

Моделирование волновых движений реологически сложных сред с применением высокопроизводительных вычислений

В. М. Садовский, О. В. Садовская



*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
Отдел вычислительной механики деформируемых сред*

sadov@icm.krasn.ru, o_sadov@icm.krasn.ru

конференция
Декабрьские чтения
в Томске
11-16 декабря 2018

XXIX Всемирная зимняя универсиада в Красноярске Государственный заповедник "Столбы"



Скала Дед



Первый столб



Скала Перья

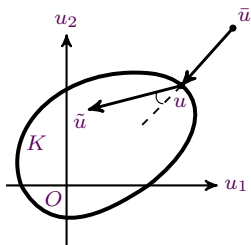
- 1 Вариационные неравенства
- 2 Вычислительный алгоритм
- 3 Комплексы параллельных программ
- 4 Обобщенный реологический метод
- 5 Математические модели сыпучих и пористых сред
- 6 Блочные среды с податливыми прослойками
- 7 Результаты расчетов



Вариационные неравенства

Минимизация выпуклой функции на выпуклом замкнутом множестве:

$$f(u) = \min_{\tilde{u} \in K} f(\tilde{u}) \iff (\tilde{u} - u) \cdot \nabla f(u) \geq 0 \quad \forall \tilde{u} \in K$$



Проекция $u = \pi(\tilde{u})$ на выпуклое замкнутое множество:

$$f(u) = \|u - \tilde{u}\|^2, \quad \nabla f(u) = 2(u - \tilde{u})$$

$$u \in K : \quad (\tilde{u} - u) \cdot (u - \tilde{u}) \geq 0 \quad \forall \tilde{u} \in K$$

Вариационное неравенство для монотонного оператора $Q(u) \neq \nabla f(u)$:

$$(\tilde{u} - u) \cdot Q(u) \geq 0, \quad u, \tilde{u} \in K$$



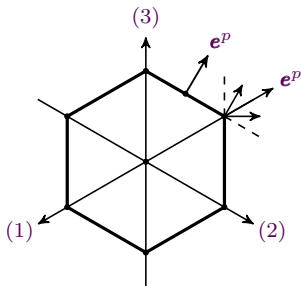
Принцип максимума Мизеса

Мощность пластической диссипации максимальна на действительных напряжениях:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^P \geq \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{e}^P, \quad \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in F$$

Применение теоремы Куна–Таккера

$$F = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid f_j(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, k) \right\}, \quad L(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^P + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\boldsymbol{\sigma})$$



Ассоциированный закон пластического течения:

$$\mathbf{e}^P = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j f_j(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

Теория уругопластического течения Прандтля–Рейсса:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho g,$$

$$\mathbf{e}^P = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^*) - \mathbf{a} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{e}^P \geq 0$$



Континуум Коссера

Полная система уравнений содержит уравнения поступательного и вращательного движения, кинематические и определяющие уравнения:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho g, \quad j \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{m} - 2 \boldsymbol{\sigma}^a + j q$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial t} = \nabla v + \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \nabla \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\Lambda}^s) \boldsymbol{\delta} + 2 \mu \boldsymbol{\Lambda}^s + 2 \alpha \boldsymbol{\Lambda}^a$$

$$\mathbf{m} = \beta (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{M}^s) \boldsymbol{\delta} + 2 \gamma \mathbf{M}^s + 2 \eta \mathbf{M}^a$$

Условия гиперболичности:

$$3 \lambda + 2 \mu > 0, \quad \mu, \alpha > 0; \quad 3 \beta + 2 \gamma > 0, \quad \gamma, \eta > 0$$

Скорости упругих волн:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2 \mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\beta + 2 \gamma}{j}}, \quad c_\omega = \sqrt{\frac{\gamma + \eta}{j}}$$

- v – вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, j – момент инерции частиц
- $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{m} – тензор моментных напряжений
- $\boldsymbol{\Lambda}$ и \mathbf{M} – тензоры деформации и кривизны, g и q – векторы массовых сил и моментов
- $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta$ – феноменологические параметры материала

Матричная форма уравнений

Термодинамически согласованные уравнения теории упругости:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i} + QU + G \quad (1)$$

При учете пластической деформации система (1) заменяется вариационным неравенством:

$$(\tilde{U} - U) \cdot \left(A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i} - QU - G \right) \geq 0, \quad \tilde{U}, U \in F \quad (2)$$

- F – выпуклое и замкнутое множество, определяемое критерием пластичности
- $U(t, x)$ – m -мерная искомая вектор-функция, \tilde{U} – варьируемый вектор
- A – симметричная положительно определенная матрица коэффициентов при производных по времени, B^i – симметричные матрицы коэффициентов при производных по пространственным переменным, Q – антисимметричная матрица, G – вектор объемных сил и преднапряжений
- n – пространственная размерность задачи (1, 2 или 3)
- размерность m системы (1) и конкретный вид матриц-коэффициентов определяется используемой математической моделью



Обобщенные решения

Вариационное неравенство для нелинейного гиперболического оператора:

$$(\tilde{U} - U) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} - G \right) \geq 0, \quad \tilde{U}, U \in F \quad (3)$$

$$\varphi(U) = \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i(U)}{\partial U}$$

Физматлит, 1997



Дивергентная форма вариационного неравенства:

$$\begin{aligned} \tilde{U} \cdot \left(\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} - G \right) \geq \frac{\partial}{\partial t} \left(U \cdot \varphi(U) - \Phi(U) \right) - \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U \cdot \psi_i(U) - \Psi_i(U) \right) - U \cdot G, \quad \tilde{U}, U \in F \end{aligned} \quad (4)$$

- Соотношения сильного разрыва
- Единственность решения задачи Коши
- Непрерывная зависимость от начальных данных
- Корректность постановки диссипативных граничных условий



Структура численных алгоритмов

- Явный по времени алгоритм численной реализации вариационного неравенства общего вида строится с помощью метода расщепления по физическим процессам:
 - сначала на каждом временном слое решается упругая задача
 - затем полученное решение корректируется для учета пластических свойств материала
- Для решения упругой задачи применяется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным
- На этапах расщепления в качестве разностной схемы для одномерных гиперболических систем уравнений вида

$$A \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} = B^i \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_i} + G^i \quad (5)$$

k – номер этапа расщепления, i – направление расщепления

используется монотонная конечно-разностная ENO-схема типа “предиктор–корректор” с кусочно-линейными распределениями скоростей и напряжений по ячейкам

- Для учета необратимых пластических деформаций в расчетах используются специальные алгоритмы корректировки напряжений

Двумерное расщепление для решения упругой задачи

Метод расщепления приводит к серии из 7 одномерных задач, три из которых решаются на временном интервале $[t_n, t_n + \tau/2]$, а три последних – на интервале $[t_n + \tau/2, t_n + \tau]$:

$$\begin{aligned}
 A \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1} + G^1, & U^{(1)}(t_n) &= U(t_n) \\
 A \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x_2} + G^2, & U^{(2)}(t_n) &= U^{(1)}(t_n + \tau/2) \\
 A \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} &= B^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x_3} + G^3, & U^{(3)}(t_n) &= U^{(2)}(t_n + \tau/2) \\
 A \frac{\partial U^{(4)}}{\partial t} &= Q U^{(4)}, & U^{(4)}(t_n) &= U^{(3)}(t_n + \tau/2) \\
 A \frac{\partial U^{(5)}}{\partial t} &= B^3 \frac{\partial U^{(5)}}{\partial x_3} + G^3, & U^{(5)}(t_n + \tau/2) &= U^{(4)}(t_n + \tau/2) \\
 A \frac{\partial U^{(6)}}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial U^{(6)}}{\partial x_2} + G^2, & U^{(6)}(t_n + \tau/2) &= U^{(5)}(t_n + \tau) \\
 A \frac{\partial U^{(7)}}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial U^{(7)}}{\partial x_1} + G^1, & U^{(7)}(t_n + \tau/2) &= U^{(6)}(t_n + \tau)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Вектор-функция $U^{(7)}(t_n + \tau)$ представляет собой искомое решение на временном слое $t_n + \tau$.



Структура параллельной программы

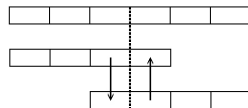
Численные алгоритмы реализованы в виде комплексов параллельных прикладных программ для решения задач динамики структурно неоднородных деформируемых сред (сыпучих и пористых материалов, континуума Коссера и многоблочной среды) на многопроцессорных вычислительных системах с использованием библиотеки MPI по технологии SPMD на языке Fortran.

1 Программа–препроцессор

- построение сеток
- равномерное распределение начальных данных между узлами кластера
- упаковка каждым узлом кластера своей части данных в двоичные файлы

2 Основная программа

- пошаговый по времени численный счет задачи на каждом узле кластера
- обмен данными между процессорами
- сохранение результатов счета в контрольных точках



*Схема обмена
с законтурными ячейками*

3 Программа–постпроцессор

- прореживание файлов, содержащих результаты счета в контрольных точках
- графическая обработка результатов

Верификация программных комплексов выполнена на точных решениях – формулах геометрической сейсмологии для годографов отраженных и преломленных волн.



Авторское программное обеспечение

Комплексы параллельных программ для решения 2-мерных и 3-мерных упругопластических задач динамики сыпучих сред



Программы:
2Dyn_Granular, 3Dyn_Granular

Свидетельства о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2012613989 и № 2012613990 от 28.04.2012 (Роспатент)

Комплексы параллельных программ для расчета 2-мерных и 3-мерных динамических задач моментной теории упругости



Программы:
2Dyn_Cosserat, 3Dyn_Cosserat

Свидетельства о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2012614823 и № 2012614824 от 30.05.2012 (Роспатент)

Программный комплекс для численного моделирования динамических процессов в многоблочных средах на кластерных системах



Программа
2Dyn_Blocks_MPI

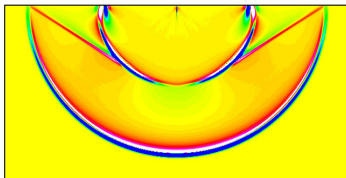
Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016615178 от 17.05.2016 (Роспатент)



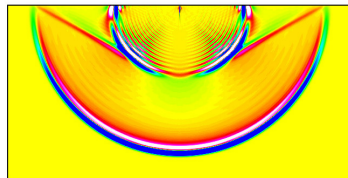
Пример численных расчетов

Численные результаты для 2-мерной задачи Лэмба о действии сосредоточенной импульсной нагрузки на границе упругого блока (программы *2Dyn_Granular* и *2Dyn_Cosserat*):

*упругая среда
(классическая теория упругости)*



континуум Коссера



Линии уровня нормального напряжения σ_{11}

Расчеты выполнены на 15 процессорах кластера, разностная сетка – 1000×500 ячеек.

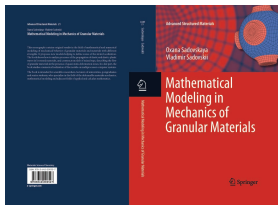
Видны падающие продольные и поперечные волны, конические поперечные волны и поверхностные волны Рэлея, распространяющиеся от точки нагружения внутрь расчетной области.

Существенное отличие состоит в том, что в моментной среде за фронтом поперечной волны наблюдается дополнительная система низкочастотных волн, вызванных вращательным движением частиц.



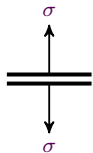
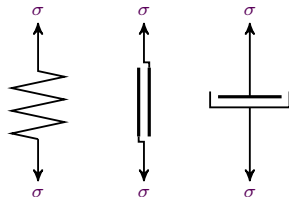
Обобщенный реологический метод

Springer, 2012



<http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-29053-4>

10162 загрузки



$$\sigma \leq 0, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \sigma \varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\tilde{\sigma} - \sigma) \varepsilon \leq 0 & \sigma, \tilde{\sigma} \leq 0 \\ (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \sigma \leq 0 & \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \geq 0 \end{cases}$$

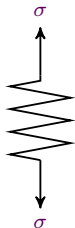
$$(\tilde{\sigma} - \sigma) : \varepsilon \leq 0 \quad \sigma, \tilde{\sigma} \in K \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) : \sigma \leq 0 \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in C$$

$$K = \{ \sigma \mid \sigma : \varepsilon \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in C \} \quad \Leftrightarrow \quad C = \{ \varepsilon \mid \sigma : \varepsilon \leq 0 \quad \forall \sigma \in K \}$$



Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов

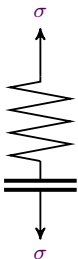
Декабрьские чтения
конференция
в Томске
11-16 декабря 2018



упругая среда



Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



*идеальная сыпучая среда
с упругими частицами*

Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и жесткий контакт



Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



*идеальная сыпучая среда
с упругими частицами*

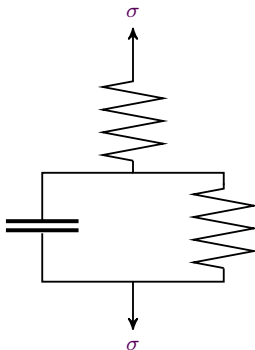
Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и жесткий контакт



Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



идеальная сыпучая среда
с упругими частицами



разномодульная
упругая среда

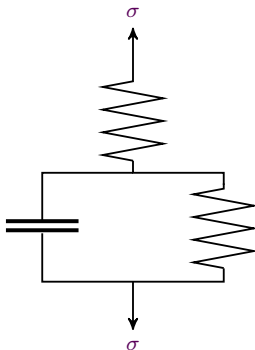
Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и жесткий контакт



Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



идеальная сыпучая среда
с упругими частицами



разномодульная
упругая среда

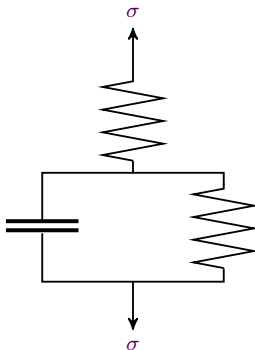


Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и жесткий контакт

Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



идеальная сыпучая среда
с упругими частицами



разномодульная
упругая среда

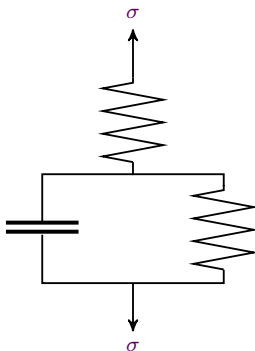


Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и жесткий контакт

Реологические схемы упругопластических сыпучих материалов



идеальная сыпучая среда
с упругими частицами



разномодульная
упругая среда



упругопластическая
сыпучая среда

Реологическая схема с 3 элементами: упругая пружина, жесткий контакт и пластический шарнир

Реологические схемы вязкоупругих сыпучих материалов

Декабрьские чтения
конференция
в Томске
11-16 декабря 2018



*вязкоупругая среда
(модель Максвелла)*

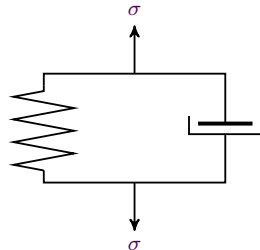
Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и вязкий демпфер



Реологические схемы вязкоупругих сыпучих материалов



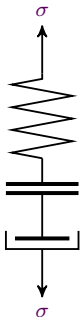
*вязкоупругая среда
(модель Максвелла)*



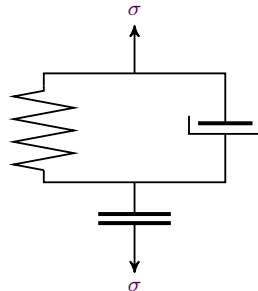
*вязкоупругая среда
(модель Кельвина-Фойхта)*

Реологическая схема с 2 элементами: упругая пружина и вязкий демпфер

Реологические схемы вязкоупругих сыпучих материалов



вязкоупругая сыпучая среда
(модель Максвелла)



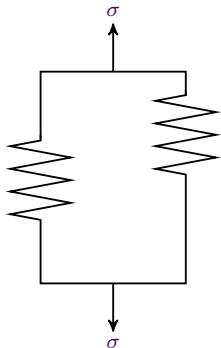
вязкоупругая сыпучая среда
(модель Кельвина-Фойхта)

Реологическая схема с 3 элементами: упругая пружина, вязкий демпфер и жесткий контакт



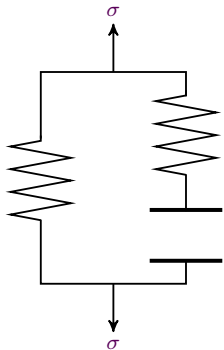
Реологические схемы пористых материалов

Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



Реологические схемы пористых материалов

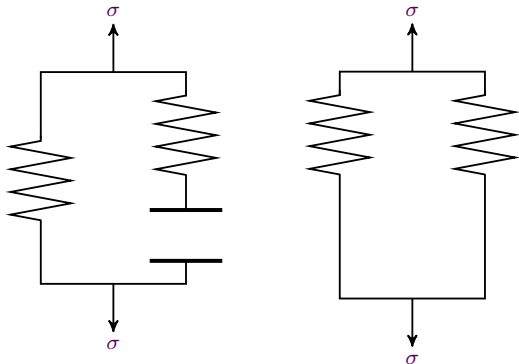
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

Реологические схемы пористых материалов

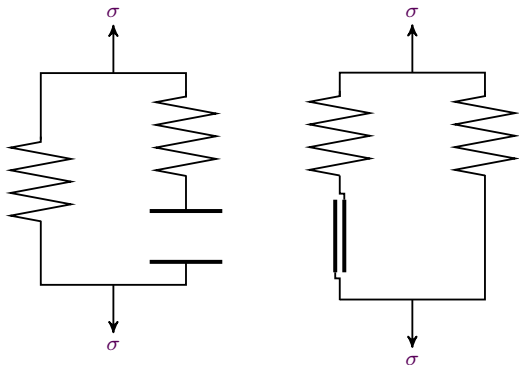
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

Реологические схемы пористых материалов

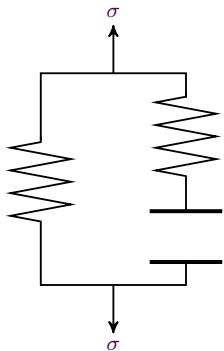
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



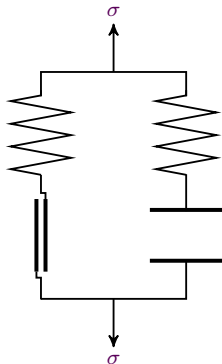
упругая пористая среда

Реологические схемы пористых материалов

Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

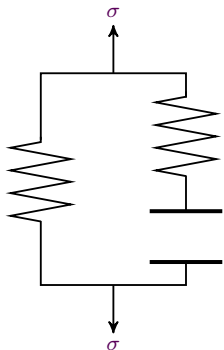


упругопластическая пористая среда

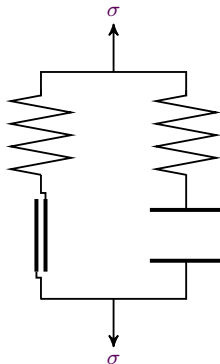


Реологические схемы пористых материалов

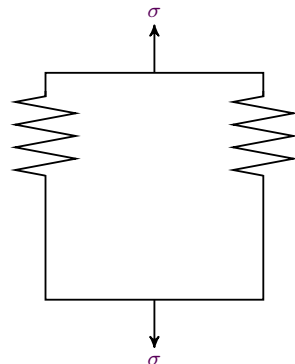
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

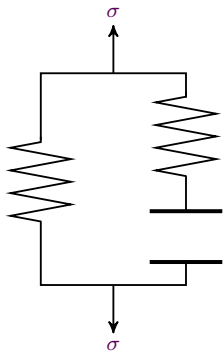


упругопластическая пористая среда

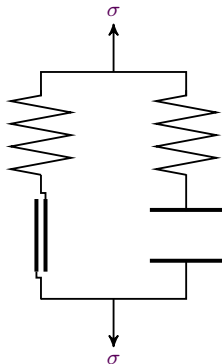


Реологические схемы пористых материалов

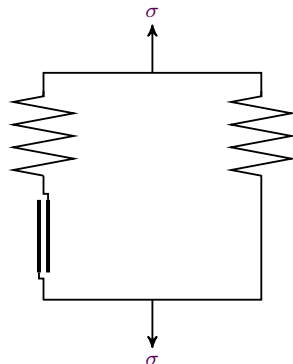
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

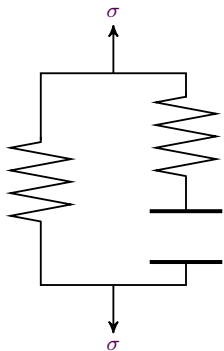


упругопластическая пористая среда

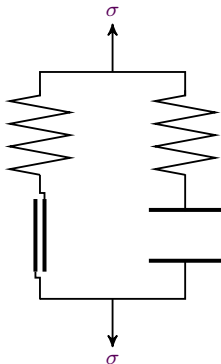


Реологические схемы пористых материалов

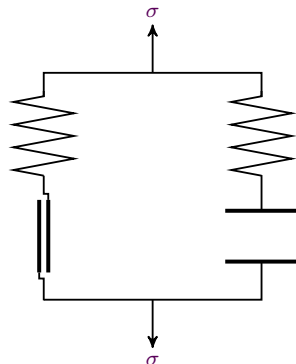
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда

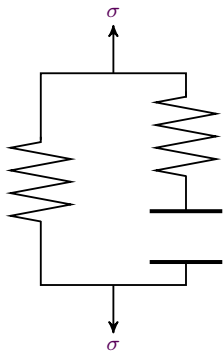


упругопластическая пористая среда

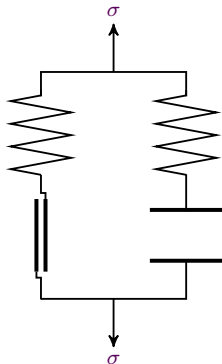


Реологические схемы пористых материалов

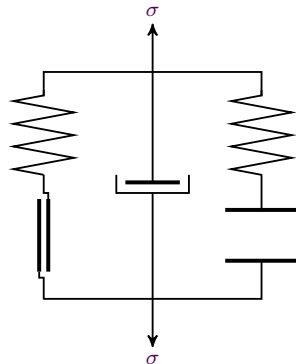
Модели пористых материалов (с учетом упругих, пластических и вязких свойств) строятся следующим образом:



упругая пористая среда



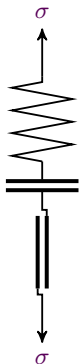
упругопластическая пористая среда



упруго-вязкопластическая пористая среда



Идеально сыпучая среда



Разложение тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c + \boldsymbol{\varepsilon}^p$

Неравенство Хаара–Кармана

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{a} : \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in K$$

Неравенство Мизеса

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{e}^p \leq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in F$$

Уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho g$$

Кинематическое уравнение

$$2\mathbf{e} = \nabla v + \nabla v^*$$

Множество F по критерию пластичности Мизеса: $F = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \tau(\boldsymbol{\sigma}) \leq \tau_s \}$

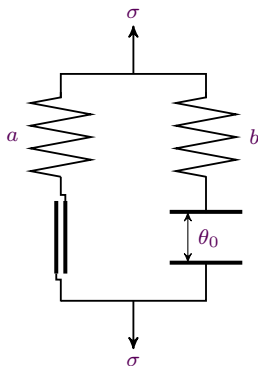
Выпуклый конус K по критерию прочности Мизеса–Шлейхера: $K = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \tau(\boldsymbol{\sigma}) \leq \alpha p(\boldsymbol{\sigma}) \}$

$\tau(\boldsymbol{\sigma})$ – интенсивность касательных напряжений, $p(\boldsymbol{\sigma})$ – гидростатическое давление

τ_s – предел текучести среды, α – параметр внутреннего трения



Пористая среда



Замкнутая система уравнений и неравенств:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + f$$

$$(\tilde{\mathbf{s}} - \mathbf{s}) : \left(\mathbf{a} : \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} - \nabla v \right) \geq 0, \quad \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in F$$

$$\mathbf{b} : \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^*), \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \pi_K(\mathbf{q} + \mathbf{q}^0)$$

$$\mathbf{b} : \mathbf{q}^0 = \frac{\theta_0}{3} \boldsymbol{\delta} - \text{тензор начальной пористости}$$

θ_0 – начальная пористость

$\rho = \rho_0 (1 - \theta_0)$ – плотность пористой среды

\mathbf{s} и \mathbf{q} – тензоры условных напряжений

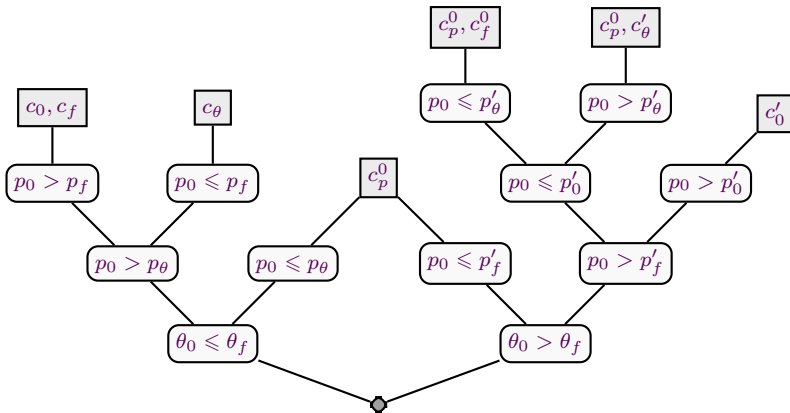
Матричная форма модели:

$$(\tilde{V} - V) \cdot \left(A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial V}{\partial x_i} - G \right) \geq 0, \quad \tilde{V}, V \in F$$

$$V = \pi_K(U)$$



Плоские продольные волны (точное решение)



Полное дерево решений представлено на схеме в виде графа, вершины которого определяют одну или две ударные волны в зависимости от варианта решения.



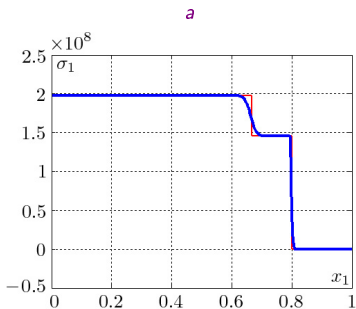
Садовский В.М., Садовская О.В. Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 5. С. 53–65. DOI: 10.15372/PMTF20160507



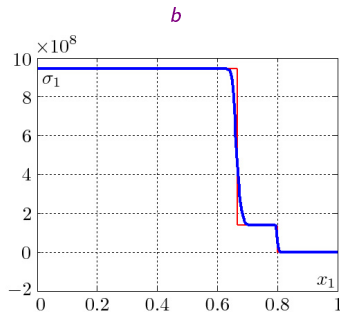
Сравнение решений

Эпюры нормального напряжения в случае низкой пористости.

Волна упругого уплотнения (упругий переход из разрыхленного состояния в состояние слопления пор) и обычная пластическая волна в уплотненном материале.



$$\theta_0 = 0.1\%, \quad p_0 = 5 \tau_s$$



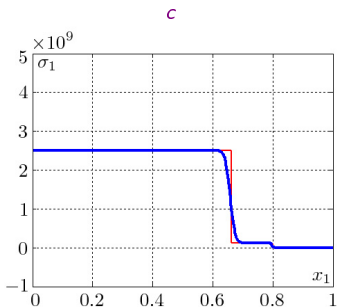
$$\theta_0 = 1\%, \quad p_0 = 25 \tau_s$$



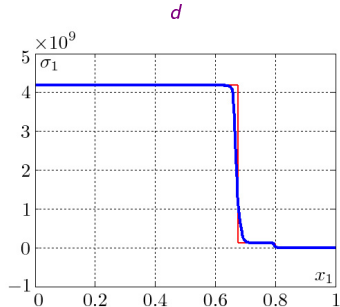
Сравнение решений

Эпюры нормального напряжения в случае высокой пористости.

Обычный упругий предвестник в пористом материале и волна пластического уплотнения (необратимый переход из разрыхленного состояние в состояние схлопывания пор).



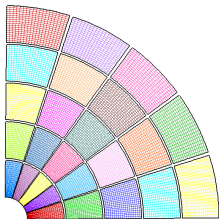
$$\theta_0 = 5\%, \quad p_0 = 75 \tau_s$$



$$\theta_0 = 5\%, \quad p_0 = 125 \tau_s$$

Расширение цилиндрической полости

Распределение вычислительной нагрузки между узлами кластера



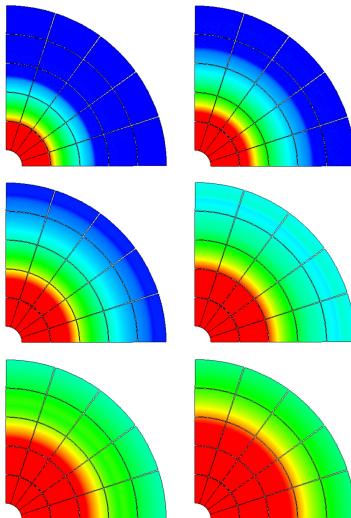
2D разбиение расчетной области,
25 процессоров

Пенистый алюминий
с пористостью 1%



Садовский В.М., Садовская О.В.,
Лукьянов А.А. Радиальное
расширение сферической
и цилиндрической полостей
в безграничной пористой среде //
ПМТФ. 2014. Т. 55, № 4. С. 160–173.

Действие постоянной нагрузки на внутренней границе

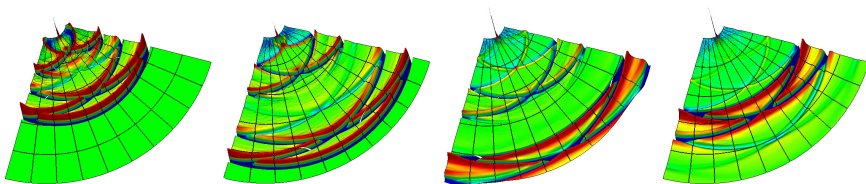


Линии уровня пластической диссипации

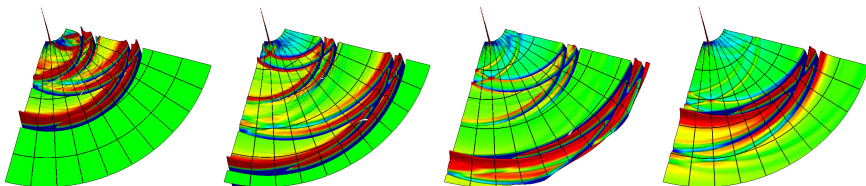
Сосредоточенная импульсная нагрузка

Задача Лэмба о расширении цилиндрической полости под действием сосредоточенной импульсной нагрузки:

Симметричный случай



Поля радиального напряжения



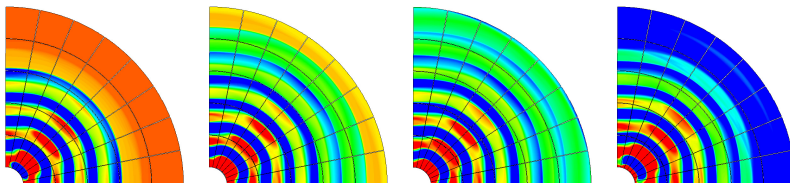
Несимметричный случай

50 процессоров, 500 × 500 ячеек

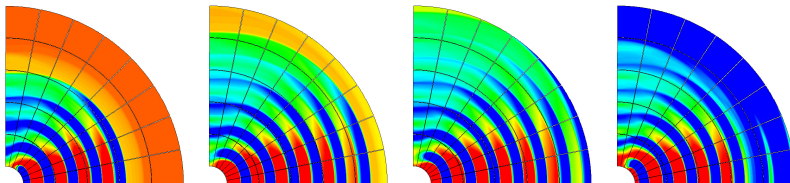
Периодическая локализованная нагрузка

Действие периодической локализованной нагрузки на части внутренней поверхности цилиндрической полости:

Симметричный случай



Линии уровня объемной деформации $\theta(\epsilon)$

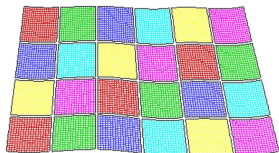


Несимметричный случай

40 процессоров, 400 × 400 ячеек

Ударное нагружение трапецеидального блока

Распределение вычислительной нагрузки между узлами кластера



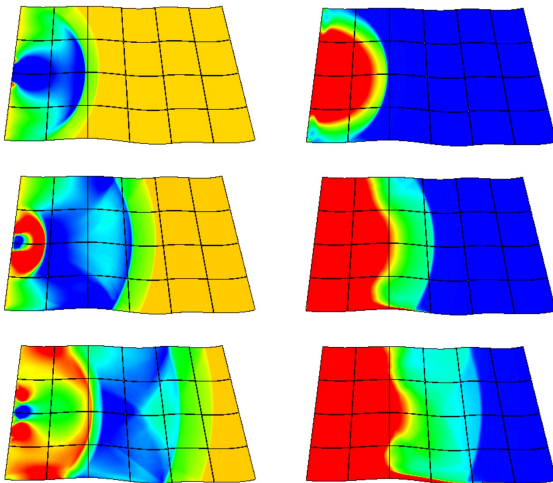
2D разбиение расчетной области,
24 процессора

Характерные размеры блока:
основания трапеции – 1.2 м и 1.5 м,
высота – 0.8 м.

Давление действует на части
левой границы расчетной области
(зона нагружения – 10 см),
длительность действия импульса
– 100 мкс.

1200 × 800 ячеек

Линии уровня пластической диссипации



Линии уровня нормального напряжения σ_{22}



Уравнения блочной упругой среды

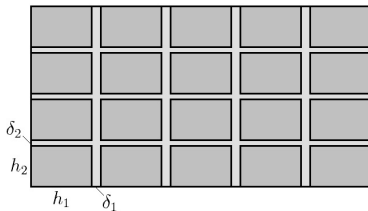


Схема блочной среды

Движение каждого блока описывается системой уравнений динамической теории упругости:

$$\rho \dot{v}_1 = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}$$

$$\rho \dot{v}_2 = \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}$$

$$\dot{\sigma}_{11} = \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2 \rho c_2^2 v_{2,2}$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2 \rho c_2^2 v_{1,1}$$

$$\dot{\sigma}_{12} = \rho c_2^2 (v_{2,1} + v_{1,2})$$

Упругие прослойки между горизонтальными блоками:

$$\rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2} = \rho' c_1'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}$$

$$\rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} = \rho' c_2'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}$$

Упругие прослойки между вертикальными блоками:

$$\rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} = \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} = \rho' c_1'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}$$

$$\rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} = \rho' c_2'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}$$



Упругопластические прослойки

С учетом пластичности определяющие уравнения вертикальных прослоек заменяются вариационным неравенством:

$$(\delta\sigma_{11}^+ + \delta\sigma_{11}^-) \dot{\epsilon}_{11}^p + (\delta\sigma_{12}^+ + \delta\sigma_{12}^-) \dot{\epsilon}_{12}^p \leq 0$$

$\delta\sigma_{jk}^\pm = \tilde{\sigma}_{jk}^\pm - \sigma_{jk}^\pm$ – вариации напряжений

$\dot{\epsilon}_{11}^p = \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1} - \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2\rho'c_1'^2}$, $\dot{\epsilon}_{12}^p = \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1} - \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2\rho'c_2'^2}$ – пластические скорости деформации

Действительные напряжения σ_{jk}^\pm и вариации напряжений $\tilde{\sigma}_{jk}^\pm$ подчиняются ограничениям:

$$f\left(\frac{\tilde{\sigma}_{11}^+ + \tilde{\sigma}_{11}^-}{2}, \frac{\tilde{\sigma}_{12}^+ + \tilde{\sigma}_{12}^-}{2}\right) \leq \tau(\chi)$$

τ – предел текучести материала прослоек

χ – параметр (или система параметров) упрочнения

$f(\sigma_n, \sigma_\tau)$ – функция напряжений, аргументами которой являются нормальное и касательное напряжения

Простейшая форма ограничений (условие Кулона–Мора): $|\sigma_\tau| \leq \tau_s - k_s \sigma_n$

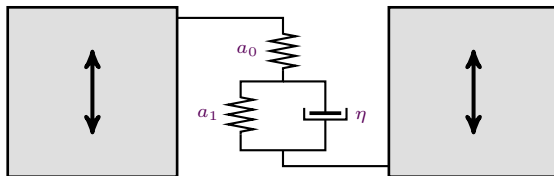
τ_s и k_s – параметры материала

Определяющие соотношения горизонтальных упругопластических прослоек формулируются аналогично.



Модель вязкоупругой прослойки

Для описания эффектов вязкого сдвига в прослойках, которые проявляются на относительно больших временах, служат уравнения вязкоупругой среды Пойнтинга–Томсона:



Реологическая схема Пойнтинга–Томсона

Закон Гука для упругого элемента: $\epsilon'_{12} = a_0 (\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-)/2$, $\epsilon''_{12} = a_1 s_{12}$

Закон Стокса для вязкого элемента: $\eta \dot{\epsilon}''_{12} = (\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-)/2 - s_{12}$

Полная деформация: $\epsilon_{12} = \epsilon'_{12} + \epsilon''_{12}$

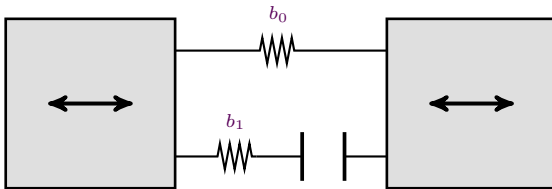
Определяющие уравнения прослойки:

$$a_0 \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} + a_1 \dot{s}_{12} = \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, \quad \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = s_{12} + \eta a_1 \dot{s}_{12}$$



Модель пористой прослойки

Поперечная деформация прослойки на основе уравнений, учитывающих повышение жесткости материала после схлопывания пор:



Реологическая схема пористой прослойки

Полная деформация: $\varepsilon_{11} = \sigma'_{11}/b_1 + \theta_1 - \theta_0$

$\sigma'_{11} \leq 0$ – напряжение в жестком контакте

$\theta_0 > 0$ и $\theta_1 \geq 0$ – начальное и текущее значения пористости

Определяющие соотношения жесткого контакта: $(\tilde{\sigma}_{11} - \sigma'_{11})\theta_1 \leq 0, \tilde{\sigma}_{11}, \sigma'_{11} \leq 0$

$\sigma'_{11} = b_1 \pi(\theta_0 + \varepsilon_{11}), \pi(\theta) = \min(\theta, 0)$ – проекция на отрицательную полуось

Определяющие соотношения, включая уравнение для пористости:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \quad \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = b_0 \varepsilon_{11} + b_1 \pi(\theta_0 + \varepsilon_{11}), \quad \theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_{11} - \pi(\theta_0 + \varepsilon_{11})$$



Модель флюидонасыщенной прослойки

Кинетическая энергия на единицу объема горизонтальной прослойки (модель типа Био):

$$2T = \rho_s \frac{(v_1^+ + v_1^-)^2}{4} + \rho_a \left(\frac{v_1^+ + v_1^-}{2} - w_1 \right)^2 + (\rho_s + \rho_f) \frac{(v_2^+ + v_2^-)^2}{4} + \rho_f w_1^2$$

ρ_s, ρ_f – плотности скелета и жидкой фазы, ρ_a – плотность присоединенной массы
 w_1 – абсолютная скорость потока жидкости

Уравнения, описывающие движение скелета в направлении оси x_1 :

$$(\rho_s + \rho_a) \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} - \rho_a \dot{w}_1 = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}$$

$$a_0 \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} + a_1 \dot{s}_{12} = \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}, \quad \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = s_{12} + \eta a_1 \dot{s}_{12}$$

Уравнения, описывающие совместное движение твердого скелета и жидкой фазы в направлении оси x_2 :

$$(\rho_s + \rho_f) \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} = \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} = b_0 \dot{\varepsilon}_{22} + b_1 \dot{\pi}(\theta_0 + \varepsilon_{22}) + b_s w_{1,1}$$

Уравнения движения жидкости вдоль прослойки:

$$(\rho_f + \rho_a) \dot{w}_1 - \rho_a \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} = s_{11,1}, \quad \dot{s}_{11} = b_f w_{1,1} + b_s \dot{\varepsilon}_{22}$$

$s_{11} = -p\theta$ – нормальное напряжение в жидкой фазе, p – поровое давление
 θ – текущая пористость, b_s и b_f – упругие модули, характеризующие взаимодействие в системе “скелет–жидкость”



Закон Кирхгофа

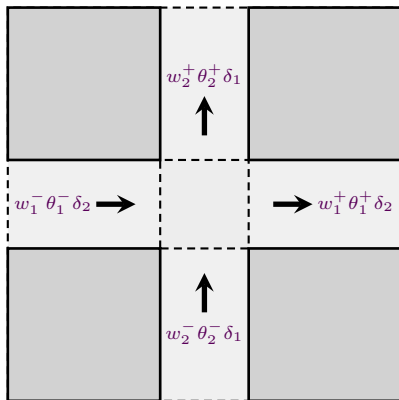


Схема взаимодействия потоков

Закон Кирхгофа для потока жидкости на стыках горизонтальных и вертикальных прослоек:

$$w_1^+ \theta_1^+ \delta_2 + w_2^+ \theta_2^+ \delta_1 = w_1^- \theta_1^- \delta_2 + w_2^- \theta_2^- \delta_1$$

Динамические уравнения:

$$s_{11}^\pm = -p \theta_1^\pm, \quad s_{22}^\pm = -p \theta_2^\pm$$

θ_1^\pm and θ_2^\pm – пористости в горизонтальных и вертикальных прослойках



Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // *Wave Motion*. 2015. V. 52. P. 138–150. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212514001358>

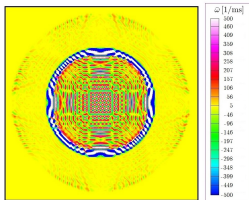


Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Lukyanov A.A. Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers // *Journal of Computational Physics*. 2017. V. 345. P. 834–855. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.06.001 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117304461>

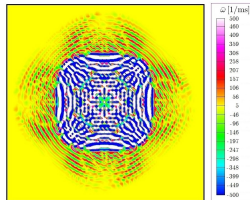


Мгновенное вращение центрального блока

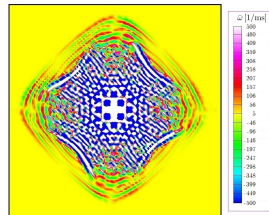
$\delta = 0.1$ мм



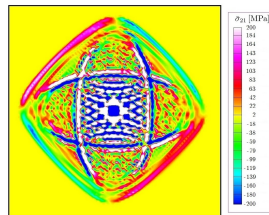
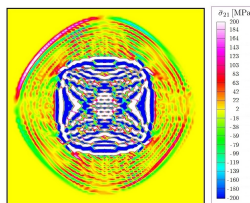
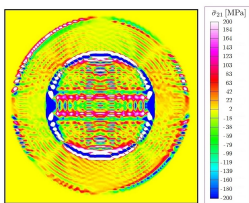
$\delta = 1$ мм



$\delta = 5$ мм



Линии уровня угловой скорости (в зависимости от толщины прослоек)



Линии уровня касательного напряжения (в зависимости от толщины прослоек)

Массив горной породы состоит из 100×100 блоков, размер каждого блока – $5 \text{ см} \times 5 \text{ см}$



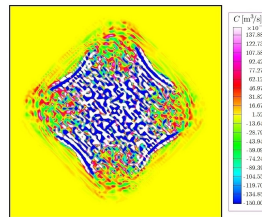
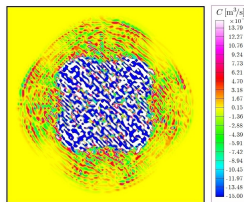
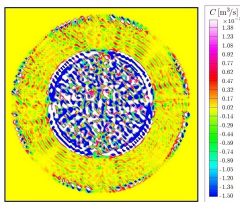
Мгновенное вращение центрального блока

$\delta = 0.1 \text{ мм}$

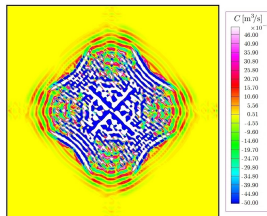
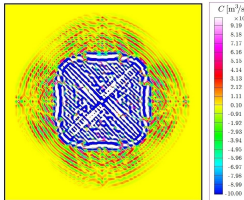
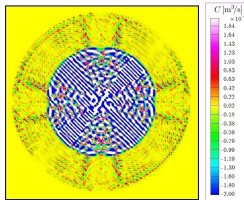
$\delta = 1 \text{ мм}$

$\delta = 5 \text{ мм}$

Случай интенсивной нагрузки (со схлопыванием пор)



Линии уровня циркуляции жидкости вокруг блоков (в зависимости от толщины прослоек)



Случай небольшой нагрузки (без схлопывания пор)

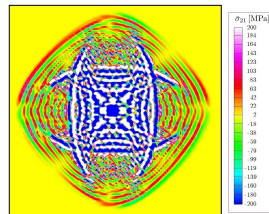
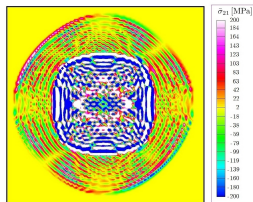
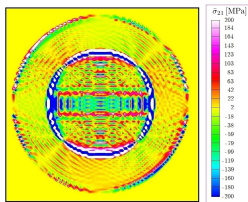
Мгновенное вращение центрального блока

$\delta = 0.1 \text{ мм}$

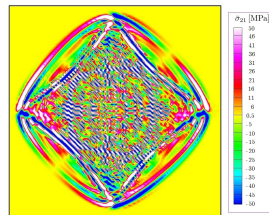
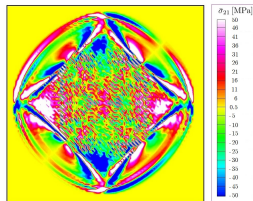
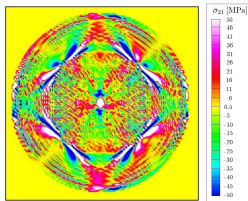
$\delta = 1 \text{ мм}$

$\delta = 5 \text{ мм}$

Случай упругих прослоек



Линии уровня касательного напряжения (в зависимости от толщины прослоек)

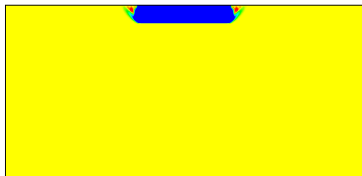


Случай упругопластических прослоек

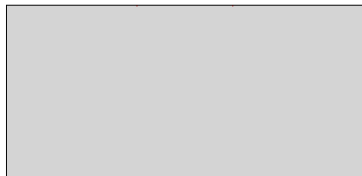


Распространение трещин в блочной среде

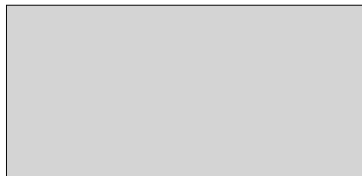
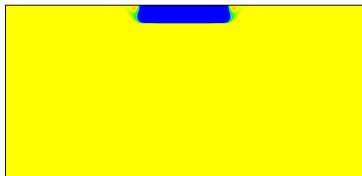
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

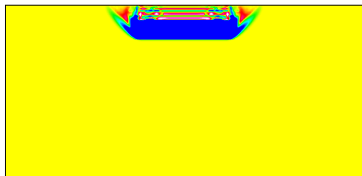


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

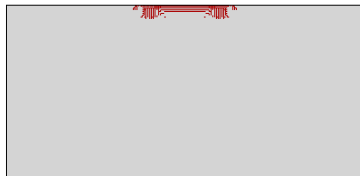
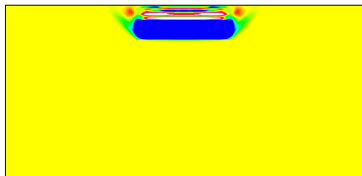
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

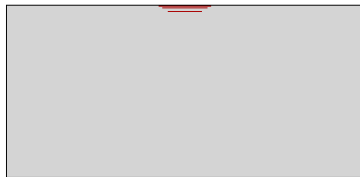
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

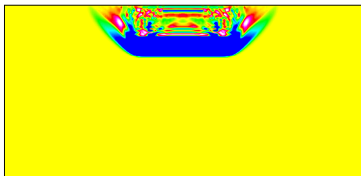


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

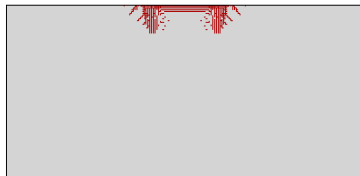
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

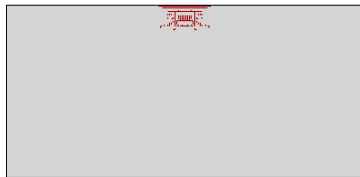
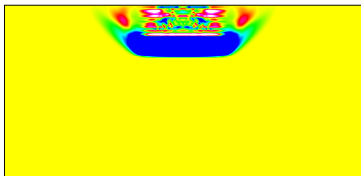
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

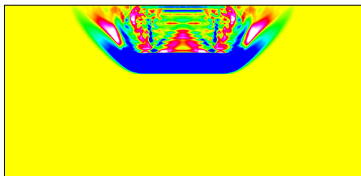


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

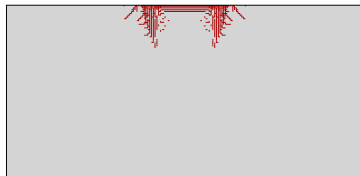
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

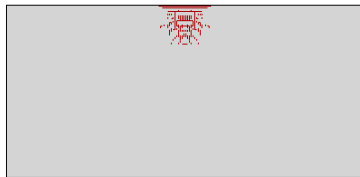
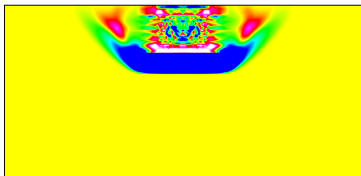
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

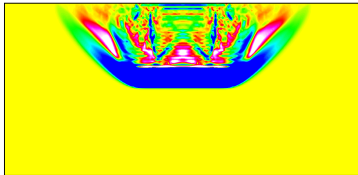


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

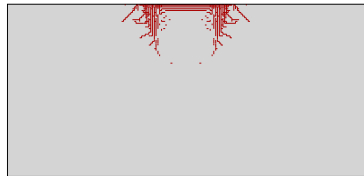
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

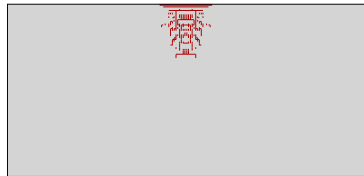
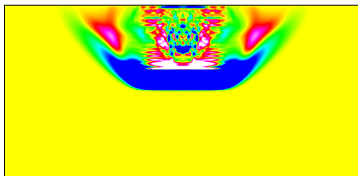
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

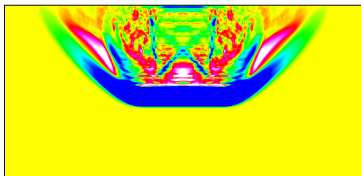


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

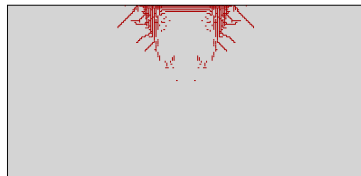
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

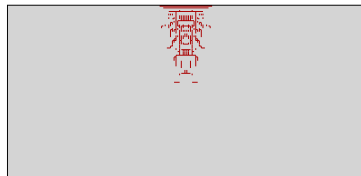
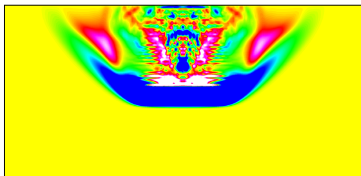
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин



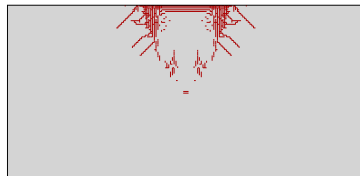
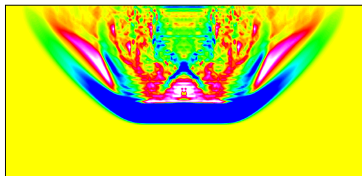
Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области



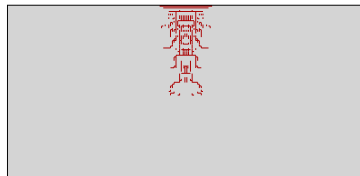
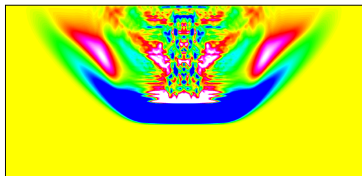
Распространение трещин в блочной среде

Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения

Формирование и распространение системы межблочных трещин



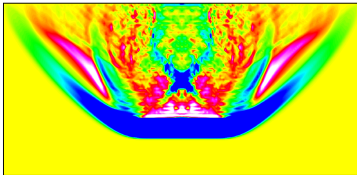
Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

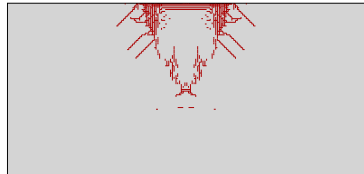


Распространение трещин в блочной среде

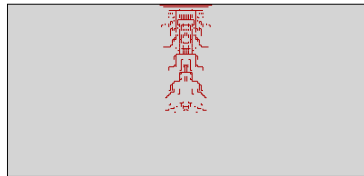
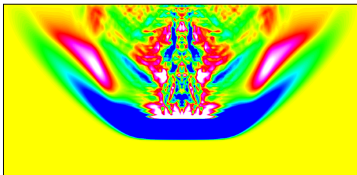
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

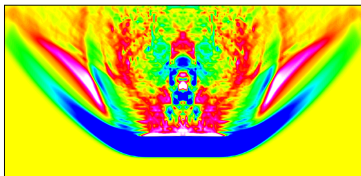


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

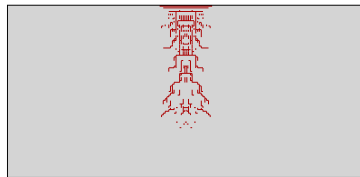
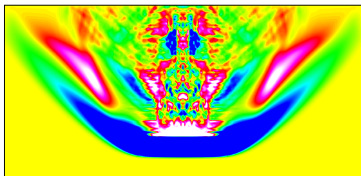
Распространение трещин в блочной среде

Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения

Формирование и распространение системы межблочных трещин

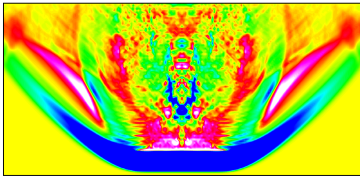


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

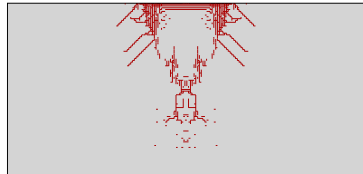
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

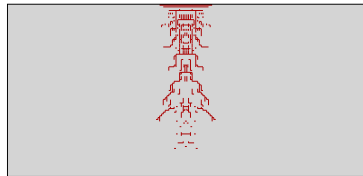
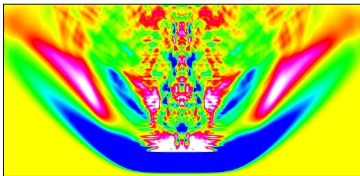
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

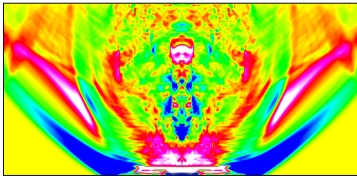


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

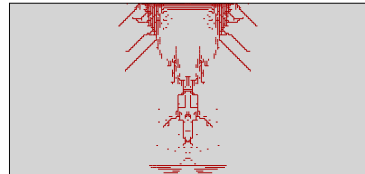
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

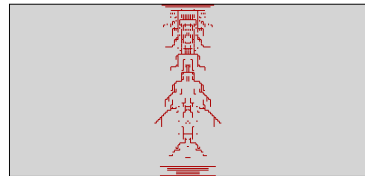
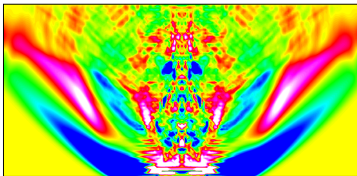
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

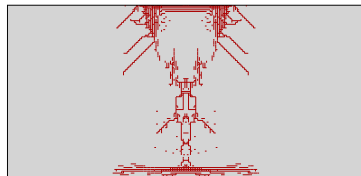
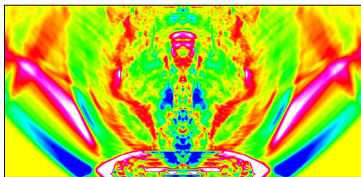


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

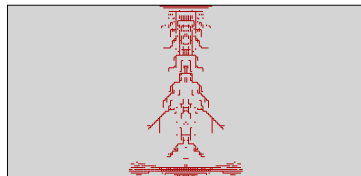
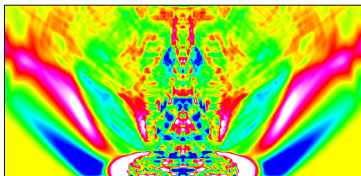
Распространение трещин в блочной среде

Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения

Формирование и распространение системы межблочных трещин

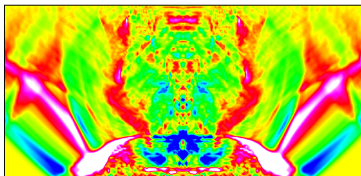


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

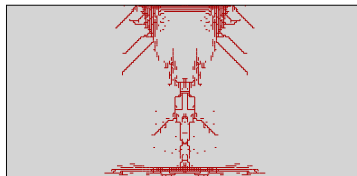
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

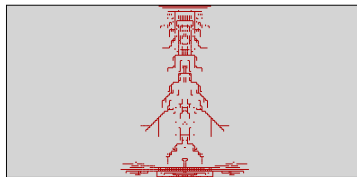
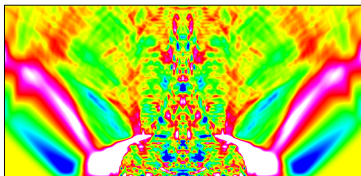
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

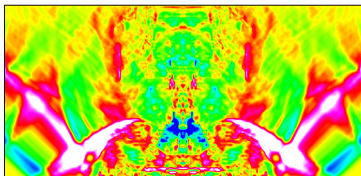


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

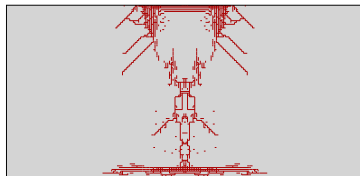
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

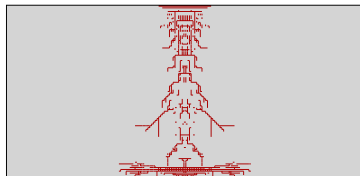
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

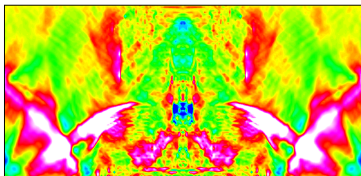


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

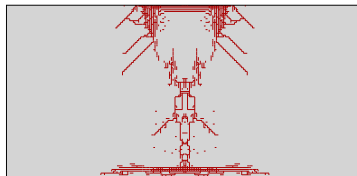
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

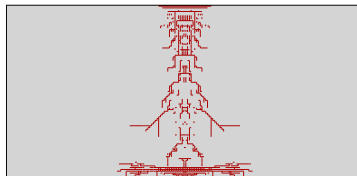
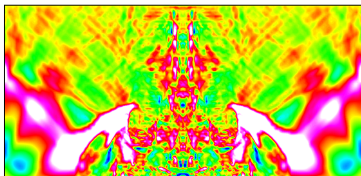
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

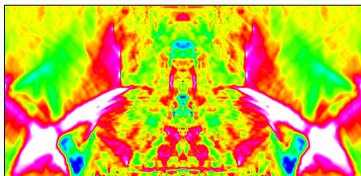


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

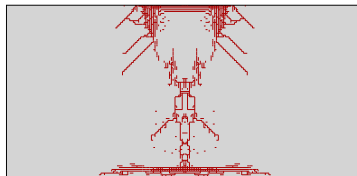
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

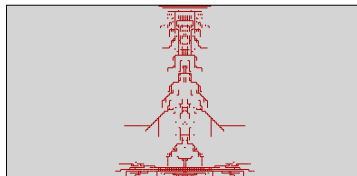
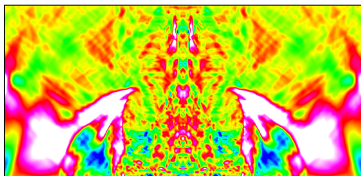
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин

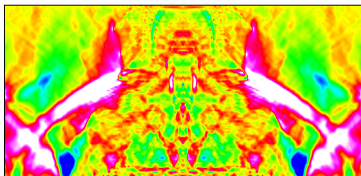


Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

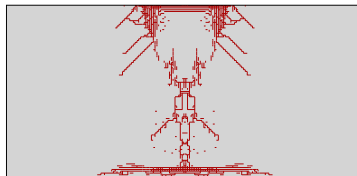
100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Распространение трещин в блочной среде

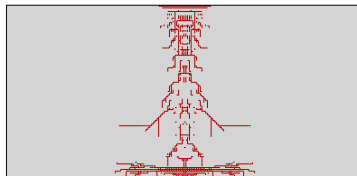
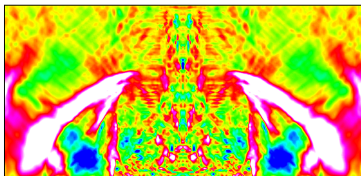
Действие П-образной импульсной нагрузки на части верхней границы блочного массива



Линии уровня нормального напряжения



Формирование и распространение системы межблочных трещин



Действие сглаженной П-образной импульсной нагрузки

100 слоев, по 200 блоков в каждом слое
100 процессоров, 1D разбиение расчетной области

Импульсное воздействие на слоистую среду



Сейсмоисточники серии "Енисей":

<http://gseis.ru/our-business/field-seismic-works/impulse-technique/>



Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Detkov V.A.

Analysis of elastic waves generated in frozen grounds by means of the electromagnetic pulse source "Yenisei"

// IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 193. P. 012058-1–012058-7.

DOI: 10.1088/1755-1315/193/1/012058

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/193/1/012058>

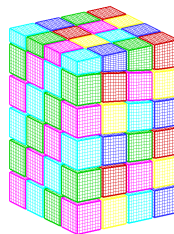


Садовский В.М., Садовская О.В. Анализ

сейсмических волн, генерируемых импульсным электромагнитным источником "Енисей", с применением высокопроизводительных вычислений

// Вестник ВКГУ / Вычислительные технологии:

Совм. выпуск. 2018. Т. 1, ч. 3. С. 215–223.

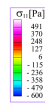
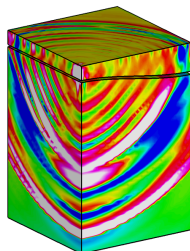
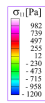
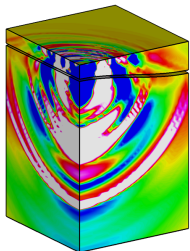


Равномерное распределение вычислительной нагрузки между 96 узлами кластера



Сейсмические волны от источника "Енисей"

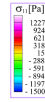
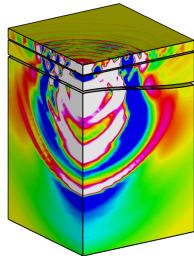
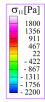
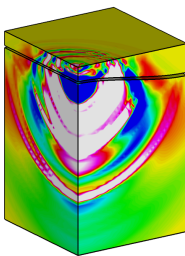
Верхний слой
– глина,
нижний слой
– грунт



Верхний слой
– твердый
грунт,
нижний слой
– грунт

Поверхности уровня нормального напряжения σ_{11}
в вертикальном направлении

Верхний слой
– вода,
нижний слой
– грунт

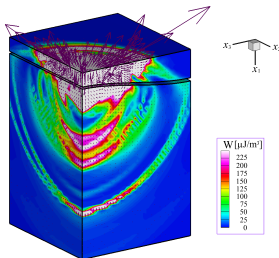


Верхний слой
– лед,
средний слой
– вода,
нижний слой
– грунт

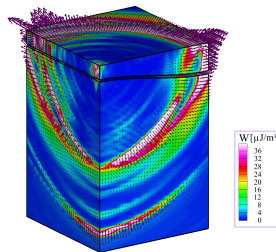


Сейсмические волны от источника "Енисей"

Верхний слой
– глина,
нижний слой
– грунт

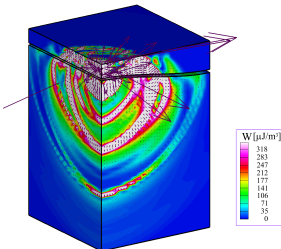


Верхний слой
– твердый
грунт,
нижний слой
– грунт

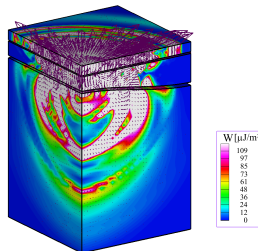


Поверхности уровня энергии W и векторное поле Умова–Пойнтинга

Верхний слой
– вода,
нижний слой
– грунт

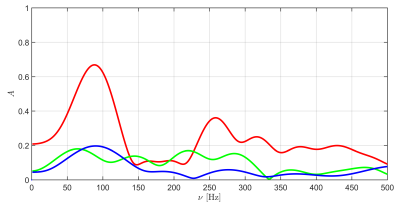


Верхний слой
– лед,
средний слой
– вода,
нижний слой
– грунт

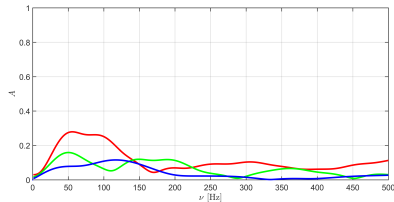


Амплитудно-частотные характеристики

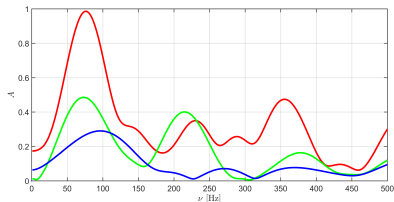
Верхний слой – глина



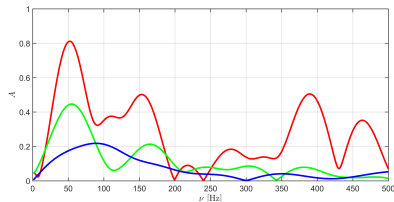
Верхний слой – твердый грунт



Амплитудно-частотные зависимости для скорости v_1 частиц среды на глубине 30 м



Верхний слой – вода



Верхний слой – лед, средний слой – вода

Система точек под трассой,
проходящей в направлении оси x_2
вблизи плоскости симметрии:

красная линия относится к точке под источником
зеленая линия – к срединной точке слева
синяя линия – к крайней левой точке



Заключение

- Предложены оригинальные формулировки определяющих соотношений упругопластического деформирования в виде вариационных неравенств для симметричных гиперболических операторов, которые позволяют исследовать вопросы корректности постановки краевых задач, построения разрывных решений с упругопластическими ударными волнами и эффективных методов сквозного счета для анализа волновых движений.
- Традиционный реологический метод дополнен новым элементом – жестким контактом, который служит для учета различного сопротивления материала растяжению и сжатию и позволяет путем комбинирования с упругими, вязкими и пластическими элементами строить реологические модели различного уровня сложности.
- Построены математические модели сыпучих и пористых упругопластических сред, учитывающие изменение жесткости материала при схлопывании пор. Сформулированы уравнения деформирования тонких прослоек для исследования поведения трещиноватых флюидонасыщенных геоматериалов под действием динамических возмущений в рамках модели блочной среды.
- Разработаны суперкомпьютерные технологии, позволяющие с высокой степенью детализации и точности в двумерной (плоской, осесимметричной) и пространственной постановках анализировать волновые движения в блочно-слоистых массивах геосред со сложными реологическими свойствами блоков и прослоек (упругопластическими, вязкоупругими, пористыми, флюидонасыщенными, с учетом независимых вращений частиц и трещинообразования).

Спасибо за внимание!