Методы вариационных неравенств в задачах динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред

В. М. Садовский, О. В. Садовская

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
Отдел вычислительной механики деформируемых сред

sadov@icm.krasn.ru, o_sadov@icm.krasn.ru

научная конференция
Декабрьские чтения в Томске
2019

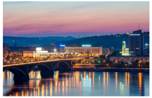
Содержание

1. Введение – о разрывных решениях нелинейных моделей
2. Вариационное неравенство для линейного гиперболического оператора
3. Соотношения сильного разрыва
4. Интегральные оценки решений
5. Математические модели сыпучих и пористых сред
6. Вариационное неравенство для квазилинейного гиперболического оператора
7. Волны сдвига в нелинейно упрочняющейся среде

В 2023 году встретимся в Красноярске?

город Красноярск – предлагаемое место проведения
XIII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики

Красноярск – центр Сибири



Красноярск – один из наиболее крупных городов Сибири, город-миллионник, географический центр России, крупнейший культурный, образовательный, экономический и промышленный центр Центральной и Восточной Сибири.

Красноярск – место проведения XXIX Всемирной Зимней Универсиады-2019.
В 2019 году город принял около 3 тысяч гостей со всего мира.

В 2017 году был построен новый аэропорт г. Красноярска, который соответствует всем международным стандартам.
В аэропорту планируется организованная встреча участников съезда.

Площадка проведения Съезда (первый вариант)

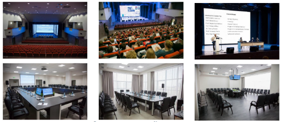
Заседания съезда будут проходить в Конгресс-холле Сибирского федерального университета – самой современной площадке общественно-деловой и культурной жизни Красноярска. Построенный в 2016 году, Конгресс-холл стал украшением архитектурного ансамбля главного кампуса Сибирского федерального университета, расположенного в самом экологически благоприятном районе города. В шаговой доступности находится сосновый бор, берёзовая роща и Николаевская сопка, откуда открывается красивейшая панорама города Красноярска.

Здание Конгресс-холла Сибирского федерального университета общей площадью более 10 000 кв. м включает в себя:

- многофункциональный зал на 700 мест

Зал оснащен системой видеоконференцсвязи, беспроводной системой синхроперевода на 300 участников

- несколько просторных конференц-залов, вместимостью до 100 человек, оснащенные системами видеоконференцсвязи, проекторами, проекционными досками, радиомикрофонами



Здание Конгресс-холла соединено крытым переходом с одним из новых корпусов Сибирского федерального университета, в котором расположен еще один современный зал на 200 мест со всеми необходимыми техническими возможностями

В 300-400 метрах от Конгресс-холла находится библиотека СФУ, в которой есть большой зал вместимостью более 200 мест. Во всех корпусах СФУ, соединенных переходами со зданием библиотеки, также имеются большие лекционные аудитории. **Таким образом, общее число мест с учетом телекоммуникационной трансляции Открытия из большого зала Конгресс-холла можно довести до 1500 и выше.**

Культурная программа и достопримечательности города

Для участников Съезда будут организованы обзорные экскурсии по городу и его окрестностям

Река Енисей – известная всему миру природная достопримечательность города. Самая полноводная река в России и седьмая в мире. Енисей поражает своей мощью многих приезжих.

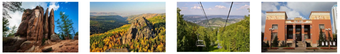
Набережная Енисея протянулась от Центрального парка до Стрелки – места впадения в Енисей небольшой речки Качи. Здесь расположен вантовый мост на остров Татышев – одно из самых узнаваемых строений Красноярска.

В центральной части города вдоль левого берега Енисея можно приятно прогуляться по хорошо оборудованной набережной, с которой открываются живописные виды окрестностей – Столбов, мостов через Енисей, музея-парохода «Св. Николай», Краеведческого музея, Музейного комплекса на Стрелке и других достопримечательностей. На Стрелке находятся Большой концертный зал, памятники командору Резанову и известному сибирскому писателю В.П. Астафьеву.

Государственный природный заповедник «Столбы» расположен на правом берегу реки Енисей на окраине города Красноярска. Заповедник представляет собой предгорный район в отрогах Восточного Саяна, богато насыщенный таежной флорой и фауной. Основной достопримечательностью заповедника «Столбы» являются большие скалы причудливой формы, многие из которых имеют собственные названия, такие как Львиные ворота, Перья, Гриф, Беркут, Дед. Пешие прогулки по тропинкам заповедника – популярный способ отдыха среди красноярцев и гостей города.

Фанпарк «Бобровый лог» – всесезонный парк спорта и отдыха мирового уровня – находится в рекреационной зоне на границе с Государственным заповедником «Столбы» всего в 20 минутах езды от центра города Красноярск. Канатно-кресельная дорога фанпарка «Бобровый Лог», начинающаяся в долине реки Базаихи, проходит вдоль горнолыжной трассы и заканчивается на вершине хребта, откуда открывается великолепная панорама на заповедник «Столбы».

Красноярский краевой краеведческий музей открыт в 1889 году и является одним из старейших музеев Сибири. Построенное в 1929 году здание музея выделяется своей оригинальной архитектурой, напоминая древнеегипетский храм.



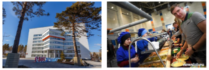
Место проживания участников съезда при проведении Съезда в Конгресс-холле СФУ (первый вариант)

Расселение в Университетском кампусе "Деревня Универсиады 2019" в непосредственной близости от Конгресс-холла СФУ. Вместимость – до 3000 мест в комфортабельных гостиничных номерах с оплатой проживания не более 1500 руб. в сутки (в текущих ценах).
Кроме того, в Сибирском федеральном университете начато строительство нового общежития, которое будет закончено задолго до момента проведения Съезда.

Кампус университета – это комплекс зданий, включающий жилой квартал с гостиничными номерами, библиотеку, выставочные галереи, спортивные площадки и тренажёрные залы, магазины, столовые, кафе, сувенирные лавки и кофейни

Проблема питания участников Съезда также легко решается – вблизи Конгресс-холла функционирует Многофункциональный комплекс – столовая, которая была запущена в 2019 году для организации питания спортсменов Универсиады

При данном варианте размещения огромным плюсом является возможность проживания, питания, организации досуговой и культурной программы в месте проведения самого мероприятия



Простейшая модель “сухого кипения”

Система уравнений одномерного движения сыпучей среды:

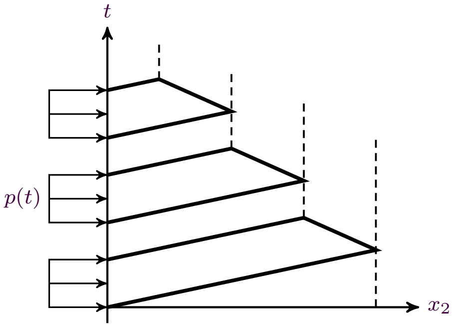
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}\,, \qquad \sigma = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если} \quad \varepsilon \leqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Формулы Даламбера:

$$v(t,x) = \Phi(t+x) + \Psi(t-x)\,, \quad \sigma(t,x) = \Phi(t+x) - \Psi(t-x)$$

Краевая задача:

$$v(0,x) = \sigma(0,x) = 0\,, \qquad \sigma(t,0) = -\,p(t)\,, \qquad \sigma(t,1) = 0$$



Волновая картина “кипящего” слоя

Маслов В.П., Мосолов П.П. Теория упругости для разномодульной среды. М.: Изд-во Моск. ин-та электронного машиностроения, 1985. 100 с.

Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 144 с.

Обобщенные решения с сильным разрывом

Декабрьские чтения в Томске 2019

Методы построения разрывных решений:

- **Метод интегрального обобщения** – *замена дифференциальных уравнений модели интегральными законами сохранения*

Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.

Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.

- **Метод вязкости** – *анализ более общей (вязкой) модели, "сглаживающей" разрывы, с последующим предельным переходом*

Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 87–158.

Олейник О.А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

- **Метод моделирования** – *процесс перехода через фронт разрыва рассматривается как самостоятельный объект моделирования*

Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Лекц. курсы НОЦ. 2010. Вып. 16. С. 3–120.

Пример – уравнение Хопфа

- **Метод интегрального обобщения**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u^2}{\partial x}\right) dt\,dx = \int\limits_{\partial G} -\,\frac{1}{2}\,u^2\,dt + u\,dx = 0$$

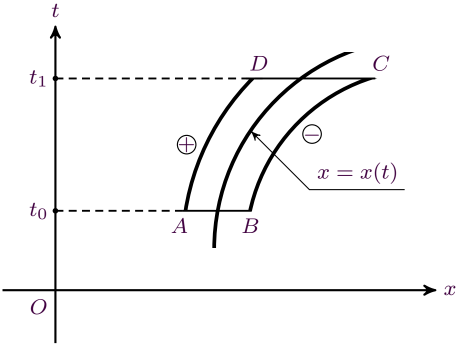
$$c\,[u] = \frac{1}{2}\,[u^2]\,, \qquad [u] = u^+ - u^- \qquad \left(c = \frac{dx}{dt}\right)$$

Альтернативные дивергентные формы уравнения:

$$\frac{\partial u^m}{\partial t} + \frac{m}{m+1}\,\frac{\partial u^{m+1}}{\partial x} = 0\,, \quad m = 2, 3, \ldots$$

Альтернативные скорости ударной волны:

$$c = \frac{m}{m+1}\,\frac{(u^+)^{m+1} - (u^-)^{m+1}}{(u^+)^m - (u^-)^m}$$



Область интегрирования при выводе уравнения на разрыве

Пример – уравнение Хопфа

- **Метод вязкости** (*переход к уравнению Бюргерса*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Если $u(t,x) = u(\xi)$, $\xi = c\,t - x$ – решение уравнения с вязкостью $\mu(u)$, то $u_\varepsilon(t,x) = u(\xi/\varepsilon)$ – решение уравнения с вязкостью $\varepsilon\,\mu(u)$. Поэтому $\varepsilon \to 0 \iff \xi \to \pm\infty$.

Задача сводится к построению решения с бесконечной областью определения и с конечными пределами $u^\pm$ при $\xi \to \pm\infty$

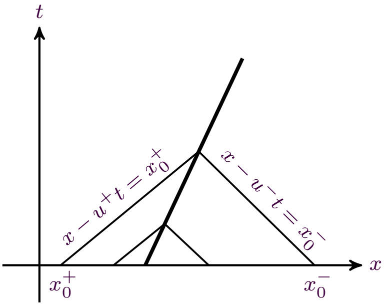
$$(c-u)\,\frac{du}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\mu(u)\,\frac{du}{d\xi}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln\frac{u-u^-}{u^+-u} = \frac{[u]}{2\,\mu}\,\xi + C$$

$$u^+ > u^- \quad (\mu = \text{const})$$

- **Метод моделирования**

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}\,, \qquad u = \Phi(x - ut)$$

прямолинейные характеристики: $x = x_0 + ut$



Поведение характеристик вблизи разрыва

Термодинамически согласованные модели

Симметричная t–гиперболическая система уравнений в матричной форме:

$$A\,\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i} + Q\,U + G \tag{1}$$

Friedrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Commun. Pure Appl. Math. 1954. V. 7, No. 2. P. 345–392.

Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.

Термодинамически согласованная система законов сохранения:

$$\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} + G\,, \qquad \varphi(U) = \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}\,, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i(U)}{\partial U} \tag{2}$$

Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. М.: Научная книга, 1998. 268 с.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(U \cdot \varphi(U) - \Phi(U)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U \cdot \psi_i(U) - \Psi_i(U)\Big)$$

Динамическая теории упругости

научная конференция Декабрьские чтения в Томске 2019

Классическая система уравнений:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla\cdot\sigma + \rho\, g\,, \quad a:\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^*); \qquad \Phi = \frac{1}{2}v\cdot v + \frac{1}{2}\sigma:a:\sigma\,, \quad \Psi_i = (\sigma\cdot v)_i$$

Уравнения динамики континуума Коссера. Полная система уравнений содержит уравнения поступательного и вращательного движения, кинематические и определяющие уравнения:

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla\cdot\sigma + \rho\, g, \quad j\,\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nabla\cdot m - 2\,\sigma^a + j\,q$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \nabla v + \omega, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \nabla\omega$$

$$\sigma = \lambda\,(\delta:\Lambda^s)\,\delta + 2\,\mu\,\Lambda^s + 2\,\alpha\,\Lambda^a\,, \quad m = \beta\,(\delta:M^s)\,\delta + 2\,\gamma\,M^s + 2\,\eta\,M^a$$

Условия гиперболичности:

$$3\,\lambda + 2\,\mu > 0, \quad \mu,\ \alpha > 0; \qquad 3\,\beta + 2\,\gamma > 0, \quad \gamma,\ \eta > 0$$

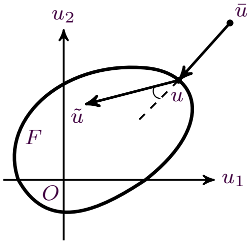
Скорости упругих волн:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\beta + 2\,\gamma}{j}}, \quad c_\omega = \sqrt{\frac{\gamma + \eta}{j}}$$

Вариационные неравенства

Задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве:

$$f(u) = \min_{\tilde{u}\in F} f(\tilde{u}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\tilde{u} - u)\cdot \nabla f(u) \geqslant 0 \quad \forall\, \tilde{u} \in F$$



Простой пример

Оператор проекции $u = \pi_A(\bar{u})$ на выпуклое и замкнутое множество:

$$f(u) = \|u - \bar{u}\|_C^2 \equiv (u - \bar{u})\cdot C(u - \bar{u}), \quad \nabla f(u) = 2\,C(u - \bar{u})$$

$$u \in F: \quad (\tilde{u} - u)\cdot C(u - \bar{u}) \geqslant 0 \quad \forall\, \tilde{u} \in F$$

C – симметричная положительно определенная матрица

Вариационное неравенство для монотонного оператора $Q(u) \neq \nabla f(u)$:

$$(\tilde{u} - u)\cdot Q(u) \geqslant 0, \quad u,\, \tilde{u} \in F$$

Решение существует, если множество F выпукло и замкнуто, а оператор $Q(u)$ сильно монотонный:

$$(u' - u)\cdot \big(Q(u') - Q(u)\big) \geqslant \alpha^2 \|u' - u\| \quad \forall\, u,\, u' \in F \quad (\alpha \neq 0)$$

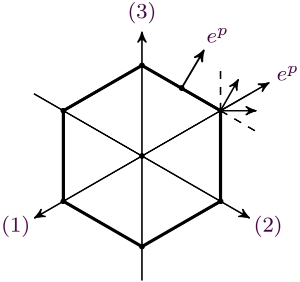
Принцип максимума Мизеса

Мощность пластической диссипации максимальна на действительных напряжениях:

$$\sigma : e^p \geqslant \tilde\sigma : e^p, \quad \sigma,\ \tilde\sigma \in F \qquad \Big(-(\tilde\sigma - \sigma) : e^p \geqslant 0 \Big)$$

Применение теоремы Куна–Таккера:

$$F = \Big\{ \sigma \ \Big| \quad f_j(\sigma) \leqslant 0 \quad (j = 1, \dots, k) \Big\}, \qquad L(\sigma, \lambda) = -\sigma : e^p + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, f_j(\sigma)$$



Ассоциированный закон пластического течения:

$$e^p = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j(\sigma)}{\partial \sigma}, \qquad \lambda_j \geqslant 0, \quad \lambda_j\, f_j(\sigma) = 0$$

$$e^p = \frac{1}{2} \big(\nabla v + \nabla v^* \big) - a : \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Теория упругопластического течения Прандтля–Рейсса:

$$(\tilde v - v)(\rho\, \dot v - \nabla \cdot \sigma - \rho\, g) + \big(\tilde\sigma - \sigma \big) : (a : \dot\sigma - \nabla v) \geqslant 0\,, \quad \sigma, \tilde\sigma \in F$$

Матричная форма моделей

Термодинамически согласованная система уравнений теории упругости:

$$A\,\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i} + Q\,U + G$$

При учете пластической деформации эта система заменяется вариационным неравенством:

$$(\widetilde{U} - U)\cdot\left(A\,\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i} - Q\,U - G\right) \geqslant 0, \qquad \widetilde{U},\ U \in F \tag{3}$$

Для учета вязко-пластической деформации служит регуляризованная система уравнений:

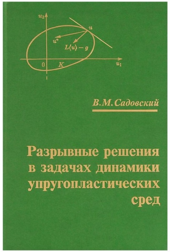
$$A\,\frac{\partial U'}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial U'}{\partial x_i} + C\,\frac{\pi_C(U') - U'}{\eta} + Q\,U' + G$$

- F – выпуклое и замкнутое множество, ограниченное поверхность. текучести
- $U(t,x)$, $U'(t,x)$ – m-векторы неизвестных функций, $\widetilde{U}$ – варьируемый вектор
- A – симметричная положительно определенная матрица механических параметров среды
  B^i – симметричные матрицы коэффициентов при производных по пространственным переменным
  Q – антисимметричная матрица, G – вектор объемных сил и предварительных напряжений
- $\pi_C(U)$ – проекция U на множество F, η – коэффициент вязкости

Случай квазилинейного оператора

Декабрьские чтения в Томске 2019

Физматлит, 1997



Вариационное неравенство для термодинамически согласованного гиперболического оператора типа Годунова:

$$(\tilde{U} - U) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} - G \right) \geqslant 0, \qquad \tilde{U},\ U \in F \tag{4}$$

$$\varphi(U) = \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}, \qquad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i(U)}{\partial U}$$

Дивергентная форма вариационного неравенства:

$$\tilde{U} \cdot \left(\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} - G \right) \geqslant \frac{\partial}{\partial t} \Big(U \cdot \varphi(U) - \Phi(U) \Big) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(U \cdot \psi_i(U) - \Psi_i(U) \Big) - U \cdot G, \qquad \tilde{U},\ U \in F$$

- Соотношения сильного разрыва
- Единственность решения задачи Коши
- Непрерывная зависимость от исходных данных
- Корректность постановки диссипативных граничных условий

Соотношения сильного разрыва

научная конференция Декабрьские чтения в Томске 2019

Первые результаты:

Mandel J. Ondes plastiques dans un milieuindéfini à trois dimensions // J. de Mécanique. 1962. V. 1, No. 1. P. 119–141.

Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.

Кукуджанов В.Н. К исследованию уравнений динамики упругопластических сред при конечных деформациях. Нелинейные волны деформаций. Таллин, 1977. Т. 2. С. 102–105.

Дивергентная форма вариационного неравенства для линейного оператора:

$$\tilde U\cdot\Big(A\,\frac{\partial U}{\partial t}-\sum_{i=1}^n B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i}-Q\,U-G\Big)\geqslant\frac12\,\frac{\partial(U\cdot A\,U)}{\partial t}-\frac12\sum_{i=1}^n\frac{\partial(U\cdot B^i\,U)}{\partial x_i}-U\cdot Q\,U-U\cdot G$$

Вариационное неравенство на поверхности ударной волны:

$$\Big(\tilde U-\frac{U^++U^-}{2}\Big)\cdot D\,(U^+-U^-)\geqslant 0\,,\quad U^\pm,\tilde U\in F\quad\Big(D=cA+\sum_{i=1}^n\nu_i\,B^i\Big)\tag{5}$$

Пластические ударные волны

научная конференция Декабрьские чтения в Томске 2019

Условие пластичности Мизеса

$$c_f = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu/3}{\rho}}\,, \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}}\,, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Условие пластичности Треска–Сен-Венана

$$c_f = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu/3}{\rho}}\,, \quad c_t = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}\,, \quad c_q = \sqrt{\frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{4\,\lambda + 3\,\mu}\,\frac{\mu}{\rho}}$$

Линейно упрочняющийся материал (ω – относительный модуль изотропного и кинематического упрочнения)

$$c_f = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu/3 + (\lambda + 2\,\mu)\,\omega}{(1+\omega)\,\rho}}\,, \quad c_\tau = \sqrt{\frac{\mu\,\omega}{(1+\omega)\,\rho}}$$

Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // Прикл. матем. и мех. 1991. Т. 55, № 6. С. 1041–1048.

Садовский В.М. Упругопластические волны сильного разрыва в линейно упрочняющихся средах // Известия РАН: Механика твердого тела. 1997. Т. 32, № 6. С. 104–111.

Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 4. С. 650–663.

Априорные оценки решений

Вариационное неравенство:

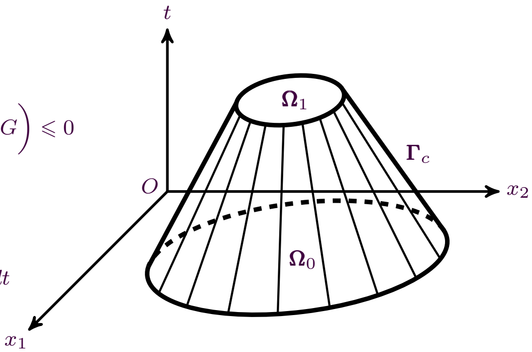
$$(\tilde U - U)\left(A\,\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=0}^{n} B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i} - Q\,U - G\right) \geqslant 0\,, \qquad U,\ \tilde U \in F$$

Неравенство для разности двух решений:

$$(U'-U)\cdot\left(A\,\frac{\partial}{\partial t}(U'-U) - \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial}{\partial x_i}(U'-U) - Q\,(U'-U) - G' + G\right) \leqslant 0$$

Результат интегрирования по объему усеченного конуса – **энергетическая оценка решений:**

$$\left\|U'-U\right\|(t_1) \leqslant \left\|U'-U\right\|(t_0)\,\mathrm{e}^{a(t_1-t_0)} + b\int_{t_0}^{t_1}\left\|G'-G\right\|(t)\,\mathrm{e}^{a(t_1-t)}\,dt$$



Усеченный конус для оценки решений

- *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
- *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

Априорные оценки решений

Неравенство Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \geqslant 0 \qquad \Big(h(t,x) = 0 \ - \ \text{уравнение боковой поверхности}\Big)$$

$H(\nu)$ – наименьший среди m действительных корней $c = H_k(\nu)$ $(k = 1, \ldots, m)$ характеристического уравнения

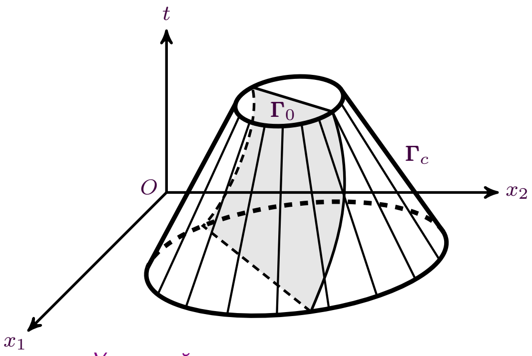
$$\det D(c,\nu) = 0\,, \qquad D(c,\nu) = c\,A + \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, B^i$$

В случае разрывного решения при интегрировании по конусу возникает дополнительный интеграл

$$\iint\limits_{\Gamma_0} \Big[(U' - U)\cdot D\,(U' - U)\Big]\,\frac{d\Gamma}{\sqrt{1+c^2}}$$

Подынтегральное выражение неотрицательно в силу условий сильного разрыва.

Это позволяет получить ту же самую оценку.



Усеченный конус с поверхностью разрыва

Априорные оценки решений

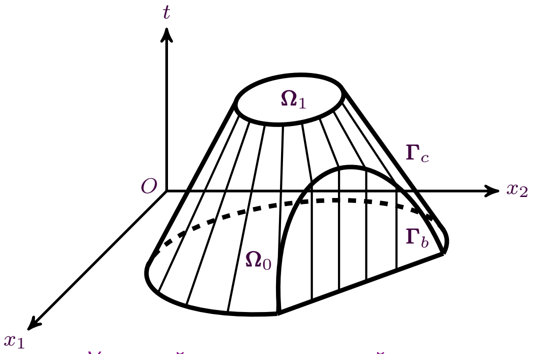
При интегрировании по усеченному конусу, опирающемуся на границу, возникает интеграл:

$$\iint\limits_{\Gamma_b} (U' - U) \cdot \sum_{i=1}^{n} \nu_i \, B^i \, (U' - U) \, \frac{d\Gamma}{\sqrt{1 + c^2}}$$

Диссипативные граничные условия:

$$(U' - U) \cdot \sum_{i=1}^{n} \nu_i \, B^i (U' - U) \leqslant 0$$

- Кинематические граничные условия для скоростей поступательного и вращательного движения
- Динамические условия для векторов напряжений и моментных напряжений на границе
- Условия смешанного типа для скоростей и напряжений (контактная задача)
- Граничные условия контактного взаимодействия с заранее неизвестной зоной контакта без учета трения и с трением Кулона–Амонтона



Усеченный конус, примыкающий к границе

Модель упругопластической сыпучей среды

Вариационное неравенство модели:

$$(\tilde{v} - v) \cdot (\rho\, \dot{v} - \nabla \cdot \sigma - \rho\, g) + (\tilde{\sigma} - \sigma) : (a : \dot{s} - \nabla v) \geqslant 0$$

$$\sigma,\ \tilde{\sigma} \in F\,, \quad \sigma = \pi_K(s)$$

π_K – проектор на конус K с вершиной в нуле (конус состояний сжатия)

Матричная форма вариационного неравенства:

$$(\widetilde{V} - V) \cdot \left(A\, \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^i\, \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \geqslant 0\,, \quad V,\ \tilde{V} \in F$$

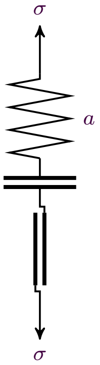
$$V = \pi_K(U)$$

Регуляризация (учет слабого сопротивления среды растяжению):

$$V = \varepsilon\, U + (1 - \varepsilon)\, \pi_K(U) \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{1}{\varepsilon}\, V - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\, \pi_K(V)$$

Производящие потенциалы:

$$\Phi(V) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \Big(V \cdot A\, V - (1 - \varepsilon)\, \pi_K(V) \cdot A\, \pi_K(V) \Big)\,, \quad \Psi_i(V) = \frac{1}{2}\, V \cdot B^i\, V$$



Реологическая схема сыпучей среды

Модель пористой упругопластической среды

Вариационное неравенство модели:

$$(\tilde v - v)\cdot(\rho\,\dot v - \nabla\cdot\sigma - \rho\,g) + (\tilde s - s) : (a : \dot s - \nabla v) + (\tilde q - q) : (b : \dot q - \nabla v) \geqslant 0$$

$$s,\ \tilde s \in F\,, \quad \sigma = s + \pi_K(q)$$

Регуляризация: $\sigma = s + \varepsilon\, q + (1-\varepsilon)\,\pi_K(q)$

$$U = (v,\, s,\, q)\,, \quad V = (v,\, s,\, \pi_k(q))$$

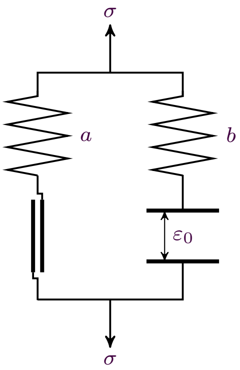
Матричная форма вариационного неравенства:

$$(\tilde V - V)\cdot\Big(A\,\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big) \geqslant 0\,, \quad V,\ \tilde V \in F$$

$$V = \pi_K(U)$$

Производящие потенциалы регуляризованной модели:

$$\Phi(V) = \frac{1}{2\,\varepsilon}\Big(V\cdot A\,V - (1-\varepsilon)\,\pi_K(V)\cdot A\,\pi_K(V)\Big)\,, \quad \Psi_i(V) = \frac{1}{2}\,V\cdot B^i\,V$$



Реологическая схема пористой среды

Оценки гладких решений

Вариационное неравенство для квазилинейного дифференциального оператора

$$\mathcal{D}\langle U\rangle = \frac{\partial\varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_i(U)}{\partial x_i}: \qquad (\tilde U - U)\cdot(\mathcal{D}\langle U\rangle - G(U)) \geqslant 0, \qquad \tilde U,\ U\in F$$

В результате интегрирования неравенства для разности двух решений:

$$(U'-U)\cdot\Big(\mathcal{D}\langle U'\rangle - \mathcal{D}\langle U\rangle\Big) \leqslant (U'-U)\cdot(G'(U') - G(U))$$

по объему усеченного конуса получим оценку

$$\big\|U'-U\big\|(t_1) \leqslant \big\|U'-U\big\|(t_0)\,\mathrm{e}^{a(t_1-t_0)} + b\int\limits_{t_0}^{t_1}\|G'(U') - G(U')\|(t)\,\mathrm{e}^{a(t_1-t)}\,dt\,, \qquad (6)$$

Здесь норма определяется по формуле

$$\|U'-U\|^2(t) = \int\limits_{\Omega(t)}(U'-U)\cdot A(U)\,(U'-U)\,d\Omega$$

- Единственность и непрерывная зависимость решения задачи Коши
- Конечность областей зависимости и влияния решений
- Корректность постановки диссипативных граничных условий

Моделирование сильных разрывов

Декабрьские чтения в Томске 2019

Дивергентная форма вариационного неравенства:

$$\widetilde{U}\cdot\mathcal{D}\langle U\rangle-(\widetilde{U}-U)\cdot G(U)\geqslant\frac{\partial}{\partial t}\Big(U\cdot\varphi(U)-\Phi(U)\Big)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U\cdot\psi_i(U)-\Psi_i(U)\Big)$$

Переход к обобщенной интегральной формулировке дает необходимые условия на поверхности разрыва:

$$\tilde{U}\cdot\big[r(U)\big]\geqslant c\big[U\cdot\varphi(U)-\Phi(U)\big]+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\big[U\cdot\psi_i(U)-\Psi_i(U)\big]\,,\quad r(U)=c\,\varphi(U)+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\,\psi_i(U)$$

После простых преобразований:

$$(\tilde{U}-U^0)\,\big[r(U)\big]\geqslant -d(U)=c\Big(\big[U\big]\cdot\varphi^0(U)-\big[\Phi(U)\big]\Big)+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\Big(\big[U\big]\cdot\psi_i^0(U)-\big[\Psi_i(U)\big]\Big) \tag{7}$$

$U^0=(U^+ + U^-)/2$, величины $\varphi^0(U)$ и $\psi_i^0(U)$ определяются аналогично

В соответствии с принципом Циглера постулируем выполнение более строгого неравенства:

$$(\tilde{U}-U^0)\big[r(U)\big]\geqslant 0\,,\quad U^0,\tilde{U}\in F \tag{8}$$

Волны сдвига в нелинейно упрочняющейся среде

Вариационное неравенство модели:

$$(\tilde v - v)\Big(\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x}\Big) + (\tilde\tau - \tau)\Big(\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big) + (\tilde\theta - \theta)\,\frac{\partial \eta(\theta)}{\partial t} \geqslant 0\,, \quad \tau \leqslant \theta\,, \quad \tilde\tau \leqslant \tilde\theta$$

Производящие потенциалы:

$$\Phi(v,\tau,\theta) = \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 + \frac{1}{2\mu}\,\tau^2 + \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \eta(\theta')\, d\theta'\,, \quad \Psi(v,\tau) = v\,\tau$$

Соотношения сильного разрыва ($c > 0$, $\nu = \pm 1$):

$$\rho\, c\,[v] \pm [\tau] = 0\,, \quad (\tilde\tau - \tau^0)\Big(\frac{c}{\mu}\,[\tau] \pm [v]\Big) + c\,(\tilde\theta - \theta^0)\,[\eta(\theta)] \geqslant 0\,, \quad \tau^{\pm} \leqslant \theta^{\pm}\,, \ \tilde\tau \leqslant \tilde\theta \qquad (9)$$

определяют два типа ударных волн – упругие волны, когда хотя бы одно из неравенств $\tau^{\pm} \leqslant \theta^{\pm}$ строгое:

$$\rho\, c\,[v] \pm [\tau] = 0\,, \quad \frac{c}{\mu}\,[\tau] \pm \mu\,[v] = 0\,, \quad [\eta(\theta)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

и пластические волны, когда $\tau^{\pm} = \theta^{\pm}$:

$$\rho\, c\,[v] \pm [\tau] = 0\,, \quad \frac{c}{\mu}\,[\tau] \pm [v] = -\lambda\,, \quad c\,[\eta(\theta)] = \lambda \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\rho c^2} = \frac{1}{\mu} + \frac{[\eta(\theta)]}{[\tau]}$$

Волны сдвига в нелинейно упрочняющейся среде

Научная конференция Декабрьские чтения в Томске 2019

Дополнительное условие реализуемости пластической волны

$$d(\theta) = \int_{\theta^-}^{\theta^+} \eta(\theta')\, d\theta' - [\theta]\,\eta^0(\theta) \geqslant 0$$

автоматически выполняется в случае выпуклой вниз диаграммы чистого сдвига. В случае выпуклой вверх диаграммы реализуется непрерывное решение системы:

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu}\tau + \eta(\tau)\right) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

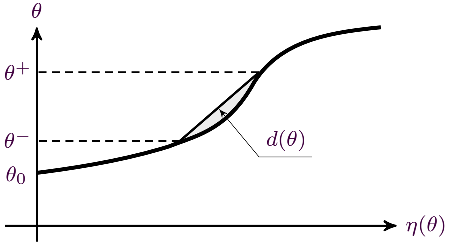
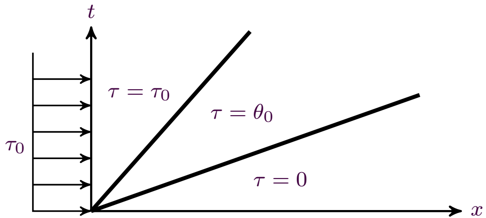
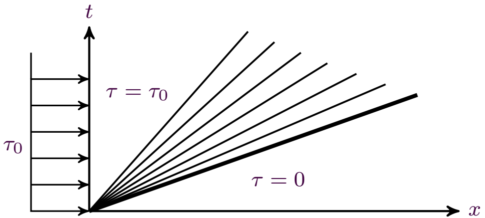


Диаграмма чистого сдвига





Задача о мгновенном приложении нагрузки

Заключение

Методы, основанные на формулировке определяющих соотношений механики упругопластических, сыпучих и пористых сред в виде вариационных неравенств, являются эффективным средством исследования задач, в которых неявно присутствует неизвестная граница (граница, разделяющая зоны упругости и пластичности, или зоны растяжения и сжатия материала), в которых с течением времени может происходить резкая смена состояний. Это относится к анализу вопросов разрешимости задач, построению обобщенных (разрывных) решений и конструированию методов численной реализации моделей.

Спасибо за внимание!