Компакты, для которых $C_p(C_p(X))$ линделефово

Е.А.Резниченко

Томск

Содержание

Когда $C_p(X)$ линделефово для компакта X?

Theorem 1.1.

Если X компакт Корсона, то $C_p(X)$ линделефово.

Theorem 1.2.

Если X компакт и $X \subset C_p(Y)$, где Y линделефово P, то $C_p(X)$ линделефово и X ω-монолитно.

Theorem 1.3 (М.Асанов,1979).

Если $C_p(X)$ линделефово, то X^n счетной тесноты для всех n.

Theorem 1.4 (Зенор-Величко,1980).

Если X наследственно сепарабельно в конечных степенях, то $C_p(X)$ наследственно линделефово.

Theorem 1.5 (R.Pol.,1977) (Г.Соколов,1993).

Если X разреженный компакт с пустой ω_1 производной. Тогда $C_p(X)$ линделефово если и только если X ω-монолитно.

Theorem 1.6 (P.,1989).

$(MA + \neg CH)$ *Если X компакт и $C_p(X)$ линделефово, то X ω-монолитно.*

Когда итерированные $C_{p,n}(X)$ линделефово для компакта X?

Theorem 2.1 (С.Гулько,1978).

Если X компакт Эберлейна, то $C_{p,n}(X)$ линделефово для всех n.

Theorem 2.2 (С.Гулько,1978).

Если X компакт Корсона, то $C_{p,2n+1}(X)$ линделефово и $C_{p,2n}(X)$ нормально для всех n.

Theorem 2.3 (Г.Соколов.,1985).

Если X компакт Корсона, то $C_{p,n}(X)$ линделефово для всех n.

Пространства Соколова

Пространство X называется пространством *Соколова*, если для любой последовательности $(F_n)_n$, где F_n замкнуто в X^n, существует непрерывное $r : X \to X$, так что
(1) $nw(X) \leq \omega$;
(2) $r^n(F_n) \subset F_n$.

Theorem 3.1 (Г.Соколов.,1985,1993).

Если X пространство Соколова, то $C_p(X)$ пространство Соколова.

Theorem 3.2 (Г.Соколов.,1985,1993).

Если X компакт Корсона, то X пространство Соколова.

Theorem 3.3 (Г.Соколов.,1985,1993).

Если X компакт Соколова, то $C_{p,n}(X)$ линделефово для всех n.

Theorem 3.4 (В.Ткачук.,2005).

Если X пространство Соколова и конечные степени X линделефововы со счетной теснотой, то $C_{p,n}(X)$ линделефово для всех n.

Компакты Поля-Соколова

Пусть $S \subset \omega_1$ предельные ординалы и $I \subset \omega_1$ не предельные ординалы — $\omega_1 = S \cup I$.
Зафиксируем $\xi_\alpha = (x_{\alpha,n})_n \subset I$ монотонная последовательность, сходящаяся к $\alpha \in S$.
Для $A \subset S$, X_A есть $\omega_1 + 1$ с компактной топологией, в которой ξ_α сходится к $\alpha \in A$, $\{\alpha\} \cap \xi_\alpha$ открыто замкнуто, точки из $\omega_1 \setminus A$ изолированны.

Theorem 4.1 (M.Wage,1976).

X_S не компакт Эберлейна.

Theorem 4.2 (R.Pol,1979).

$C_p(X_S)$ линделефово.

Theorem 4.3 (Г.Соколов.,1993).

Пусть $A \subset S$.

1. $C_p(X_A)$ *линделефово.*
2. X_A *компакт Корсона если и только если* A *не стационарно.*
3. X_A *компакт Соколова если и только если* $\omega_1 \setminus A$ *стационарно.*
4. X_A *компакт Соколова не Корсона если и только если* A *и* $\omega_1 \setminus A$ *стационарны.*

Problem 4.4 (Г.Соколов.,1993).

Пусть X *компакт и* $C_p(X)$ *линделефово. Верно ли, что* $C_{p,2}(X) = C_p(C_p(X))$ $(C_{p,n}(X))$ *линделефово?*

1. *Если дополнительно* X *разреженный* ω*-монолитный компакт?*
2. *Компакт вида* X_A (A *стационарны и* $\omega_1 \setminus A$ *не стационарно, например* $A = S$)?

Problem 5.1А.Архангельский,1990.

Пусть X компакт и $C_{p,2}(X)$ линделефово. Верно ли, что $C_p(X)$ линделефово?

$(*)$ Любое счетное дискретное замкнутое подмножество $C_p(X)$ C-вложено в $C_p(X)$.

Theorem 5.2.

Пусть X компакт и $C_{p,2}(X)$ линделефово. Если выполняется $(*)$, то $C_p(X)$ линделефово.

Компакт X π-монолитен, то если для любой последовательности $(U_n)_n$ непустых открытых множеств существует метризуемый компакт $K \subset X$, для которого $U_n \cap K \neq \varnothing$ для всех n.

1. ω-монолитные компакты π-монолитны.
2. Произведение π-монолитных компактов π-монолитно.
3. Непрерывный образ π-монолитного компакта π-монолитен.
4. Диадические компакты π-монолитны.

Theorem 5.3.

Для π-монолитных компактов выполняется $(*)$.

Theorem 5.4.

Пусть X π*-монолитный компакт и* $C_{p,2}(X)$ *линделефово. Тогда* $C_p(X)$ *линделефово.*

Предложение 1.

Пусть X *компакт и* $C_{p,2}(X)$ *линделефово. Если* Y *замкнуто в* X*, то* $C_{p,2}(Y)$ *линделефово.*

Предложение 2.

Пусть X *компакт и* $C_{p,2}(X)$ *линделефово. Следующие условия эквивалентны.*

1. $C_p(X)$ *линделефово;*
2. $C_p(Y)$ *линделефово для любого сепарабельного компакта* $Y \subset X$*.*

Problem 5.5.

Пусть X сепарабельный компакт и $C_{p,2}(X)$ линделефово. Верно ли, что $C_p(X)$ линделефово?

Этот вопрос эквивалентен проблеме Архангельского.

Предложение 3.

Если X компакт Мрувки-Избела, то для X не выполняется $(*)$.

Спасибо