Полиэдральные произведения, прямоугольные группы Коксетера и гиперболические многообразия.

Тарас Евгеньевич ПАНОВ

Механико-математический факультет МГУ
ИППИ РАН

Декабрьские чтения в Томске
10–15 декабря 2019 г.

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varnothing \in \mathcal{K}$.

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = Y_1 \times \cdots \times Y_m \qquad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\quad \varnothing \in \mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = Y_1 \times \dots \times Y_m \qquad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

$\mathcal{K}$-полиэдральное произведение набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ есть

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Bigr) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\quad \varnothing \in \mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = Y_1 \times \cdots \times Y_m \qquad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

$\mathcal{K}$-полиэдральное произведение набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ есть

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Bigr) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Обозначение: $(X, A)^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$, если $(X_i, A_i) = (X, A)$;
$\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, pt)^{\mathcal{K}}$, $X^{\mathcal{K}} = (X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Категорный подход

Категория граней $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$.
Объекты: симплексы $I \in \mathcal{K}$. Морфизмы: вложения $I \subset J$.

Категорный подход

Категория граней $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$.
Объекты: симплексы $I \in \mathcal{K}$. Морфизмы: вложения $I \subset J$.

TOP категория топологических пространств.
Определим $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграму

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})\colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathrm{TOP}, \\ I &\longmapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I, \end{aligned}$$

Категорный подход

Категория граней $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$.
Объекты: симплексы $I \in \mathcal{K}$. Морфизмы: вложения $I \subset J$.

TOP категория топологических пространств.
Определим $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграму

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathrm{TOP}, \\ I &\longmapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I, \end{aligned}$$

морфизм $I \subset J$ в $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$ переходит во вложение пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^J$.

Категорный подход

Категория граней $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$.
Объекты: симплексы $I \in \mathcal{K}$. Морфизмы: вложения $I \subset J$.

TOP категория топологических пространств.
Определим $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграму

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})\colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathrm{TOP}, \\ I &\longmapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I, \end{aligned}$$

морфизм $I \subset J$ в $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$ переходит во вложение пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^J$.

Тогда имеем

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \operatorname*{colim}_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I.$$

Пример

$(X, A) = (S^1, pt)$, где S^1 — окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Пример

$(X, A) = (S^1, pt)$, где S^1 — окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Если $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{m\}\}$ (дискретный комплекс из m точек), то полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathcal{K}}$ есть букет $(S^1)^{\vee m}$ из m окружностей.

Пример

$(X, A) = (S^1, pt)$, где S^1 — окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Если $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{m\}\}$ (дискретный комплекс из m точек), то полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathcal{K}}$ есть букет $(S^1)^{\vee m}$ из m окружностей.

Если $\mathcal{K}$ состоит из всех собственных подмножеств в $[m]$ (т. е. $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$ — граница симплекса), то $(S^1)^{\mathcal{K}}$ есть толстый букет m окружностей; он получается удалением m-мерной клетки из тора $(S^1)^m$.

Пример

$(X,A)=(S^1,pt)$, где S^1 — окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal K}=\bigcup_{I\in\mathcal K}(S^1)^I\subset(S^1)^m.$$

Если $\mathcal K=\{\varnothing,\{1\},\ldots,\{m\}\}$ (дискретный комплекс из m точек), то полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathcal K}$ есть букет $(S^1)^{\vee m}$ из m окружностей.

Если $\mathcal K$ состоит из всех собственных подмножеств в $[m]$ (т. е. $\mathcal K=\partial\Delta^{m-1}$ — граница симплекса), то $(S^1)^{\mathcal K}$ есть толстый букет m окружностей; он получается удалением m-мерной клетки из тора $(S^1)^m$.

Для общего комплекса $\mathcal K$ на m вершинах, $(S^1)^{\vee m}\subset(S^1)^{\mathcal K}\subset(S^1)^m$.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{I} \subset \mathbb{R}^{m}.$$

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{I} \subset \mathbb{R}^m.$$

Если $\mathcal{K}$ — набор m точек, то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть «решётка» в $\mathbb{R}^m$, состоящая из всех прямых, параллельных одной из координатных осей и проходящих через целые точки.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{I} \subset \mathbb{R}^{m}.$$

Если $\mathcal{K}$ — набор m точек, то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть «решётка» в $\mathbb{R}^m$, состоящая из всех прямых, параллельных одной из координатных осей и проходящих через целые точки.

Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть объединение всех целочисленных гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, pt)$, где $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Тогда

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, pt)$, где $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Тогда

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Пример

$(X, A) = (D^1, S^0)$, где $D^1 = [-1, 1]$ и $S^0 = \{1, -1\}$.
Вещественный момент-угол-комплекс есть

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, pt)$, где $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Тогда

$$(\mathbb{R}P^\infty)^\mathcal{K} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Пример

$(X, A) = (D^1, S^0)$, где $D^1 = [-1, 1]$ и $S^0 = \{1, -1\}$.
Вещественный момент-угол-комплекс есть

$$\mathcal{R}_\mathcal{K} := (D^1, S^0)^\mathcal{K} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс в m-кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, pt)$, где $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Тогда

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Пример

$(X, A) = (D^1, S^0)$, где $D^1 = [-1, 1]$ и $S^0 = \{1, -1\}$.
Вещественный момент-угол-комплекс есть

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс в m-кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

Если $\mathcal{K} = m$ точек, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-мерный остов куба $[-1, 1]^m$.
Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть граница куба $[-1, 1]^m$.
$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является топологическим многообразием, если $|\mathcal{K}|$ — сфера.

Четыре полиэдральных произведения из примеров выше входят в гомотопические расслоения

$$(\mathbb{R},\mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^m,$$

$$(D^1,S^0)^{\mathcal{K}} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Аналогом полиэдрального произведения $X^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I\in\mathcal{K}} X^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Аналогом полиэдрального произведения $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I\in\mathcal{K}} \boldsymbol{X}^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Граф-произведение

$\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ — набор из m групп, $G_i \neq \{1\}$.

Аналогом полиэдрального произведения $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{X}^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Граф-произведение

$\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ — набор из m групп, $G_i \neq \{1\}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$\boldsymbol{G}^I = \Big\{(g_1, \ldots, g_m) \in \prod_{k=1}^{m} G_k \colon\ g_k = 1 \quad \text{при } k \notin I\Big\}.$$

Аналогом полиэдрального произведения $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{X}^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Граф-произведение

$\boldsymbol{G} = (G_1, \dots, G_m)$ — набор из m групп, $G_i \neq \{1\}$.

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$\boldsymbol{G}^I = \Big\{(g_1, \dots, g_m) \in \prod_{k=1}^{m} G_k \colon\; g_k = 1 \quad \text{при } k \notin I\Big\}.$$

Рассмотрим следующую $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграмму групп:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{G}) \colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathrm{GRP}, \qquad I \longmapsto \boldsymbol{G}^I,$$

где морфизм $I \subset J$ переходит в канонический мономорфизм $\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^J$.

Аналогом полиэдрального произведения $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{X}^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Граф-произведение

$\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ — набор из m групп, $G_i \neq \{1\}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$\boldsymbol{G}^I = \Bigl\{(g_1, \ldots, g_m) \in \prod_{k=1}^{m} G_k \colon \; g_k = 1 \quad \text{при } k \notin I\Bigr\}.$$

Рассмотрим следующую $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграмму групп:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{G}) \colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathrm{GRP}, \qquad I \longmapsto \boldsymbol{G}^I,$$

где морфизм $I \subset J$ переходит в канонический мономорфизм $\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^J$.

Граф-произведение групп $G_1, \ldots, G_m$ есть

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{G}) = \operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I.$$

Граф-произведение $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова (графа) $\mathcal{K}$.
А именно,

Граф-произведение $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова (графа) $\mathcal{K}$. А именно,

Предложение

Имеем изоморфизм групп

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \cong \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} G_k \big/ (g_i g_j = g_j g_i, \ \text{ если } g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}),$$

где $\bigstar_{k=1}^{m} G_k$ *— свободное произведение групп* G_k*.*

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. Тогда $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ есть прямоугольная группа Артина (граф-группа, частично свободная группа)

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \ldots, g_m) \big/ (g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \ldots, g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. Тогда $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ есть прямоугольная группа Артина (граф-группа, частично свободная группа)

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \ldots, g_m) \big/ (g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \ldots, g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$ — полный симплекс, то $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$.
Если $\mathcal{K} = m$ точек, мы получаем свободную группу F_m ранга m.

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. Тогда $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ есть прямоугольная группа Артина (граф-группа, частично свободная группа)

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \ldots, g_m)/(g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i,j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \ldots, g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$ — полный симплекс, то $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$.
Если $\mathcal{K} = m$ точек, мы получаем свободную группу F_m ранга m.

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}_2$. Тогда $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ есть прямоугольная группа Коксетера

$$RC_{\mathcal{K}} = F(g_1, \ldots, g_m)/(g_i^2 = 1, \ g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i,j\} \in \mathcal{K}).$$

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические расссслоения $\mathcal{L}_\mathcal{K} \to (S^1)^\mathcal{K} \to (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^m$ обобщаются следующим образом.

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические рассслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \to (S^1)^{\mathcal{K}} \to (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{R}P^\infty)^m$ обобщаются следующим образом.

Предложение

Существует гомотопическое расслоение

$$(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (B\mathbf{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow \prod_{k=1}^{m} BG_k.$$

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические расcслоения $\mathcal{L}_\mathcal{K} \to (S^1)^\mathcal{K} \to (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^m$ обобщаются следующим образом.

Предложение

Существует гомотопическое расслоение

$$(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^\mathcal{K} \longrightarrow (B\boldsymbol{G})^\mathcal{K} \longrightarrow \prod_{k=1}^{m} BG_k.$$

Недостающая грань (минимальная негрань) комплекса $\mathcal{K}$ — это такое подмножество $I \subset [m]$, что $I \notin \mathcal{K}$, но $J \in \mathcal{K}$ для любого $J \subsetneq I$.

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические расcслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \to (S^1)^{\mathcal{K}} \to (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{R}P^\infty)^m$ обобщаются следующим образом.

Предложение

Существует гомотопическое расслоение

$$(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (B\mathbf{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow \prod_{k=1}^{m} BG_k.$$

Недостающая грань (минимальная негрань) комплекса $\mathcal{K}$ — это такое подмножество $I \subset [m]$, что $I \notin \mathcal{K}$, но $J \in \mathcal{K}$ для любого $J \subsetneq I$.

$\mathcal{K}$ называется флаговым комплексом, если любая его недостающая грань имеет две вершины. Эквивалентно, $\mathcal{K}$ флаговый, если любой набор вершин в $\mathcal{K}$, которые попарно соединены рёбрами, является набором вершин симплекса.

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические рассслоения $\mathcal{L}_\mathcal{K} \to (S^1)^\mathcal{K} \to (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{R}P^\infty)^m$ обобщаются следующим образом.

Предложение

Существует гомотопическое расслоение

$$(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^\mathcal{K} \longrightarrow (B\mathbf{G})^\mathcal{K} \longrightarrow \prod_{k=1}^m BG_k.$$

Недостающая грань (минимальная неграрь) комплекса $\mathcal{K}$ — это такое подмножество $I \subset [m]$, что $I \notin \mathcal{K}$, но $J \in \mathcal{K}$ для любого $J \subsetneq I$.

$\mathcal{K}$ называется флаговым комплексом, если любая его недостающая грань имеет две вершины. Эквивалентно, $\mathcal{K}$ флаговый, если любой набор вершин в $\mathcal{K}$, которые попарно соединены рёбрами, является набором вершин симплекса.

Флаговый комплекс $\mathcal{K}$ задаётся своим 1-остовом $\mathcal{K}^1$.

Теорема (...)

Пусть $G^{\mathcal{K}}$ *— граф-произведение групп.*

Теорема (...)

Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *— граф-произведение групп.*

1. $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.

Теорема (...)

Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *— граф-произведение групп.*

1. $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *флаговый. В этом случае* $B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}) = (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.

Теорема (...)

Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *— граф-произведение групп.*

1. $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *флаговый. В этом случае* $B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}) = (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.
3. $\pi_i((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.

Теорема (...)

Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ — *граф-произведение групп.*

1. $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *флаговый. В этом случае* $B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}) = (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.
3. $\pi_i((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ *изоморфна ядру канонической сюръекции* $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k$.

Теорема (...)

Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *— граф-произведение групп.*

1. $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *флаговый. В этом случае* $B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}) = (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.
3. $\pi_i((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ *изоморфна ядру канонической сюръекции* $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k$.

Доказательство

(1) Индукция: добавляем симплексы по одному и применяем теорему ван Кампена. База индукции: $\mathcal{K} = m$ точек. В этом случае $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ есть букет $BG_1 \vee \cdots \vee BG_m$, а $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ есть свободное произведение $G_1 \star \cdots \star G_m$.

Доказательство

(2) Предположим, что $\mathcal{K}$ не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geqslant 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \subset J\}$.

Доказательство

(2) Предположим, что $\mathcal{K}$ не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geqslant 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \subset J\}$.

Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j, j \in J\}$ и является ретрактом пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.

Доказательство

(2) Предположим, что $\mathcal{K}$ не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geqslant 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \subset J\}$.

Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j, j \in J\}$ и является ретрактом пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.

Гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J} \to \prod_{j \in J} BG_j$ есть $\Sigma^{k-1} G_{j_1} \wedge \cdots \wedge G_{j_k}$ — букет $(k-1)$-мерных сфер.

Доказательство

(2) Предположим, что $\mathcal{K}$ не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geqslant 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \subset J\}$.

Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j, j \in J\}$ и является ретрактом пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.

Гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J} \to \prod_{j \in J} BG_j$ есть $\Sigma^{k-1} G_{j_1} \wedge \cdots \wedge G_{j_k}$ — букет $(k-1)$-мерных сфер.
Поэтому $\pi_{k-1}((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}) \neq 0$, где $k \geqslant 3$.
Итак, $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$, а значит и $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$, не асферично.

Доказательство

(2) Предположим, что $\mathcal{K}$ не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geqslant 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \subset J\}$.

Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j, j \in J\}$ и является ретрактом пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$.

Гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J} \to \prod_{j\in J} BG_j$ есть $\Sigma^{k-1} G_{j_1} \wedge \cdots \wedge G_{j_k}$ — букет $(k-1)$-мерных сфер.
Поэтому $\pi_{k-1}((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}) \neq 0$, где $k \geqslant 3$.
Итак, $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_J}$, а значит и $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$, не асферично.

Оставшиеся утверждения (асферичность $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ и утверждения (3) и (4)) вытекают из гомотопической последовательности расслоения $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} BG_k$.

В частных случаях $G_k = \mathbb{Z}$ и $G_k = \mathbb{Z}_2$ получаем

В частных случаях $G_k = \mathbb{Z}$ и $G_k = \mathbb{Z}_2$ получаем

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Артина.

1. $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(S^1)^{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}}$ *асферичны* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ *флаговый.*
3. $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RA'_{\mathcal{K}}$.

В частных случаях $G_k = \mathbb{Z}$ и $G_k = \mathbb{Z}_2$ получаем

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Артина.

1. $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$.
2. *Пространства* $(S^1)^{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}}$ *асферичны* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ *флаговый.*
3. $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RA'_{\mathcal{K}}$.

Следствие

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Коксетера.

1. $\pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong RC_{\mathcal{K}}$.
2. $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ *асферичны* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ *флаговый.*
3. $\pi_i((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RC'_{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл (граница m-угольника).
Простое рассуждение с эйлеровой характеристикой показывает, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфен ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$.

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл (граница m-угольника).
Простое рассуждение с эйлеровой характеристикой показывает, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфен ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$.
(Это наблюдение восходит к работе Коксетера 1938 г.)
Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$ есть группа поверхности.

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл (граница m-угольника).
Простое рассуждение с эйлеровой характеристикой показывает, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфен ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$.
(Это наблюдение восходит к работе Коксетера 1938 г.)
Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$ есть группа поверхности.

Аналогично, если $|\mathcal{K}| \cong S^2$ (т. е. $\mathcal{K}$ есть граница симплициального 3-мерного многогранника), то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 3-мерное многообразие.
Следовательно, коммутант соответствующей группы $RC_{\mathcal{K}}$ есть фундаментальная группа 3-многообразия.

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\operatorname{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}).$$

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\operatorname{Ker}\Bigl(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i\Bigr) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (или если все группы G_i абелевы) группа выше есть коммутант $(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})'$.

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\operatorname{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (или если все группы G_i абелевы) группа выше есть коммутант $(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})'$.

Мы изучим группу $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$, определим, для каких $\mathcal{K}$ эта группа свободна, и опишем набор образующих в общем случае.

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\operatorname{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (или если все группы G_i абелевы) группа выше есть коммутант $(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})'$.

Мы изучим группу $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$, определим, для каких $\mathcal{K}$ эта группа свободна, и опишем набор образующих в общем случае.

Граф Γ называется хордовым (триангулированным), если любой его цикл с $\geqslant 4$ вершинами содержит хорду.

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\mathrm{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (или если все группы G_i абелевы) группа выше есть коммутант $(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})'$.

Мы изучим группу $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$, определим, для каких $\mathcal{K}$ эта группа свободна, и опишем набор образующих в общем случае.

Граф Γ называется хордовым (триангулированным), если любой его цикл с $\geqslant 4$ вершинами содержит хорду.

Согласно классической теореме Фалькерсона–Гросса (Fulkerson–Gross), граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно занумеровать так, что для любой вершины её меньшие соседи образуют полный подграф. (Порядок полного исключения.)

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ — *свободная группа;*

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ — *свободная группа;*
2. $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ — *свободная группа;*
2. $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*
3. $\mathcal{K}^1$ — *хордовый граф.*

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ — *свободная группа;*
2. $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*
3. $\mathcal{K}^1$ — *хордовый граф.*

Идея доказательства

(2)⇒(1) Так как $\operatorname{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$.

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ — *свободная группа;*
2. $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*
3. $\mathcal{K}^1$ — *хордовый граф.*

Идея доказательства

(2)⇒(1) Так как $\mathrm{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$.

(3)⇒(2) Индукция с использованием порядка полного исключения.

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

1. $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ *— свободная группа;*
2. $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*
3. $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф.*

Идея доказательства

(2)⇒(1) Так как $\operatorname{Ker}\Big(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k\Big) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$.

(3)⇒(2) Индукция с использованием порядка полного исключения.

(1)⇒(3) Пусть $\mathcal{K}^1$ не хордовый. Бесхордовый цикл длины $\geqslant 4$ даёт подгруппу в $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$, изоморфную группе поверхности. Следовательно, $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ не является свободной группой.

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ *и* $RC_{\mathcal{K}}$ *— прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие симплициальному комплексу* $\mathcal{K}$.

а) *Коммутант* $RA'_{\mathcal{K}}$ *является свободной группой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф.*

б) *Коммутант* $RC'_{\mathcal{K}}$ *является свободной группой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф.*

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ *и* $RC_{\mathcal{K}}$ *— прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие симплициальному комплексу* $\mathcal{K}$.

а) *Коммутант* $RA'_{\mathcal{K}}$ *является свободной группой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф.*

б) *Коммутант* $RC'_{\mathcal{K}}$ *является свободной группой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф.*

Утверждение а) доказано в работе Servatius, Droms, Servatius.

Следствие

Пусть $RA_\mathcal{K}$ и $RC_\mathcal{K}$ — прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие симплициальному комплексу $\mathcal{K}$.

а) *Коммутант $RA'_\mathcal{K}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф.*

б) *Коммутант $RC'_\mathcal{K}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф.*

Утверждение а) доказано в работе Servatius, Droms, Servatius.

Разница между а) и б) состоит в том, что коммутант $RA'_\mathcal{K}$ бесконечно порождён, за исключением случая $RA_\mathcal{K} = \mathbb{Z}^m$, в то время как коммутант $RC'_\mathcal{K}$ конечно порождён. Минимальный набор образующих даётся следующим результатом.

Групповой коммутатор $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$.

Групповой коммутатор $(g,h)=g^{-1}h^{-1}gh$.

Теорема (Верёвкин–П.)

Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет минимальный набор порождающих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \ldots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\cdots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\cdots)),$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_{\ell-2}<j>i$, $k_s\ne i$ для любого s, и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$, не содержащей j.

Групповой коммутатор $(g,h)=g^{-1}h^{-1}gh$.

Теорема (Верёвкин–П.)

Коммутант $RC'_{\mathcal K}$ имеет минимальный набор порождающих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde H_0(\mathcal K_J)$ вложенных коммутаторов вида

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \ldots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\cdots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\cdots)),$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_{\ell-2}<j>i$, $k_s\ne i$ для любого s, и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal K_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$, не содержащей j.

Идея доказательства

Сначала рассмотрим случай $\mathcal K = m$ точек. Тогда $\mathcal R_{\mathcal K}$ есть 1-остов m-куба, а $RC'_{\mathcal K}=\pi_1(\mathcal R_{\mathcal K})$ — свободная группа ранга $\sum_{\ell=2}^m(\ell-1)\binom{m}{\ell}$. Это совпадает с числом вложенных коммутаторов в списке.

Групповой коммутатор $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$.

Теорема (Верёвкин–П.)

Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет минимальный набор порождающих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида

$$(g_j, g_i), \quad (g_{k_1}, (g_j, g_i)), \quad \ldots, \quad (g_{k_1}, (g_{k_2}, \cdots (g_{k_{m-2}}, (g_j, g_i)) \cdots)),$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_{\ell-2} < j > i$, $k_s \neq i$ для любого s, и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$, не содержащей j.

Идея доказательства

Сначала рассмотрим случай $\mathcal{K} = m$ точек. Тогда $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-остов m-куба, а $RC'_{\mathcal{K}} = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ — свободная группа ранга $\sum_{\ell=2}^{m}(\ell-1)\binom{m}{\ell}$. Это совпадает с числом вложенных коммутаторов в списке.

Затем исключаем лишние коммутаторы, используя коммутационные соотношения $(g_i, g_j) = 1$ для $\{i,j\} \in \mathcal{K}$.

Идея доказательства

Чтобы показать, что данный набор образующих минимален, используем следующее рассуждение.
Имеем $H_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = RC'_\mathcal{K}/RC''_\mathcal{K}$. С другой стороны,

$$H_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \cong \sum_{J\subset[m]} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J).$$

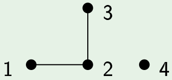
Идея доказательства

Чтобы показать, что данный набор образующих минимален, используем следующее рассуждение.
Имеем $H_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = RC'_\mathcal{K}/RC''_\mathcal{K}$. С другой стороны,

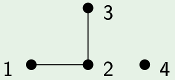
$$H_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \cong \sum_{J\subset[m]} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J).$$

Поэтому число образующих абелевой группы $H_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \cong RC'_\mathcal{K}/RC''_\mathcal{K}$ есть $\sum_{J\subset[m]} \mathrm{rank}\, \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$, что совпадает с числом вложенных коммутаторов в наборе образующих для $RC'_\mathcal{K}$, описанном выше.

Пример

Пусть $\mathcal{K} =$ 

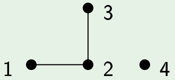
Пример

Пусть $\mathcal{K} =$ 

Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ есть свободная группа с базисом

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_1),\ (g_4, g_2),\ (g_4, g_3),$$
$$(g_2, (g_4, g_1)),\ (g_3, (g_4, g_1)),\ (g_1, (g_4, g_3)),\ (g_3, (g_4, g_2)),$$
$$(g_2, (g_3, (g_4, g_1))).$$

Пример

Пусть $\mathcal{K} =$ 

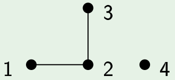
Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ есть свободная группа с базисом

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_1),\ (g_4, g_2),\ (g_4, g_3),$$
$$(g_2, (g_4, g_1)),\ (g_3, (g_4, g_1)),\ (g_1, (g_4, g_3)),\ (g_3, (g_4, g_2)),$$
$$(g_2, (g_3, (g_4, g_1))).$$

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл с $m \geqslant 4$ вершинами.
Граф $\mathcal{K}^1$ не является хордовым, так что группа $RC'_{\mathcal{K}}$ не свободна.

Пример

Пусть $\mathcal{K} =$ 

Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ есть свободная группа с базисом

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_1),\ (g_4, g_2),\ (g_4, g_3),$$
$$(g_2, (g_4, g_1)),\ (g_3, (g_4, g_1)),\ (g_1, (g_4, g_3)),\ (g_3, (g_4, g_2)),$$
$$(g_2, (g_3, (g_4, g_1))).$$

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл с $m \geqslant 4$ вершинами.
Граф $\mathcal{K}^1$ не является хордовым, так что группа $RC'_{\mathcal{K}}$ не свободна.

В самом деле, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть ориентируемая поверхность рода $(m-4)2^{m-3}+1$, и $RC'_{\mathcal{K}} \cong \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ есть группа с одним соотношением.

Аналогичный результат [Grbic–P.–Theriault–Wu] описывает подалгебру-коммутант градуированной граф-алгебры Ли

$$L_{\mathcal{K}} = FL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle \big/ \big([u_i, u_i] = 0,\ [u_i, u_j] = 0 \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big),$$

где $FL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$ есть свободная градуированная алгебра Ли с образующими u_i степени один, а $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$ — градуированная скобка Ли.

Подалгебра-коммутант есть ядро гомоморфизма алгебр Ли $L_{\mathcal{K}} \to CL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$ на коммутативную (тривиальную) алгебру Ли.

Аналогичный результат [Grbic–P.–Theriault–Wu] описывает подалгебру-коммутант градуированной граф-алгебры Ли

$$L_{\mathcal{K}} = FL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle \big/ \big([u_i, u_i] = 0,\ [u_i, u_j] = 0 \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big),$$

где $FL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$ есть свободная градуированная алгебра Ли с образующими u_i степени один, а $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$ — градуированная скобка Ли.

Подалгебра-коммутант есть ядро гомоморфизма алгебр Ли $L_{\mathcal{K}} \to CL\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$ на коммутативную (тривиальную) алгебру Ли.

Граф-алгебра Ли $L_{\mathcal{K}}$ является граф-произведением аналогично прямогольной группе Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$.

Имеется аналогичное разложение в прямой предел (копредел), где группы $G_i = \mathbb{Z}_2$ заменяются на тривиальные алгебры Ли $CL\langle u\rangle = FL\langle u\rangle/([u, u] = 0)$, и копредел берётся в категории градуированных алгебр Ли.

4. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия

Пусть P — многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$ с прямыми углами между смежными гипергранями (прямоугольный n-многогранник).

4. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия

Пусть P — многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$ с прямыми углами между смежными гипергранями (прямоугольный n-многогранник).

RC_P — группа, порождённая отражениями в гипергранях P.
Это — прямоугольная группа Коксетера, задаваемая как

$$RC_P = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i \cap F_j \neq \varnothing \rangle,$$

где g_i — отражение относительно гиперграни F_i.

4. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия

Пусть P — многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$ с прямыми углами между смежными гипергранями (прямоугольный n-многогранник).

RC_P — группа, порождённая отражениями в гипергранях P.
Это — прямоугольная группа Коксетера, задаваемая как

$$RC_P = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i \cap F_j \neq \varnothing \rangle,$$

где g_i — отражение относительно гиперграни F_i.

Группа RC_P действует на $\mathbb{L}^n$ дискретно с конечными стабилизаторами и фундаментальной областью P.

Лемма (А. Ю. Веснин, 1987)

Рассмотрим эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, $k \geqslant n$. *Подгруппа* $\operatorname{Ker}\varphi \subset RC_P$ *не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых* n *гипергранях с общей вершиной линейно независимы в* $\mathbb{Z}_2^k$.

Лемма (А. Ю. Веснин, 1987)

Рассмотрим эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, $k \geqslant n$. *Подгруппа* $\operatorname{Ker}\varphi \subset RC_P$ *не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых* n *гипергранях с общей вершиной линейно независимы в* $\mathbb{Z}_2^k$.
В этом случае группа $\operatorname{Ker}\varphi$ *действует на* $\mathbb{L}^n$ *свободно.*

Лемма (А. Ю. Веснин, 1987)

Рассмотрим эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, $k \geqslant n$. *Подгруппа* $\operatorname{Ker}\varphi \subset RC_P$ *не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых* n *гипергранях с общей вершиной линейно независимы в* $\mathbb{Z}_2^k$.
В этом случае группа $\operatorname{Ker}\varphi$ *действует на* $\mathbb{L}^n$ *свободно.*

$N = \mathbb{L}^n / \operatorname{Ker}\varphi$ есть гиперболическое n-многообразие. Оно составлено из $|\mathbb{Z}_2^k| = 2^k$ экземпляров P и имеет риманову метрику постоянной отрицательной кривизны. Кроме того, многообразие N асферично (является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\operatorname{Ker}\varphi, 1)$), так как его универсальное накрытие $\mathbb{L}^n$ стягиваемо.

Какие комбинаторные n-многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в $\mathbb{L}^n$? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Какие комбинаторные n-многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в $\mathbb{L}^n$? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Theorem (Погорелов, Андреев)

Комбинаторный 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ допускает прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой и не имеет 3- и 4-поясов из граней. Кроме того, такая реализация единственна с точностью до изометрии.

Какие комбинаторные n-многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в $\mathbb{L}^n$? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Theorem (Погорелов, Андреев)

Комбинаторный 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ допускает прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой и не имеет 3- и 4-поясов из граней. Кроме того, такая реализация единственна с точностью до изометрии.

Мы называем такие 3-многогранники многогранниками Погорелова. Многогранник Погорелова не имеет 3- и 4-угольных граней. Класс многогранников Погорелова содержит все фуллерены (простые 3-многогранники, имеющие лишь 5- и 6-угольные грани).

Какие комбинаторные n-многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в $\mathbb{L}^n$? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Theorem (Погорелов, Андреев)

Комбинаторный 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ допускает прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой и не имеет 3- и 4-поясов из граней. Кроме того, такая реализация единственна с точностью до изометрии.

Мы называем такие 3-многогранники многогранниками Погорелова. Многогранник Погорелова не имеет 3- и 4-угольных граней. Класс многогранников Погорелова содержит все фуллерены (простые 3-многогранники, имеющие лишь 5- и 6-угольные грани).

Аналогичный критерий для прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^4$ неизвестен. При $n \geqslant 5$ прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^n$ не существует [Никулин, Винберг].

Пусть дан прямоугольный многогранник P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Пусть дан прямоугольный многогранник P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Можно рассмотреть абеленизацию: $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\operatorname{Ker}\mathrm{ab} = RC_P'$ — коммутант.

Пусть дан прямоугольный многогранник P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Можно рассмотреть абеленизацию: $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\operatorname{Ker}\mathrm{ab} = RC'_P$ — коммутант. Соответствующее n-многообразие $\mathbb{L}^n/RC'_P$ есть в точности вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$, описанное выше как полиэдральное произведение.

Пусть дан прямоугольный многогранник P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Можно рассмотреть абеленизацию: $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\operatorname{Ker}\mathrm{ab} = RC'_P$ — коммутант. Соответствующее n-многообразие $\mathbb{L}^n/RC'_P$ есть в точности вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$, описанное выше как полиэдральное произведение.

Следствие

Есть P — прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^n$, то вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$ имеет гиперболическую структуру как $\mathbb{L}^n/RC'_P$, где RC'_P — коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера.

Пусть дан прямоугольный многогранник P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Можно рассмотреть абеленизацию: $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\operatorname{Ker}\mathrm{ab} = RC'_P$ — коммутант. Соответствующее n-многообразие $\mathbb{L}^n/RC'_P$ есть в точности вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$, описанное выше как полиэдральное произведение.

Следствие

Есть P — прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^n$, то вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$ имеет гиперболическую структуру как $\mathbb{L}^n/RC'_P$, где RC'_P — коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера.
Многообразие $\mathcal{R}_P$ составлено из 2^m экземпляров P.

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$. Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$. Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно тогда и только тогда, когда Λ-образы любых n гиперграней, имеющих общую вершину, образуют базис в $\mathbb{Z}_2^n$.
Такое Λ называется $\mathbb{Z}_2$-характеристической функцией.

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$. Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно тогда и только тогда, когда Λ-образы любых n гиперграней, имеющих общую вершину, образуют базис в $\mathbb{Z}_2^n$.
Такое Λ называется $\mathbb{Z}_2$-характеристической функцией.

Предложение

Любой 3-многогранник допускает характеристическую функцию.

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$. Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно тогда и только тогда, когда Λ-образы любых n гиперграней, имеющих общую вершину, образуют базис в $\mathbb{Z}_2^n$.
Такое Λ называется $\mathbb{Z}_2$-характеристической функцией.

Предложение

Любой 3-многогранник допускает характеристическую функцию.

Доказательство.

Рассмотрим правильную раскраску граней P в 4 цвета и сопоставим граням соответствующих цветов векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.
Полученное отображение $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ удовлетворяет условию, так как любые три из четырёх векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ образуют базис в $\mathbb{Z}^3$. $\square$

Многообразия $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^3 / \operatorname{Ker}\varphi$, задаваемые многогранниками $P \in \mathcal{P}$ и характеристическими функциями $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ называются гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбеля (А. Ю. Веснин, 1987). Каждое $N(P, \Lambda)$ составлено из $|\mathbb{Z}_2^3| = 8$ экземпляров P.

Многообразия $N(P,\Lambda) = \mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi$, задаваемые многогранниками $P \in \mathcal{P}$ и характеристическими функциями $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ называются гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбеля (А. Ю. Веснин, 1987). Каждое $N(P,\Lambda)$ составлено из $|\mathbb{Z}_2^3| = 8$ экземпляров P.

В частности, каждая правильная 4-раскраска прямоугольного 3-многогранника P даёт гиперболическое 3-многообразие. Лёбель (1931) первым построил гиперболическое 3-многообразие, происходящее из (единственной) 4-раскраски додекаэдра.

Многообразия $N(P,\Lambda)=\mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi$, задаваемые многогранниками $P\in\mathcal{P}$ и характеристическими функциями $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m\to\mathbb{Z}_2^3$ называются гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбеля (А. Ю. Веснин, 1987). Каждое $N(P,\Lambda)$ составлено из $|\mathbb{Z}_2^3|=8$ экземпляров P.

В частности, каждая правильная 4-раскраска прямоугольного 3-многогранника P даёт гиперболическое 3-многообразие. Лёбель (1931) первым построил гиперболическое 3-многообразие, происходящее из (единственной) 4-раскраски додекаэдра.

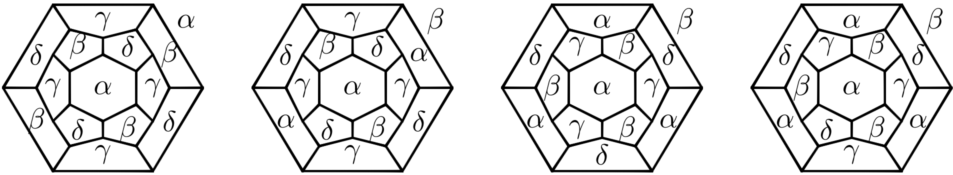


Рис.: Четыре 4-раскраски фуллерена-бочки с 14 гранями.

Пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda, \Lambda' \colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda, \Lambda' \colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

Пары (P,Λ) и (P',Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda,\Lambda'\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P,\Lambda)$ и $N' = N(P',\Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

a) $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

Пары (P,Λ) и (P',Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda,\Lambda'\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P,\Lambda)$ и $N' = N(P',\Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

б) $N \cong N'$ *(диффеоморфизм);*

Пары (P,Λ) и (P',Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda,\Lambda'\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P,\Lambda)$ и $N' = N(P',\Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

б) $N \cong N'$ *(диффеоморфизм);*

в) $(P,\Lambda) \sim (P',\Lambda')$ *(эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар).*

Пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda, \Lambda' \colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi \colon H^*(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N'; \mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

б) $N \cong N'$ *(диффеоморфизм);*

в) $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$ *(эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар).*

В частности, гиперболические 3-многообразия, соответствующие неэквивалентным 4-раскраскам P, не диффеоморфны.

Пары (P,Λ) и (P',Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda,\Lambda'\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P,\Lambda)$ и $N' = N(P',\Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

б) $N \cong N'$ *(диффеоморфизм);*

в) $(P,\Lambda) \sim (P',\Lambda')$ *(эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар).*

В частности, гиперболические 3-многообразия, соответствующие неэквивалентным 4-раскраскам P, не диффеоморфны.

Нетривиальна импликация а)⇒в). Её доказательство использует технику торической топологии.

Литература

- Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- J. Grbic, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.
- Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера.* Мат. сборник **207** (2016), вып. 11, стр. 105–126.
- В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак. Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками. Успехи мат. наук 72 (2017), вып. 2, стр. 3–66.
- Taras Panov and Yakov Veryovkin. *On the commutator subgroup of a right-angled Artin group.* J. Algebra 521 (2019), 284–298.