constants and spaces of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 38-48.
5. T.J. Jech, Tress, J. Symb. log. 36 (1971), 1-14.
6. F.B. Jones, On fake Syslin's trees, Duke Math. J. 39 (1969), 571-573.
7. D. Maharam, An algebraic characterization of measure algebras, Ann. of Math. 48 (1947), 154-167.
8. H.P. Rosenthall, On injective Banach spaces and space $L^\infty(\mu)$ for finite measure μ, Acta Math. 124 №3-4, 1970, 205-267
9. S. Tennenbaum, Suslin's Problem, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 59 (1968), 60-63.
IO. Ю.М.Смирнов. О весе кольца ограниченных непрерывных функций над нормальным пространством. Матем.сб., 30, I952, 2I3-2I8.

Классификация банаховых пространств C[1, α] **[2]**

Рассмотрим неравенства $\omega^{\omega^{\gamma}} \leq \alpha < \beta < \omega^{\omega^{\gamma+1}}$ (1)

$$\omega_1 \cdot n \leq \alpha < \beta < \omega_1 \cdot (n+1) \quad (2)$$

Теорема 1. Если $C_\alpha \cong C_\beta$, то существует ординал $\gamma \geq 0$, такой что выполнено (1).

Теорема 2. Пусть выполнено (1). Если кардинал $|\gamma|$ не регулярен, или $\beta > \omega_{|\gamma|}$, то $C_\alpha \cong C_\beta$.

Теорема 3. Пусть выполнено (1). Если кардинал $|\gamma|$ – регулярный несчётный, $\gamma = \omega_{|\gamma|}$,

то $C_\alpha \cong C_\beta$ тогда и только тогда, когда либо

$$\omega_{|\gamma|} \cdot \omega_\sigma \leq \alpha < \beta < \omega_{|\gamma|} \cdot \omega_{\sigma^+},$$

либо

$$\omega_{|\gamma|} \cdot \omega_{|\gamma|} \leq \alpha < \beta < \omega_{|\gamma|}^{\omega} \quad ,$$

где $1 \leq \sigma < |\gamma|$.

Пространства функций на счётных метрических пространствах

X – счётный компакт $\Rightarrow$ $C_p(X)$ равномерно гомеоморфно $C_p[1, \omega]$ **[7]**

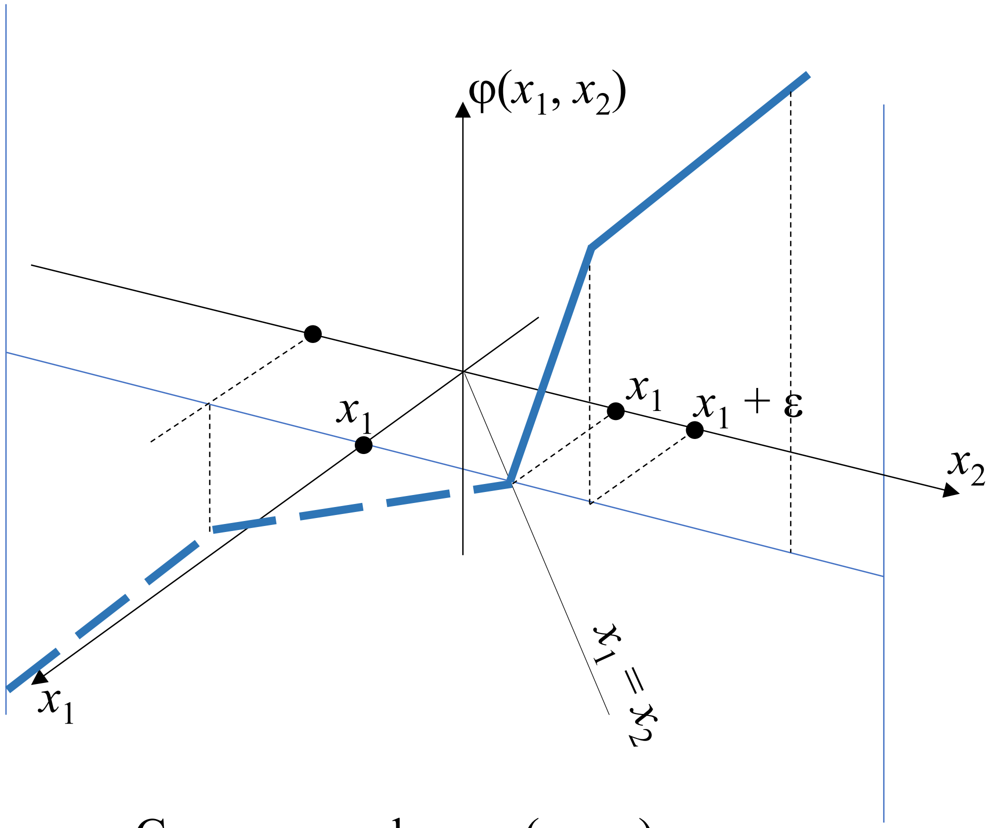
Следствие: Если $X = [1, \omega^{\omega}]$, то $C_p(X)$ и $C_p[1, \omega]$ не линейно гомеоморфны.

X – недискретное счётное метрическое пространство $\Rightarrow$ $C_p(X)$ гомеоморфно $l_2^f \times l_2^f \times\ldots$ **[9]**

$C_p(\alpha\mathbb{N})$ гомеоморфно $C_p(\alpha\mathbb{N}\oplus\mathbb{N})$ и $C_p[0, 1]$ гомеоморфно $C_p(0, 1)$. **[6]**

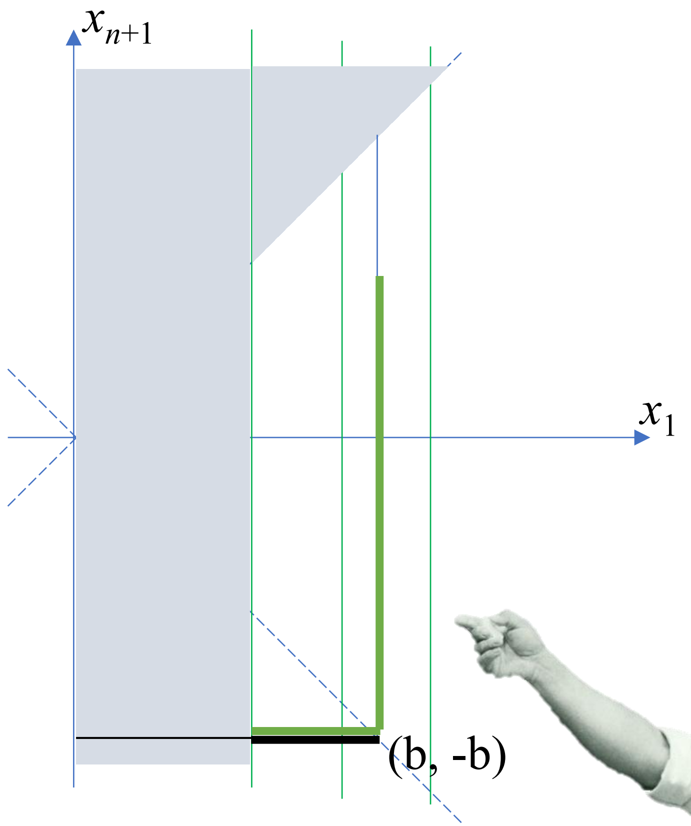
Следствие: 1. Компактность не сохраняется отношением t-эквивалентности;
2. Пространства функций могут быть гомеоморфными, но не равномерно гомеоморфными.

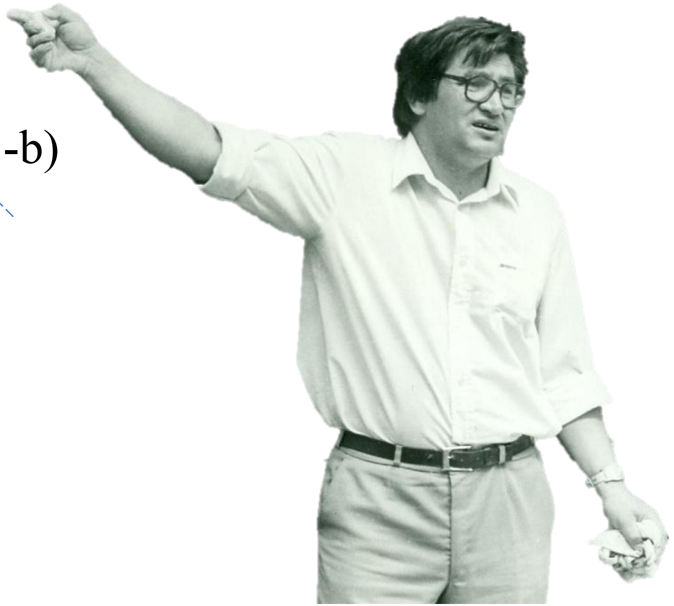
Преобразования плоскости



Сечение графика $\varphi(x_1, x_2)$
плоскостью $x_1 = const > 0$

$$(x_1, x_2) \to (x_1, \varphi(x_1, x_2))$$





Пространства функций на ультрафильтрах

$\mathbb{N}_\xi = \mathbb{N} \cup \{\xi\} \subset \beta\mathbb{N}$, где ξ – точка из нароста $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

$C_p(\mathbb{N}_\xi)$ линейно гомеоморфно $C_p(\mathbb{N}_\eta)$ $\Leftrightarrow$ $\xi \sim \eta$ **[8]**

Следствие: Существует $2^{\mathfrak{c}}$ различных сепарабельных метрических локально выпуклых пространств!

$C_p(\mathbb{N}_\xi)$ линейно гомеоморфно $X \oplus Y$ $\Rightarrow$ X линейно гомеоморфно $C_p(\mathbb{N}_\xi)$, а Y линейно гомеоморфно $s = \mathbb{R}^\omega$ **[8]**

$C_p(\mathbb{N}_\xi)$ обладает наследственным свойством Бэра $\Rightarrow$ ξ есть P-точка **[8]**

Следствие: в ZFC не доказуемо наследственное свойство Бэра $C_p(\mathbb{N}_\xi)$, а значит и включение $\mathbb{Q}$ в $C_p(\mathbb{N}_\xi)$ как замкнутого подпространства.

Классификация Горака – Гулько – Гензе – Хмылёвой пространств $C_p[1, \alpha]$ **[7], [22]**

$(|\alpha| = |\beta| = \tau)$

(а) Если $\tau = \omega$, или τ – сингулярный ординал, или $\tau^2 \leq \alpha \leq \beta$,

то $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ (равномерно) гомеоморфны;

(б) Если τ – несчётный регулярный ординал и $\tau \leq \alpha \leq \beta \leq \tau^2$,

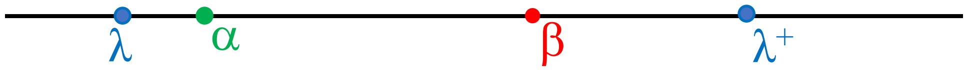
то $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ (равномерно) гомеоморфны $\Leftrightarrow$ $\tau\cdot\sigma \leq \alpha \leq \beta \leq \tau\cdot\sigma^+$,

где $\sigma < \tau$ – начальный ординал.

Классификация Гулько – Гензе – Хмылёвой пространств $B^1{}_p[1, \alpha]$ **[17]**

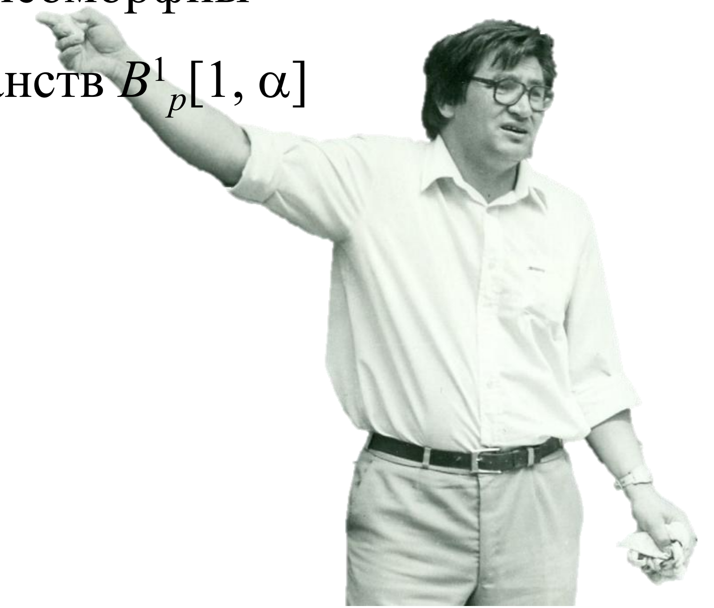
Описан класс ординалов Λ такой, что пространства
$B^1{}_p[1, \alpha]$ и $B^1{}_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны $\Leftrightarrow$ $\lambda \le \alpha \le \beta < \lambda^+$

Здесь $[\lambda, \lambda^+] \cap \Lambda = \{\lambda, \lambda^+\}$



Пространства $B^1{}_p[1, \alpha]$ и $B^1{}_p[1, \beta]$ гомеоморфны $\Leftrightarrow$ они линейно гомеоморфны

Следствие: Имеем полную топологическую классификацию пространств $B^1{}_p[1, \alpha]$



Классификация Гулько – Гензе – Хмылёвой других объектов [16]

Пусть $\Delta = \{\lambda\cdot\sigma\colon \lambda, \sigma$ – кардиналы, λ регулярен, $1 \leq \sigma \leq \lambda\}$.

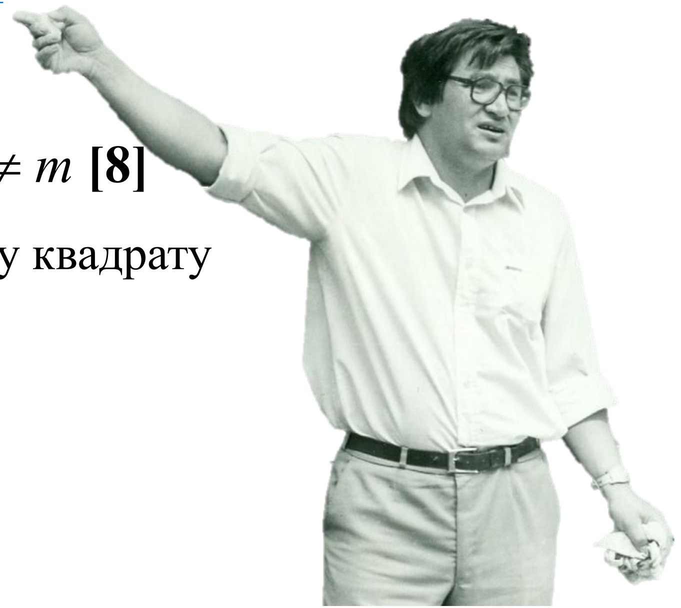
Эквивалентны следующие условия:

(а) $B[1, \alpha]$ и $B[1, \beta]$ топологически изоморфны;

(б) $C_p([1, \alpha], D)$ и $C_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны;

(в) $L_p([1, \alpha], D)$ и $L_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны;

(г) $(\alpha, \beta) \cap \Delta = \varnothing$.



Если $E = C_p[1, \omega_1]$, или $E = C_p[1, \omega_1)$, то E^m и E^n не гомеоморфны при $n \neq m$ **[8]**

Следствие: получен пример пространства $C_p(X)$, не гомеоморфного своему квадрату

Вокруг Σ-произведений I.

1. Проблема Корсона: верно ли, что Σ-произведение метризуемых пространств нормально?

   С.П. Гулько: ДА **[3]**.

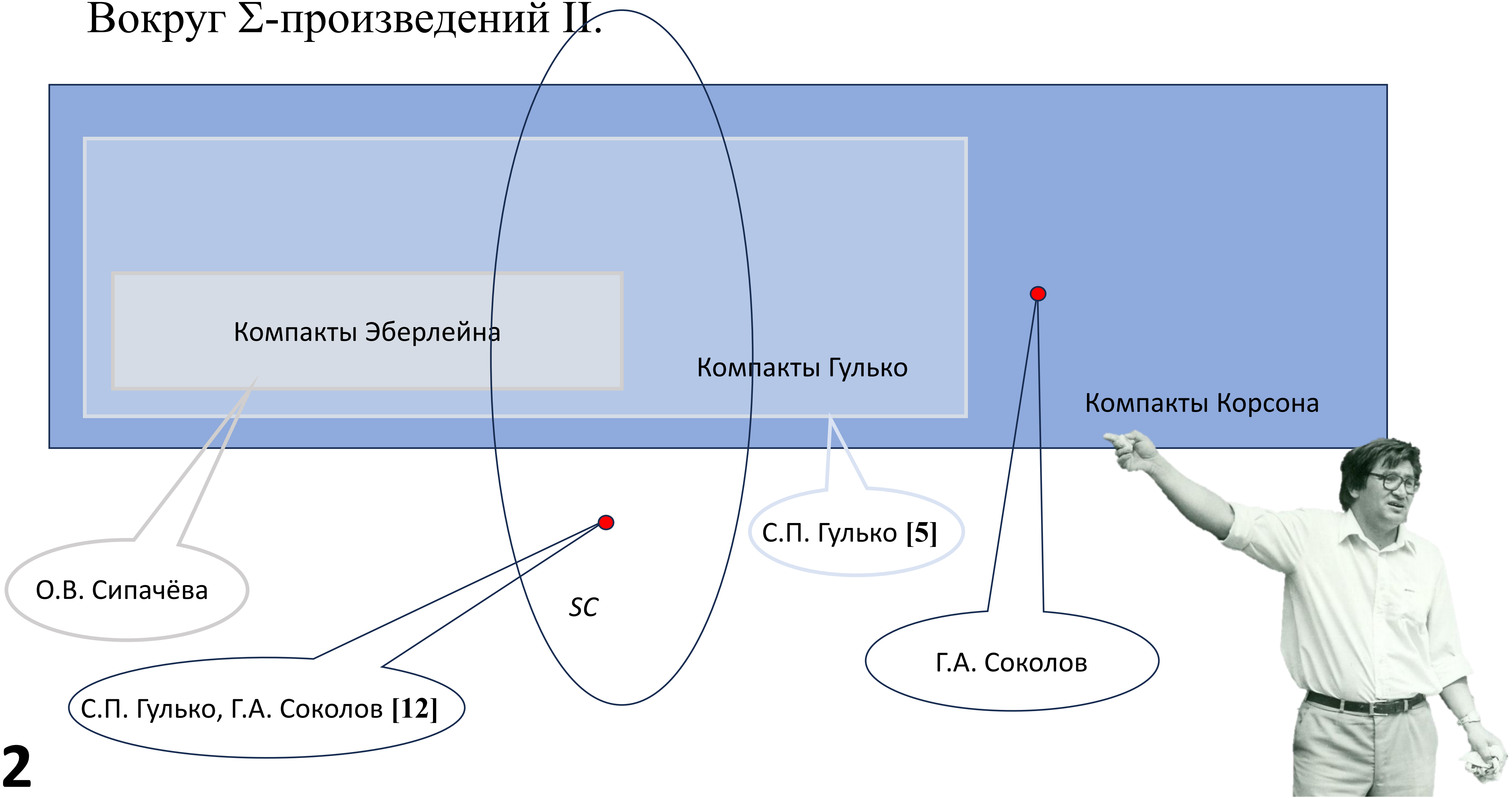
2. Для кардиналов $\tau \geq \omega$, $\lambda \geq 1$ определены специальные классы топологических пространств: $\mathcal{L}_{\tau\lambda}$ $\mathcal{M}_{\tau\lambda}$

Эти классы весьма широки, в частности, они содержат все пространства веса $\leq \tau$, замкнуты относительно операции Σ_μ -произведений при $\mu \leq \tau$ и обладают многими другими замечательными свойствами **[4]**.

Если X из класса $\mathcal{L}_\tau$ (из $\mathcal{M}_\tau$) ($\lambda = 1$), то $l(X) \leq \tau^+$ ($\leq \tau$), $t(X) \leq \tau$ ($\leq \tau^+$), $e(X) \leq \tau$.

Если Y метризуемо, а X из $\mathcal{L}$ (из $\mathcal{M}$), то пространство $C_p(X, Y)$ паракомпактно (коллективно нормально) **[4].**

Вокруг Σ-произведений II.



u-инвариантность размерности dim

Д.С. Павловский: Если X, Y – полиэдры и $C_p(X)$ линейно гомеоморфно $C_p(Y)$,
то $\dim X = \dim Y$

В.Г. Пестов: Если X, Y – тихоновские пространства и $C_p(X)$ линейно гомеоморфно $C_p(Y)$,
то $\dim X = \dim Y$

С.П. Гулько: Если X, Y – тихоновские пространства и $C_p(X)$ равномерно гомеоморфно $C_p(Y)$,
то $\dim X = \dim Y$ **[10]**

Основные научные работы С.П. Гулько

1. С. П. Гулько, «C(S) на бикомпактах с суслинским $\aleph_1$-деревом». В кн.: «Сборник аспирантских работ по математике», Изд-во Томского университета, (1974), 3–7

2. С. П. Гулько, А. В. Оськин, “Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 61–62

3. С. П. Гулько, “О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях”, *Докл. АН СССР*, **237**:3 (1977), 505–508

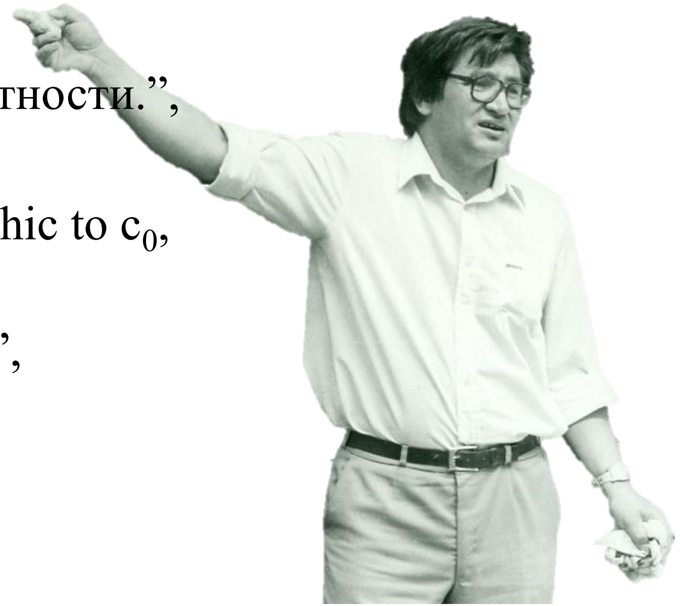
4. С. П. Гулько, “О свойствах некоторых функциональных пространств”, *Докл. АН СССР*, **243**:4 (1978), 839–842

5. С. П. Гулько, “О структуре пространств непрерывных функций и их наследственной паракомпактности”, *УМН*, **34**:6(210) (1979), 33–40

6. С. П. Гулько, Т. Е. Хмылева, “Компактность не сохраняется отношением *t*-эквивалентности.”, *Матем. заметки*, **39**:6 (1986), 895–903

7. GUL’KO, S.P. The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to c_0, *Bull. Acad. Polon. Sci*., 36:(5-6)(1988), 391–396.

8. С. П. Гулько, “Пространства непрерывных функций на ординалах и ультрафильтрах”, *Матем. заметки*, **47**:4 (1990), 26–34



9. T. Dobrovolski, S.P. Gulko, J. Mogilski, “Function spaces homeomorphic to the countable product of l_2^f “,
Topology fnd its Applications, 34 (1990), 153–160

10. С. П. Гулько, “О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций”,
Тр. МИАН СССР, **193** (1992), 82–88

11. GUL’KO, S.P., SOKOLOV, G.A. “P-points in N* and the spaces of continuous functions”,
Topol. Appl., 85(1998), 137–142.

12. GUL’KO, S.P., SOKOLOV, G.A. “Compact spaces of separately continuous functions in two variables”,
Topol. Appl., 107:1–2(2000), 89–96

13. С. П. Гулько, “Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах”,
Вестн. Том. гос. унта. (2003). № 5. 34–38.

14. С.П. Гулько, Е. И. Окулова, «Об одной модификации понятия *t*-эквивалентности топологических пространств»,
Вестн. Томск. гос. ун-та., 2003, №280, 39

15. С. П. Гулько, М. С. Кобылина, “Псевдодеревья и эквивалентные нормы на пространствах непрерывных функций”,
Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2007, № 1, 5–11

16. Л. В. Гензе, С. П. Гулько, Т. Е. Хмылева, “Классификация свободных булевых топологических групп на ординалах”,
Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2008, № 1(2), 23–31

17. Л. В. Гензе, С. П. Гулько, Т. Е. Хмылёва, “Классификация пространств бэровских функций на отрезках ординалов”,
Тр. ИММ УрО РАН, **16**:3 (2010), 61–66

18. С. П. Гулько, В. Р. Лазарев, Т. Е. Хмылева, “О взаимной “ортогональности” классов пространств $C_p(X)$ и $L_p(Y)$”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012, № 1(17), 16–19

19. С. П. Гулько, А. В. Титова, “Классификация пространств непрерывных S1-значных функций на полиэдрах”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2015, № 4(36), 15–20

20. С. П. Гулько, А. В. Иванов, “О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2017, № 50, 5–8

21. Л. В. Гензе, С. П. Гулько, Т. Е. Хмылёва, “Полная топологическая классификация пространств бэровских функций на ординалах”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1268–1278

22. L. V. Genze, S. P. Gul’ko, T. E. Khmyleva, “Classification of spaces of continuous functions on ordinals”, *CMUC*, Vol. 59 (2018), No. 3, 365–370

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !