

Разложимость в произведениях топологических пространств

А. Е. Липин

ИММ УрО РАН

12 июня,
2025

Пусть $\kappa \geq 2$ — кардинал.

Определение

Пространство X называют:

- **κ -разложимым**, если X возможно разбить на κ плотных множеств;

Пусть $\kappa \geq 2$ — кардинал.

Определение

Пространство X называют:

- **κ -разложимым**, если X возможно разбить на κ плотных множеств;
- **неразложимым**, если X не 2-разложимо и не содержит изолированных точек;

Пусть $\kappa \geq 2$ — кардинал.

Определение

Пространство X называют:

- **κ -разложимым**, если X возможно разбить на κ плотных множеств;
- **неразложимым**, если X не 2-разложимо и не содержит изолированных точек;

Hewitt, 1943; Katětov, 1947

Существует регулярное счетное неразложимое пространство.

Пусть $\kappa \geq 2$ — кардинал.

Определение

Пространство X называют:

- **κ -разложимым**, если X возможно разбить на κ плотных множеств;
- **неразложимым**, если X не 2-разложимо и не содержит изолированных точек;
- **максимально разложимым**, если оно $\Delta(X)$ -разложимо, где

$$\Delta(X) = \min\{|U| : U \neq \emptyset, U \text{ открыто в } X\} —$$

дисперсионный характер пространства X .

Пусть $\kappa \geq 2$ — кардинал.

Определение

Пространство X называют:

- **κ -разложимым**, если X возможно разбить на κ плотных множеств;
- **неразложимым**, если X не 2-разложимо и не содержит изолированных точек;
- **максимально разложимым**, если оно $\Delta(X)$ -разложимо, где

$$\Delta(X) = \min\{|U| : U \neq \emptyset, U \text{ открыто в } X\} —$$

дисперсионный характер пространства X .

Ceder, 1964

Метризуемые, компактные, линейно упорядоченные и многие другие пространства максимально разложимы.

Вопрос

Пусть $\kappa \leq \Delta(X)$ и (тихоновское) пространство X μ -разложимо для всех $\mu < \kappa$. Обязательно ли X κ -разложимо?

Вопрос

Пусть $\kappa \leq \Delta(X)$ и (тихоновское) пространство X μ -разложимо для всех $\mu < \kappa$. Обязательно ли X κ -разложимо?

- нет, если $\kappa < \omega$ (van Douwen, 1993; Li Feng, 1997);

Вопрос

Пусть $\kappa \leq \Delta(X)$ и (тихоновское) пространство X μ -разложимо для всех $\mu < \kappa$. Обязательно ли X κ -разложимо?

- нет, если $\kappa < \omega$ (van Douwen, 1993; Li Feng, 1997);
- да, если $\text{cf}(\kappa) = \omega$ (Illanes; Bhaskara Rao, 1994);

Вопрос

Пусть $\kappa \leq \Delta(X)$ и (тихоновское) пространство X μ -разложимо для всех $\mu < \kappa$. Обязательно ли X κ -разложимо?

- нет, если $\kappa < \omega$ (van Douwen, 1993; Li Feng, 1997);
- да, если $\text{cf}(\kappa) = \omega$ (Illanes; Bhaskara Rao, 1994);
- нет, если κ несчетный регулярный (Juhász, Soukup, Szentmiklóssy, 2008);

Вопрос

Пусть $\kappa \leq \Delta(X)$ и (тихоновское) пространство X μ -разложимо для всех $\mu < \kappa$. Обязательно ли X κ -разложимо?

- нет, если $\kappa < \omega$ (van Douwen, 1993; Li Feng, 1997);
- да, если $\text{cf}(\kappa) = \omega$ (Illanes; Bhaskara Rao, 1994);
- нет, если κ несчетный регулярный (Juhász, Soukup, Szentmiklóssy, 2008);
- $\omega < \text{cf}(\kappa) < \kappa$ — открытый вопрос.

Определение

Бесконечное пространство X называют **изодинным**, если $|X| = \Delta(X)$.

Определение

Бесконечное пространство X называют **изодинным**, если $|X| = \Delta(X)$.

Исследование разложимости во многих классах пространств сводится к изодинным пространствам.

Определение

Бесконечное пространство X называют **изодинным**, если $|X| = \Delta(X)$.

Исследование разложимости во многих классах пространств сводится к изодинным пространствам.

- Если всякое непустое открытое подмножество пространства X содержит непустое κ -разложимое подпространство, то X κ -разложимо (Ceder, 1964).

Определение

Бесконечное пространство X называют **изодинным**, если $|X| = \Delta(X)$.

Исследование разложимости во многих классах пространств сводится к изодинным пространствам.

- Если всякое непустое открытое подмножество пространства X содержит непустое κ -разложимое подпространство, то X κ -разложимо (Ceder, 1964).
- Всякое непустое открытое множество содержит непустое открытое изодинное подпространство.

Вопрос

Пусть X и Y — пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Вопрос

Пусть X и Y — изодинные пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Вопрос

Пусть X и Y — изодинные пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Что можно сказать о разложимости $X \times X$?

Вопрос

Пусть X и Y — изодинные пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Что можно сказать о разложимости $X \times X$?

Малыхин, 1973

Квадрат изодинного пространства 2-разложим.

Вопрос

Пусть X и Y — изодинные пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Что можно сказать о разложимости $X \times X$?

Малыхин, 1973

Квадрат изодинного пространства 2-разложим.

Доказательство.

Занумеруем $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$. Положим $A = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha < \beta\}$ и $B = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha > \beta\}$. Множества A и B плотные и не пересекаются. □

Вопрос

Пусть X и Y — изодинные пространства. Что можно сказать о разложимости произведения $X \times Y$?

Что можно сказать о разложимости $X \times X$?

Малыхин, 1973

Квадрат изодинного пространства 2-разложим.

Утверждение

Если X — изодинное пространство, то X^n по меньшей мере $n!$ -разложимо.

О.И. Павлов, 2007, Open Problems in Topology II:

Вопрос

Существует ли T_1 (хаусдорфово, регулярное) изодинное пространство, квадрат которого не 3-разложим? Существует ли такое счетное пространство?

Малыхин, 1973

- (CH) Существует счетное T_1 -пространство без изолированных точек, квадрат которого не 4-разложим.

Малыхин, 1973

- (CH) Существует счетное T_1 -пространство без изолированных точек, квадрат которого не 4-разложим.
- Существует неразложимое изодинное T_1 -пространство, чей квадрат максимально разложим.

Малыхин, 1973

- (CH) Существует счетное T_1 -пространство без изолированных точек, квадрат которого не 4-разложим.
- Существует неразложимое изодинное T_1 -пространство, чей квадрат максимально разложим.
- Если есть измеримый кардинал, то есть и два изодинных T_1 -пространства, произведение которых неразложимо.

Малыхин, 1973

- (CH) Существует счетное T_1 -пространство без изолированных точек, квадрат которого не 4-разложим.
- Существует неразложимое изодинное T_1 -пространство, чей квадрат максимально разложим.
- Если есть измеримый кардинал, то есть и два изодинных T_1 -пространства, произведение которых неразложимо.
- (GCH) Если X и Y изодинные и $|Y| = |X|^+$, то $X \times Y$ максимально разложимо.

Малыхин, 1973

- (CH) Существует счетное T_1 -пространство без изолированных точек, квадрат которого не 4-разложим.
 - Существует неразложимое изодинное T_1 -пространство, чей квадрат максимально разложим.
 - Если есть измеримый кардинал, то есть и два изодинных T_1 -пространства, произведение которых неразложимо.
 - (GCH) Если X и Y изодинные и $|Y| = |X|^+$, то $X \times Y$ максимально разложимо.
-
- ($V = L$ + нет больших кардиналов) Произведение любых двух плотных в себе пространств 2-разложимо (Малыхин, 1975).

Bešlagić, Levy, 1996

Следующие условия равносовместны:

- (1) существует два плотных в себе пространства с неразложимым произведением;
- (2) существует два плотных в себе тихоновских пространства с неразложимым произведением;
- (3) существует измеримый кардинал.

Juhász, Soukup, Szentmiklóssy, 2023:

Теорема

Если совместно существование n измеримых кардиналов, то совместно существование $n + 1$ тихоновского плотного в себе пространства с неразложимым произведением.

Juhász, Soukup, Szentmiklóssy, 2023:

Теорема

Если совместно существование n измеримых кардиналов, то совместно существование $n + 1$ тихоновского плотного в себе пространства с неразложимым произведением.

Теорема

Если совместно существование измеримого кардинала, то совместно существование монотонно нормального изодинного пространства мощности $\aleph_\omega$, произведение которого с любым счетным пространством не ω_1 -разложимо.

Елькин, 1969

Бесконечное произведение неодноточечных пространств $\mathfrak{c}$ -разложимо.

Теорема 1

Квадрат хаусдорфова счетного плотного в себе пространства максимально разложим.

Теорема 1

Квадрат хаусдорфова счетного плотного в себе пространства максимально разложим.

Следствие

Произведение двух и более хаусдорфовых сепарабельных плотных в себе пространств ω -разложимо.

Теорема 2

Если $2^\kappa = \kappa^+$, X и Y — изодинные пространства,
 $\{|X|, \text{cf}|X|\} \cap \{\kappa, \kappa^+\} \neq \emptyset$ и $\text{cf}|Y| = \kappa^+$, то пространство $X \times Y$
 κ^+ -разложимо.

Теорема 2

Если $2^\kappa = \kappa^+$, X и Y — изодинные пространства,
 $\{|X|, \text{cf}|X|\} \cap \{\kappa, \kappa^+\} \neq \emptyset$ и $\text{cf}|Y| = \kappa^+$, то пространство $X \times Y$
 κ^+ -разложимо.

Следствия (GCH)

Пусть X и Y — изодинные пространства.

Теорема 2

Если $2^\kappa = \kappa^+$, X и Y — изодинные пространства,
 $\{|X|, \text{cf}|X|\} \cap \{\kappa, \kappa^+\} \neq \emptyset$ и $\text{cf}|Y| = \kappa^+$, то пространство $X \times Y$
 κ^+ -разложимо.

Следствия (GCH)

Пусть X и Y — изодинные пространства.

- (1) Если $|X| = |Y|$ — изолированный кардинал, то $X \times Y$
максимально разложимо.

Теорема 2

Если $2^\kappa = \kappa^+$, X и Y — изодинные пространства,
 $\{|X|, \text{cf}|X|\} \cap \{\kappa, \kappa^+\} \neq \emptyset$ и $\text{cf}|Y| = \kappa^+$, то пространство $X \times Y$
 κ^+ -разложимо.

Следствия (GCH)

Пусть X и Y — изодинные пространства.

- (1) Если $|X| = |Y|$ — изолированный кардинал, то $X \times Y$
максимально разложимо.
- (2) Если $\text{cf}|X| = \text{cf}|Y|$ — изолированный кардинал, то $X \times Y$
 $\text{cf}|X|$ -разложимо.

Теорема 2

Если $2^\kappa = \kappa^+$, X и Y — изодинные пространства, $\{|X|, \text{cf}|X|\} \cap \{\kappa, \kappa^+\} \neq \emptyset$ и $\text{cf}|Y| = \kappa^+$, то пространство $X \times Y$ κ^+ -разложимо.

Следствия (GCH)

Пусть X и Y — изодинные пространства.

- (1) Если $|X| = |Y|$ — изолированный кардинал, то $X \times Y$ максимально разложимо.
- (2) Если $\text{cf}|X| = \text{cf}|Y|$ — изолированный кардинал, то $X \times Y$ $\text{cf}|X|$ -разложимо.
- (3) Если X хаусдорфово и $X \times X$ не ω -разложимо, то $|X| \geq \aleph_\omega$.

- (4) Если $|Y| = |X|^+$, то $X \times Y$ максимально разложимо (Малыхин, 1973).

- (4) Если $|Y| = |X|^+$, то $X \times Y$ максимально разложимо (Малыхин, 1973).
- (5) Если $|X| = \omega_1$ и $|Y| = \aleph_\omega$, то $X \times Y$ ω_1 -разложимо.

- (4) Если $|Y| = |X|^+$, то $X \times Y$ максимально разложимо (Малыхин, 1973).
- (5) Если $|X| = \omega_1$ и $|Y| = \aleph_\omega$, то $X \times Y$ ω_1 -разложимо.

Juhász, Soukup, Szentmiklóssy, 2023

Если совместно существование измеримого кардинала, то совместно существование монотонно нормального изодинного пространства мощности $\aleph_\omega$, произведение которого с любым счетным пространством не ω_1 -разложимо.

Теорема 3 (МА или $\tau = c$)

Если X и Y — изодинные пространства, $cf|X| = \omega$ и $cf|Y| = cf(c)$, то пространство $X \times Y$ ω -разложимо.

Теорема 3 (МА или $\tau = c$)

Если X и Y — изодинные пространства, $cf|X| = \omega$ и $cf|Y| = cf(c)$, то пространство $X \times Y$ ω -разложимо.
Если к тому же $cf(c) = \omega_1$, то пространство $X \times Y$ ω_1 -разложимо.

Вопрос

Верно ли, что квадрат (хаусдорфова, регулярного,...) изодинного пространства мощности $\aleph_\omega$ 3-разложим? Максимально разложим?