Геометрия центральных расширений нильпотентных алгебр Ли

Д.В. Миллионщиков

МГУ им. М.В. Ломоносова

конференция "Декабрьские чтения в Томске"

13 декабря 2019 г.

План

- Два полюса в мире нильпотентных алгебр Ли
- Как классифицировать нильпотентные алгебры Ли ?
- Естественно градуированные алгебры Ли или алгебры Карно
- Нильпотентные алгебры Ли как центральные расширения
- Элементарная геометрия и центральные расширения свободной нильпотентной алгебры Ли

Два полюса в мире нильпотентных алгебр Ли

Рассмотрим **нижний центральный ряд** конечномерной **нильпотентной** алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^s \supset 0.$$

Номер s последнего нетривиального идеала $\mathfrak{g}^s \neq 0$ этого ряда называется **ниль-индексом** алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Нильпотентные алгебры Ли ниль-индекса $s = 2$

$$\mathfrak{g} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset 0.$$

называются иногда **метабелевыми** алгебрами Ли.

Алгебры Ли с максимальным (для фиксированной размерности $\dim \mathfrak{g}$) значением ниль-индекса $s = \dim \mathfrak{g} - 1$ называются **филиформными** алгебрами Ли.

Первые размерности

- размерности $1D$ и $2D$:
  только абелевы алгебры $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ с индексом $s = 1$
- $3D$: впервые появляется (кроме абелевой $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$) нетривиальная нильпотентная алгебра – алгебра Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$ – алгебра верхнетреугольных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Может быть задана базисом e_1, e_3, e_3 и соотношением

$$[e_1, e_2] = e_3.$$

Проблема классификации

- $dim = 4$ – две алгебры:
  1) абелева $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и
  2) (филиформная) $\mathfrak{m}_0(3)$ – она задается базисом e_1, e_3, e_3, e_4, и соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4.$$

Первым начал классифицировать нильпотентные алгебры малых размерностей ученик Энгеля – Umlauf (диссертация 1891 года).

Классификация Морозова

Следующий серьезный (и окончательный) результат для $\dim \mathfrak{g} \leq 6$ (поле нулевой характеристики) – В.В. Морозов (1958). Основная идея индуктивного метода Морозова – использовать **максимальный абелев идеал** $I \subset \mathfrak{g}$ и рассматривать $\mathfrak{g}$ как абелево расширение $\mathfrak{g}/I$.

- $dim = 5$ – 6 неразложимых алгебр Ли и 3 разложимых

$$\mathbb{R}^6, \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathfrak{m}_0(3) \oplus \mathbb{R}.$$

- $dim = 6$ – 22 (над $\mathbb{R}$) неразложимых алгебр Ли и 10 разложимых. Над полем $\mathbb{C}$ – 20 неразложимых.

Трудности: надо знать и классификацию алгебр $\mathfrak{g}/I$ малых размерностей вместе с классификацией их представлений.

Классификация комплексных 7-мерных алгебр Ли

Диссертация Э.Н. Сафиуллиной 1976 года - депонирована в ВИНИТИ.

C. Seeley – классификация 7-мерных нильпотентных алгебр Ли над $\mathbb{C}$ (1993).

Классификация метабелевых алгебр Ли = ограничитель классификации всех нильпотентных алгебр Ли

Метабелева алгебра Ли $\mathfrak{g} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0$.

Структура метабелевой алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ полностью определяется отображением $[,] : \wedge^2 U \to V$, где $V = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, а U – дополнение к V к $\mathfrak{g}$. Верно и обратное утверждение.

Две таких структуры изоморфны, тогда и только тогда, когда соответствующие отображения **лежат в одной орбите** действия группы $GL(U) \times GL(V)$. Такая задача относится к классической теории инвариантов.

Основные результаты: M. Gauger (1973) (классификация для размерностей $7, 8$), Л. Галицкий и Д. Тимашев (1999) (классификация в размерности 9)

Естественно градуированные алгебры Ли

Идеалы $\mathfrak{g}^i$ нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяют **убывающую фильтрацию** алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определена ассоциированная положительно градуированная алгебра Ли

$$\mathrm{gr}\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}^i / \mathfrak{g}^{i+1}.$$

Определение

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется **естественно градуируемой**, если

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{gr}\mathfrak{g}.$$

Очевидно, что **метабелева алгебра Ли является естественно градуируемой**. Фиксация такой градуировки – это выбор дополнения $U = (gr\mathfrak{g})_1$, тогда $(gr\mathfrak{g})_2 = V$.

Алгебры Карно и деформации

Конечномерная естественно градуированная алгебра Ли называется в субримановой геометрии *алгеброй Карно*

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i, \; [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, i = 1, \dots, n-1.$$

Важное замечание: Всякая нильпотентная алгебра Ли является **фильтрованной деформацией** $[,] + \Psi$ своей ассоциированной градуированной алгебры Ли $gr\mathfrak{g}$ (некоторой алгебры Карно).

Естеств. градуированная алгебра Ли и ее деформации


Естественно градуированные филиформные алгебры Ли

Простейшая филиформная алгебра Карно $\mathfrak{m}_0(n)$ задается базисом $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{n+1}$ и соотношениями

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \; i = 2, \dots, n.$$

Теорема (Вернь)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}_i$ – естественно градуированная филиформная n-мерная алгебра Ли. Тогда
1) если $n = 2k+1$, то $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_0(2k)$;
2) если $n = 2k$, то $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_0(2k-1)$, либо $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_1(2k-1)$, заданной базисом $e_1, \dots, e_{2k}$ и соотношениями

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \; i = 2, \dots, 2k{-}1;$$
$$[e_j, e_{2k+1-j}] = (-1)^{j+1} e_{2k}, \quad j = 2, \dots, k.$$

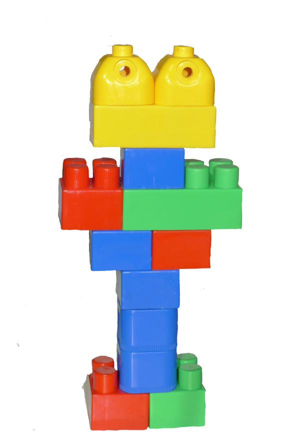
М., 2017, ДАН 2018, Мат. сб. 2019

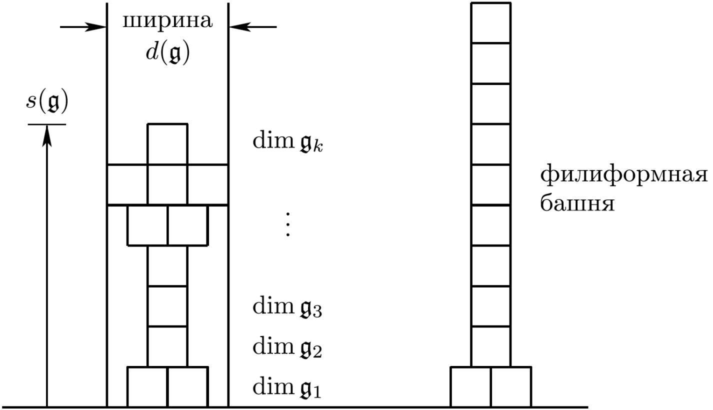
Обобщение теоремы Вернь об естественно градуированных филиформных алгебрах Ли.

Классификация естественно градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i$ "ширины 3/2"таких, что:

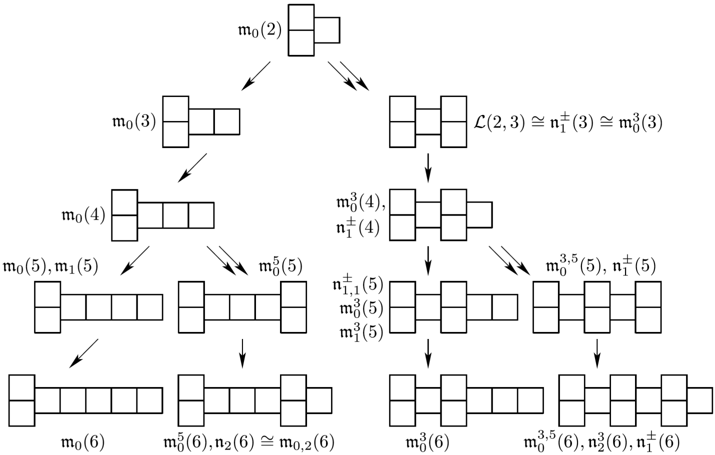
$$\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, 1 \leq i \leq n-1.$$

Легобашня высоты (ниль-индекса) 9 с $\dim \mathfrak{g} = 15$.




ширина
$d(\mathfrak{g})$
$s(\mathfrak{g})$
$\dim \mathfrak{g}_k$
$\vdots$
$\dim \mathfrak{g}_3$
$\dim \mathfrak{g}_2$
$\dim \mathfrak{g}_1$
филиформная
башня

"Генеалогическое"древо узких алгебр Карно



Важное замечание!

Последний нетривиальный идеал $\mathfrak{g}^s$ из нижнего центрально ряда принадлежит центру $Z(\mathfrak{g})$ нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Можно рассмотреть точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{g}^s \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^s \to 0.$$

Центральные расширения

Центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется точная последовательность

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

алгебр Ли, в которой образ $i(V)$ содержится в центре $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$, а V – абелева алгебра Ли.
Заметим, что как векторное пространство $\tilde{\mathfrak{g}} = V \oplus \mathfrak{g}$, а скобка Ли задана

$$[(v,g),(w,h)]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = (c(g,h),[g,h]_{\mathfrak{g}}), \quad g,h \in \mathfrak{g},$$

где $c : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to V$ – коцикл, задающий наше расширение

$$c([g,h]_{\mathfrak{g}},e) + c([h,e]_{\mathfrak{g}},g) + c([e,g]_{\mathfrak{g}},h) = 0, \ \ \forall g,h,e \in \mathfrak{g},$$

Два расширения называются **эквивалентными**, если существует изоморфизм $f : \tilde{\mathfrak{g}}_2 \to \tilde{\mathfrak{g}}_1$, такой, что

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i_1} & \tilde{\mathfrak{g}}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Id} & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle Id} & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i_2} & \tilde{\mathfrak{g}}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (2)$$

Коцикл c является **кограницей** $c = d\mu$, если существует такое линейное отображение $\mu : \mathfrak{g} \to V$, что

$$c(x, y) = \mu([x, y]_{\mathfrak{g}}).$$

Когомологичные коциклы определяют эквивалентные центральные расширения, т.к. линейное отображение

$$f = Id + \mu : V \oplus \mathfrak{g} \to V \oplus \mathfrak{g}, \; f(v, g) = (v + \mu(g), g),$$

является изоморфизмом в диаграмме (2). Обратное утверждение также верно.

Может так случиться, что алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, отвечающие **неэквивалентным** центральным расширениям, **будут, тем не менее, изоморфны**.

Дело в том, что изоморфизм f из коммутативной диаграммы (2) должен переводить $i_2(V) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_2$ в $i_1(V) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_1$ и индуцировать тождественное отображение на уровне фактор-алгебр $Id : \tilde{\mathfrak{g}}_2/i_2(V) \to \tilde{\mathfrak{g}}_1/i_1(V)$.

Отсутствие изоморфизма f с такими дополнительными свойствами **не означает отсутствия изоморфизма вообще**.

В общем случае изоморфизм f **не обязан** переводить $i_2(V)$ в $i_1(V)$!!!

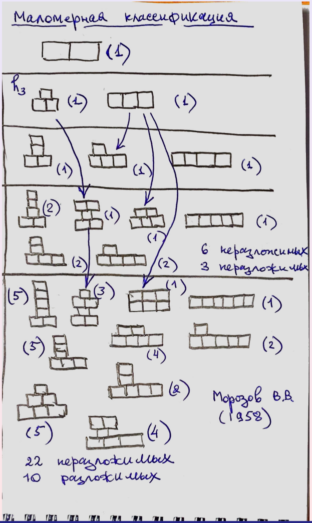
Это показано V.G. Bardakov and M. Singh (Journal of Algebra and Its Applications **16**:5 (2017)), См. также Y. Bahturin and S. Nabiyev, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **62** (1992).

М. и Р. Хименес, Труды МИАН (2019)

Теорема (Градуированная версия)

Пусть $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m\}$ *и* $\{\tilde{c}'_1, \dots, \tilde{c}'_m\}$ *– два набора коциклов естественной градуировки* s *в* $H^2_{(s)}(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$*. Они определяют изоморфные центральные расширения* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *и* $\tilde{\mathfrak{g}}'$ *тогда и только тогда, когда линейные оболочки* $\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m \rangle$ *и* $\langle \tilde{c}'_1, \dots, \tilde{c}'_m \rangle$ *лежат в одной орбите линейного действия группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$ *на подпространстве* $H^2_{(s)}(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$*.*

Индуктивный способ классификации



Свободная нильпотентная алгебра Ли $\mathcal{L}(m, k)$

Пусть $\mathcal{L}(m)$ – свободная алгебра Ли от m образующих.

Определим свободную нильпотентную алгебру Ли $\mathcal{L}(m, k)$ как

$$\mathcal{L}(m, k) = \mathcal{L}(m)/\mathcal{L}(m)^{k+1}.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}(m, k)$ является естественно градуированной алгебры Ли длины (ниль-индекса) k.

Будем исследовать ее последовательные центральные расширения при $m = 2, k = 3$.

$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{L}(2,3))$-действие на $\mathbb{P}H^2_{(4)}(\mathcal{L}(2,3),\mathbb{R})$

Коцепной комплекс (минимальная модель) $\mathcal{L}(2,3)$:

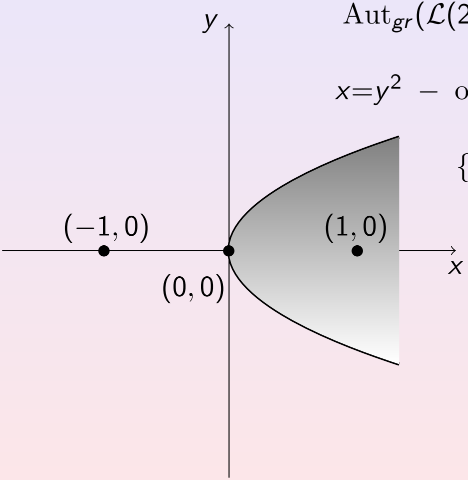
$$\begin{gathered} da^1 = db^1 = 0, \quad da^2 = a^1 \wedge b^1, \\ da^3 = a^1 \wedge a^2, \quad db^3 = b^1 \wedge a^2; \end{gathered} \tag{3}$$

$$H^2_{(4)}(\mathcal{L}(2,3),\mathbb{R}) = \langle a^1 \wedge a^3,\ a^1 \wedge b^3 + a^3 \wedge b^1,\ b^1 \wedge b^3 \rangle.$$

Подгруппа "градуированных"автоморфизмов
$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{L}(2,3)) = GL(2,\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \mu \end{pmatrix} \to \det A \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\rho\alpha & \rho^2 \\ \alpha\beta & \rho\beta + \alpha\mu & \mu\rho \\ \beta^2 & 2\mu\beta & \mu^2 \end{pmatrix}$$

3 орбиты $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{L}(2,3))$-действия на $\mathbb{P}H^2_{(4)}(\mathcal{L}(2,3),\mathbb{R})$



$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{L}(2,3)){=}GL(2,\mathbb{R})$

$x{=}y^2$ – orbit of $(0{:}0{:}1)$

$\{(\rho^2{:}\mu\rho{:}\mu^2)\}\subset\mathbb{R}P^2$
$\mu\neq 0$

$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$-действие на $\mathbb{P}H^2_{(5)}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$

Минимальная модель

$$\begin{gathered} da^1{=}db^1{=}0, \quad da^2{=}a^1\wedge b^1, \\ da^3{=}a^1\wedge a^2, \quad db^3 = b^1\wedge a^2, \\ da^4{=}a^1\wedge a^3, \quad db^4{=}a^1\wedge b^3+a^3\wedge b^1. \end{gathered} \tag{4}$$

$H^2_{(5)}(\mathfrak{g},\mathbb{R}){=}\langle a^1\wedge a^4, a^1\wedge b^4+a^4\wedge b^1, b^1\wedge b^4-a^2\wedge b^3, b^1\wedge a^4-a^2\wedge a^3\rangle.$

Градуированные автоморфизмы

$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g}){=}\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \rho & \mu\end{pmatrix}, \alpha,\mu{\neq}0\right\}$

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \rho & \mu\end{pmatrix} \to \alpha^2\mu \begin{pmatrix}\alpha^2 & 3\rho\alpha & \rho\alpha & 2\rho^2\\ 0 & \alpha\mu & 0 & \mu\rho\\ 0 & 0 & \alpha\mu & \mu\rho\\ 0 & 0 & 0 & \mu^2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$-действие на $\mathbb{P}H^2_{(5)}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$

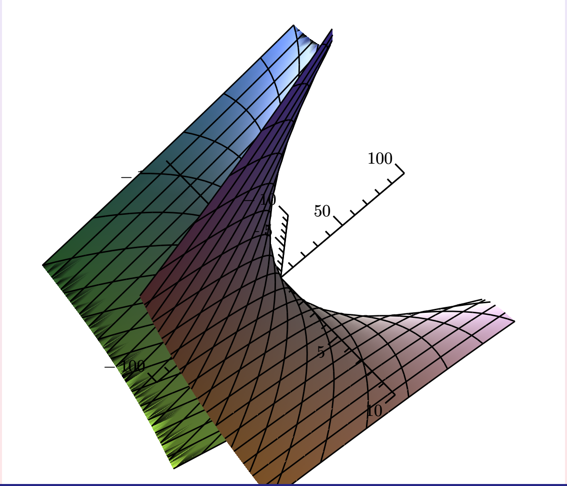
Имеется двухпараметрическое аффинное действие на $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2 & 3ab & ab \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b^2 \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

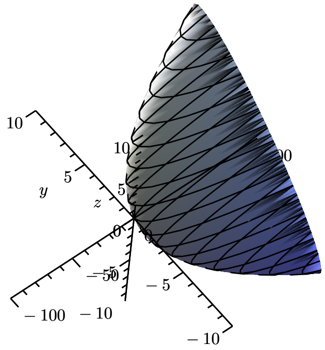
Плоскость $y{=}z$ инвариантна (содержит 3 орбиты) и имеется однопараметрическое семейство O_t орбит

$$O_t = \left\{ (t(z-y)^2+yz+y^2, y, z), y \neq z \right\}$$

Орбиты д. $Aut_{gr}\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \right\}$ на $\mathbb{P}H^2_{(5)}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}P^3$



Орбиты д. $Aut_{gr}\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \right\}$ на $\mathbb{P}H^2_{(5)}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}P^3$



Нильмногообразия

Определение

Нильмногообразие M – компактное однородное пространство вида $M = G/\Gamma$, где G является односвязной нильпотентной группой Ли. $\Gamma \subset G$ – кокомпактная решетка.

Пример

1) $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, t \in \mathbb{R}, \;\; \Gamma_3 = \{(\dots), x, y, t \in \mathbb{Z}\} \right\}$

$M^3 = H_3/\Gamma_3, \; KT = M^3 \times S^1$.

Конструкция А.И. Мальцева

Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с базисом $e_1, \dots, e_n$ и

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{Q},$$

Замечание

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ имеет структуру группы Ли $\star$ (формула Кэмпбелла-Хаусдорфа):

$$x \star y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

так, что G является нильптентной группой Ли, $\Gamma \subset G$ – подгруппа, порожденная $e_1, e_2, \dots, e_n$.
G/Γ – компактное нильмногообразие