

Топологические универсальные алгебры: симбиоз алгебры и топологии

О. В. Сипачева

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Топологические универсальные алгебры: симбиоз алгебры и топологии

О. В. Сипачева

+

А. А. Солонков

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Пусть A — непустое множество и $n \in \omega$. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$ называется **n -арной операцией**. Для $n = 0$ операция $A^0 = \{\emptyset\} \rightarrow A$ отождествляется с $a \in A$ и называется **константой**.

Универсальная алгебра — множество $A \neq \emptyset$ вместе с произвольным набором операций.

Пример: группа. Операции: 0-арная операция 1 (нейтральный элемент), унарная операция $g \mapsto g^{-1}$, бинарная операция $(g, h) \mapsto g \cdot h$.

Сигнатура — множество Σ (символов операций) вместе с отображением $\nu: \sigma \rightarrow \omega$, которое каждому символу $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие арность.

$\Sigma_n = \nu^{-1}(n)$ — множество символов n -арных операций.

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n.$$

Алгебра сигнатуры Σ — непустое множество A вместе с операциями $\sigma^A: A^n \rightarrow A$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$. Обычно вместо σ^A пишут σ .

Пример: группа — алгебра сигнатуры $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$.

В дальнейшем считаем сигнатуру Σ заданной.

Пусть A — непустое множество и $n \in \omega$. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$ называется **n -арной операцией**. Для $n = 0$ операция $A^0 = \{\emptyset\} \rightarrow A$ отождествляется с $a \in A$ и называется **константой**.

Универсальная алгебра — множество $A \neq \emptyset$ вместе с произвольным набором операций.

Пример: группа. Операции: 0-арная операция 1 (нейтральный элемент), унарная операция $g \mapsto g^{-1}$, бинарная операция $(g, h) \mapsto g \cdot h$.

Сигнатура — множество Σ (символов операций) вместе с отображением $\nu: \sigma \rightarrow \omega$, которое каждому символу $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие арность.

$\Sigma_n = \nu^{-1}(n)$ — множество символов n -арных операций.
 $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$.

Алгебра сигнатуры Σ — непустое множество A вместе с операциями $\sigma^A: A^n \rightarrow A$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$. Обычно вместо σ^A пишут σ .

Пример: группа — алгебра сигнатуры $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$.

В дальнейшем считаем сигнатуру Σ заданной.

Пусть A — непустое множество и $n \in \omega$. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$ называется **n -арной операцией**. Для $n = 0$ операция $A^0 = \{\emptyset\} \rightarrow A$ отождествляется с $a \in A$ и называется **константой**.

Универсальная алгебра — множество $A \neq \emptyset$ вместе с произвольным набором операций.

Пример: группа. Операции: 0-арная операция 1 (нейтральный элемент), унарная операция $g \mapsto g^{-1}$, бинарная операция $(g, h) \mapsto g \cdot h$.

Сигнатура — множество Σ (символов операций) вместе с отображением $\nu: \sigma \rightarrow \omega$, которое каждому символу $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие арность.

$\Sigma_n = \nu^{-1}(n)$ — множество символов n -арных операций.
 $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$.

Алгебра сигнатуры Σ — непустое множество A вместе с операциями $\sigma^A: A^n \rightarrow A$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$. Обычно вместо σ^A пишут σ .

Пример: группа — алгебра сигнатуры $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$.

В дальнейшем считаем сигнатуру Σ заданной.

Пусть A — непустое множество и $n \in \omega$. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$ называется **n -арной операцией**. Для $n = 0$ операция $A^0 = \{\emptyset\} \rightarrow A$ отождествляется с $a \in A$ и называется **константой**.

Универсальная алгебра — множество $A \neq \emptyset$ вместе с произвольным набором операций.

Пример: группа. Операции: 0-арная операция 1 (нейтральный элемент), унарная операция $g \mapsto g^{-1}$, бинарная операция $(g, h) \mapsto g \cdot h$.

Сигнатура — множество Σ (символов операций) вместе с отображением $\nu: \sigma \rightarrow \omega$, которое каждому символу $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие арность.

$\Sigma_n = \nu^{-1}(n)$ — множество символов n -арных операций.
 $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$.

Алгебра сигнатуры Σ — непустое множество A вместе с операциями $\sigma^A: A^n \rightarrow A$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$. Обычно вместо σ^A пишут σ .

Пример: группа — алгебра сигнатуры $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$.

В дальнейшем считаем сигнатуру Σ заданной.

Пусть A — непустое множество и $n \in \omega$. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$ называется **n -арной операцией**. Для $n = 0$ операция $A^0 = \{\emptyset\} \rightarrow A$ отождествляется с $a \in A$ и называется **константой**.

Универсальная алгебра — множество $A \neq \emptyset$ вместе с произвольным набором операций.

Пример: группа. Операции: 0-арная операция 1 (нейтральный элемент), унарная операция $g \mapsto g^{-1}$, бинарная операция $(g, h) \mapsto g \cdot h$.

Сигнатура — множество Σ (символов операций) вместе с отображением $\nu: \sigma \rightarrow \omega$, которое каждому символу $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие арность.

$\Sigma_n = \nu^{-1}(n)$ — множество символов n -арных операций.
 $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$.

Алгебра сигнатуры Σ — непустое множество A вместе с операциями $\sigma^A: A^n \rightarrow A$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$. Обычно вместо σ^A пишут σ .

Пример: группа — алгебра сигнатуры $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$.

В дальнейшем считаем сигнатуру Σ заданной.

Пусть A и B — Σ -алгебры.

Отображение $h: A \rightarrow B$ — **гомоморфизм**, если

$$h(\sigma(x_1, \dots, x_n)) = \sigma(h(x_1), \dots, h(x_n))$$

для всех $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$.

Ядро гомоморфизма:

$$\ker h = \{(x, y) \in A \times A : h(x) = h(y)\}.$$

Это отношение эквивалентности $\sim$ на A , причём

$$x_1 \sim y_1, \dots, x_n \sim y_n \Rightarrow \sigma(x_1, \dots, x_n) \sim \sigma(y_1, \dots, y_n)$$

для $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in \omega$.

Такие отношения называются **конгруэнциями**.

Если $B = h(A)$, то $B \cong A/\sim$ — **факторалгебра**:

$$\sigma([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [\sigma(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}.$$

B является **подалгеброй** алгебры A , если

$$\sigma(b_1, \dots, b_n) \in B \quad \forall n \in \omega, \quad b_1, \dots, b_n \in B, \quad \sigma \in \Sigma_n.$$

Алгебра A **порождена** множеством $X \subset A$, если любая её подалгебра, содержащая X , совпадает с A .

Пусть X — множество (символов переменных), $X \cup \Sigma_0 \neq \emptyset$.

Термы (слова) сигнатуры Σ (Σ -термы):

- $t \in \Sigma_0$;
- $x \in X$;
- $\sigma(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы.

Терм $\equiv$ упорядоченный набор символов из X и Σ .

Глубина терма — число символов операций в его записи.

Для $n \in \omega$ $T_n(X)$ — множество Σ -термов глубины n .

$T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$ — множество всех Σ -термов.

$T(X)$ — Σ -алгебра. Это **абсолютно свободная алгебра** сигнатуры Σ с базой X . Её удобно представить так:

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \cup \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W_n(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\max k_i = n-1} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W(X) &= \bigcup_{n \in \omega} W_n(X). \end{aligned}$$

Для $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_i \in W_{k_i}$ $\sigma(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n)_{\sigma}$.

Пусть X — множество (символов переменных), $X \cup \Sigma_0 \neq \emptyset$.

Термы (слова) сигнатуры Σ (Σ -термы):

- $t \in \Sigma_0$;
- $x \in X$;
- $\sigma(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы.

Терм $\equiv$ упорядоченный набор символов из X и Σ .

Глубина терма — число символов операций в его записи.

Для $n \in \omega$ $T_n(X)$ — множество Σ -термов глубины n .

$T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$ — множество всех Σ -термов.

$T(X)$ — Σ -алгебра. Это **абсолютно свободная алгебра** сигнатуры Σ с базой X . Её удобно представить так:

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \cup \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W_n(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\max k_i = n-1} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W(X) &= \bigcup_{n \in \omega} W_n(X). \end{aligned}$$

Для $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_i \in W_{k_i}$ $\sigma(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n)_{\sigma}$.

Пусть X — множество (символов переменных), $X \cup \Sigma_0 \neq \emptyset$.

Термы (слова) сигнатуры Σ (Σ -термы):

- $t \in \Sigma_0$;
- $x \in X$;
- $\sigma(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы.

Терм $\equiv$ упорядоченный набор символов из X и Σ .

Глубина терма — число символов операций в его записи.

Для $n \in \omega$ $T_n(X)$ — множество Σ -термов глубины n .

$T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$ — множество всех Σ -термов.

$T(X)$ — Σ -алгебра. Это абсолютно свободная алгебра сигнатуры Σ с базой X . Её удобно представить так:

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \cup \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W_n(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\max k_i = n-1} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W(X) &= \bigcup_{n \in \omega} W_n(X). \end{aligned}$$

Для $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_i \in W_{k_i}$ $\sigma(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n)_{\sigma}$.

Пусть X — множество (символов переменных), $X \cup \Sigma_0 \neq \emptyset$.

Термы (слова) сигнатуры Σ (Σ -термы):

- $t \in \Sigma_0$;
- $x \in X$;
- $\sigma(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы.

Терм $\equiv$ упорядоченный набор символов из X и Σ .

Глубина терма — число символов операций в его записи.

Для $n \in \omega$ $T_n(X)$ — множество Σ -термов глубины n .

$T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$ — множество всех Σ -термов.

$T(X)$ — Σ -алгебра. Это **абсолютно свободная алгебра** сигнатуры Σ с базой X . Её удобно представить так:

$$\begin{aligned}
 W_0(X) &= X \cup \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\
 & & \dots & \\
 W_n(X) &= \bigcup_{j>0} \bigcup_{\max k_i = n-1} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\
 & & \dots & \\
 W(X) &= \bigcup_{n \in \omega} W_n(X).
 \end{aligned}$$

Для $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_i \in W_{k_i}$ $\sigma(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n)_{\sigma}$.

Тождество — формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_k (t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)),$$

где t и s — термы. По традиции кванторы опускаются.

Тождество $t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)$ **выполнено в алгебре** A , если оно превращается в верное равенство при подстановке любых элементов алгебры A вместо символов переменных x_i и y_j .

Определение

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр называется **многообразием** Σ -алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — гомоморфизм $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Теорема (Birkhoff)

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр является многообразием $\Leftrightarrow$ существует набор тождеств такой, что $\mathcal{K}$ состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены все тождества из этого набора.

Тождество — формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_k (t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)),$$

где t и s — термы. По традиции кванторы опускаются.

Тождество $t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)$ **выполнено в алгебре** A , если оно превращается в верное равенство при подстановке любых элементов алгебры A вместо символов переменных x_i и y_j .

Определение

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр называется **многообразием** Σ -алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — гомоморфизм $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Теорема (Birkhoff)

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр является многообразием $\Leftrightarrow$ существует набор тождеств такой, что $\mathcal{K}$ состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены все тождества из этого набора.

Тождество — формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_k (t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)),$$

где t и s — термы. По традиции кванторы опускаются.

Тождество $t(x_1, \dots, x_n) = s(y_1, \dots, y_k)$ **выполнено в алгебре** A , если оно превращается в верное равенство при подстановке любых элементов алгебры A вместо символов переменных x_i и y_j .

Определение

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр называется **многообразием** Σ -алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — гомоморфизм $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Теорема (Birkhoff)

Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр является многообразием $\Leftrightarrow$ существует набор тождеств такой, что $\mathcal{K}$ состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены все тождества из этого набора.

Определение

Пусть X — множество, $\mathcal{V}$ — многообразие Σ -алгебр.

Свободной алгеброй над X в $\mathcal{V}$ называется алгебра

$F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ со свойствами:

- X содержится в алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ и порождает её;
- любое отображение из X в любую алгебру $A \in \mathcal{V}$ продолжается до гомоморфизма алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ в A .

Класс $\mathcal{W}$ всех Σ -алгебр — многообразие. Свободная алгебра над X в $\mathcal{W}$ — это $W(X)$. Действительно, пусть A — Σ -алгебра и $f: X \rightarrow A$ — любое отображение. Положим

$$\hat{f}_0(x) = f(x) \text{ для } x \in X, \hat{f}_0(\sigma) = \sigma^A \in A \text{ для } \sigma \in \Sigma_0,$$

$$\hat{f}_n((t_1, \dots, t_j)_{\sigma}) = \sigma(\hat{f}_{k_1}(t_1), \dots, \hat{f}_{k_j}(t_j)) \text{ для } (t_1, \dots, t_j)_{\sigma} \in W_n(X),$$

$$\hat{f} = \bigcup_{n \in \omega} \hat{f}_n.$$

$\hat{f}: W(X) \rightarrow A$ — гомоморфизм.

Определение

Пусть X — множество, $\mathcal{V}$ — многообразие Σ -алгебр.

Свободной алгеброй над X в $\mathcal{V}$ называется алгебра

$F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ со свойствами:

- X содержится в алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ и порождает её;
- любое отображение из X в любую алгебру $A \in \mathcal{V}$ продолжается до гомоморфизма алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ в A .

Класс $\mathcal{W}$ всех Σ -алгебр — многообразие. Свободная алгебра над X в $\mathcal{W}$ — это $W(X)$. Действительно, пусть A — Σ -алгебра и $f: X \rightarrow A$ — любое отображение. Положим

$$\hat{f}_0(x) = f(x) \text{ для } x \in X, \quad \hat{f}_0(\sigma) = \sigma^A \in A \text{ для } \sigma \in \Sigma_0,$$

$$\hat{f}_n((t_1, \dots, t_j)_{\sigma}) = \sigma(\hat{f}_{k_1}(t_1), \dots, \hat{f}_{k_j}(t_j)) \text{ для } (t_1, \dots, t_j)_{\sigma} \in W_n(X),$$

$$\hat{f} = \bigcup_{n \in \omega} \hat{f}_n.$$

$\hat{f}: W(X) \rightarrow A$ — гомоморфизм.

Замечание

Для любого многообразия $\mathcal{V}$ любая алгебра $A \in \mathcal{V}$ является факторалгеброй свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ для некоторого X .

Пусть $\sim_1$ и $\sim_2$ — отношения эквивалентности на множестве X .
Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$:

$$x \sim_1 \circ \sim_2 y \Leftrightarrow \exists z \in X (x \sim_1 z \wedge z \sim_2 y).$$

Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$ является отношением эквивалентности
 $\Leftrightarrow \sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$.

Определение

Многообразие $\mathcal{V}$ называется конгруэнц-перестановочным, если $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$ для любых конгруэнций $\sim_1$ и $\sim_2$ на любой алгебре $A \in \mathcal{V}$.

Замечание

Для любого многообразия $\mathcal{V}$ любая алгебра $A \in \mathcal{V}$ является факторалгеброй свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ для некоторого X .

Пусть $\sim_1$ и $\sim_2$ — отношения эквивалентности на множестве X .

Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$:

$$x \sim_1 \circ \sim_2 y \Leftrightarrow \exists z \in X (x \sim_1 z \wedge z \sim_2 y).$$

Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$ является отношением эквивалентности

$$\Leftrightarrow \sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1.$$

Определение

Многообразие $\mathcal{V}$ называется **конгруэнц-перестановочным**, если $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$ для любых конгруэнций $\sim_1$ и $\sim_2$ на любой алгебре $A \in \mathcal{V}$.

Теорема (А. И. Мальцев)

Многообразие $\mathcal{V}$ Σ -алгебр конгруэнц-перестановочно $\Leftrightarrow$ существует Σ -терм $\mu(x, y, z)$ такой, что в любой алгебре $A \in \mathcal{V}$ выполнены тождества

$$\mu(x, y, y) = x \quad \text{и} \quad \mu(x, x, y) = y. \quad (*)$$

Доказательство

● Положим $X = \{a, b, c\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $\sim_1^X$ ($\sim_2^X$) — отношение эквивалентности на X , которое склеивает a и b (b и c). $\sim_i^X$ продолжается до конгруэнции $\sim_i$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

$a \sim_1 \circ \sim_2 c$, конгруэнции перестановочны $\Rightarrow \exists d \in F_{\mathcal{V}}(X)$:

$a \sim_2 d \sim_1 c$. Имеем $d = \mu(a, b, c) \in T(X)$.

$\sim_1$ — конгруэнция $\Rightarrow \mu(a, b, c) \sim_1 \mu(a, a, c) \Rightarrow a \sim_1 \mu(a, c, c)$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $x, y \in A$. Отображение $f: X \rightarrow A$, определённое правилом $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = y$, продолжается до гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$. Поскольку $\sim_1^X \subset \ker \hat{f}$, имеем $\sim_1 \subset \ker \hat{f}$. Значит,

$$\mu(x, y, y) = \mu(\hat{f}(a), \hat{f}(c), \hat{f}(c)) = \hat{f}(\mu(a, c, c)) = \hat{f}(a) = x$$
 в A . Из аналогичных соображений $\mu(x, x, y) = y$ в A .

Теорема (А. И. Мальцев)

Многообразия $\mathcal{V}$ Σ -алгебр конгруэнц-перестановочно $\Leftrightarrow$ существует Σ -терм $\mu(x, y, z)$ такой, что в любой алгебре $A \in \mathcal{V}$ выполнены тождества

$$\mu(x, y, y) = x \quad \text{и} \quad \mu(x, x, y) = y. \quad (*)$$

Доказательство

☞ Положим $X = \{a, b, c\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $\sim_1^X$ ($\sim_2^X$) — отношение эквивалентности на X , которое склеивает a и b (b и c). $\sim_i^X$ продолжается до конгруэнции $\sim_i$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

$a \sim_1 \circ \sim_2 c$, конгруэнции перестановочны $\Rightarrow \exists d \in F_{\mathcal{V}}(X)$:

$a \sim_2 d \sim_1 c$. Имеем $d = \mu(a, b, c) \in T(X)$.

$\sim_1$ — конгруэнция $\Rightarrow \mu(a, b, c) \sim_1 \mu(a, a, c) \Rightarrow a \sim_1 \mu(a, c, c)$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $x, y \in A$. Отображение $f: X \rightarrow A$, определённое правилом $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = y$, продолжается до гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$. Поскольку $\sim_1^X \subset \ker \hat{f}$, имеем $\sim_1 \subset \ker \hat{f}$. Значит,

$$\mu(x, y, y) = \mu(\hat{f}(a), \hat{f}(c), \hat{f}(c)) = \hat{f}(\mu(a, c, c)) = \hat{f}(a) = x$$
 в A . Из аналогичных соображений $\mu(x, x, y) = y$ в A .

Теорема (А. И. Мальцев)

Многообразия $\mathcal{V}$ Σ -алгебр конгруэнц-перестановочно $\Leftrightarrow$ существует Σ -терм $\mu(x, y, z)$ такой, что в любой алгебре $A \in \mathcal{V}$ выполнены тождества

$$\mu(x, y, y) = x \quad \text{и} \quad \mu(x, x, y) = y. \quad (*)$$

Доказательство

☞ Положим $X = \{a, b, c\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $\sim_1^X$ ($\sim_2^X$) — отношение эквивалентности на X , которое склеивает a и b (b и c). $\sim_i^X$ продолжается до конгруэнции $\sim_i$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

$a \sim_1 \circ \sim_2 c$, конгруэнции перестановочны $\Rightarrow \exists d \in F_{\mathcal{V}}(X)$:

$a \sim_2 d \sim_1 c$. Имеем $d = \mu(a, b, c) \in T(X)$.

$\sim_1$ — конгруэнция $\Rightarrow \mu(a, b, c) \sim_1 \mu(a, a, c) \Rightarrow a \sim_1 \mu(a, c, c)$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $x, y \in A$. Отображение $f: X \rightarrow A$, определённое правилом $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = y$, продолжается до гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$. Поскольку $\sim_1^X \subset \ker \hat{f}$, имеем $\sim_1 \subset \ker \hat{f}$. Значит,

$$\mu(x, y, y) = \mu(\hat{f}(a), \hat{f}(c), \hat{f}(c)) = \hat{f}(\mu(a, c, c)) = \hat{f}(a) = x$$
 в A . Из аналогичных соображений $\mu(x, x, y) = y$ в A .

Теорема (А. И. Мальцев)

Многообразие $\mathcal{V}$ Σ -алгебр конгруэнц-перестановочно $\Leftrightarrow$ существует Σ -терм $\mu(x, y, z)$ такой, что в любой алгебре $A \in \mathcal{V}$ выполнены тождества

$$\mu(x, y, y) = x \quad \text{и} \quad \mu(x, x, y) = y. \quad (*)$$

Доказательство

☞ Положим $X = \{a, b, c\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $\sim_1^X$ ($\sim_2^X$) — отношение эквивалентности на X , которое склеивает a и b (b и c). $\sim_i^X$ продолжается до конгруэнции $\sim_i$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

$a \sim_1 \circ \sim_2 c$, конгруэнции перестановочны $\Rightarrow \exists d \in F_{\mathcal{V}}(X)$:

$a \sim_2 d \sim_1 c$. Имеем $d = \mu(a, b, c) \in T(X)$.

$\sim_1$ — конгруэнция $\Rightarrow \mu(a, b, c) \sim_1 \mu(a, a, c) \Rightarrow a \sim_1 \mu(a, c, c)$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $x, y \in A$. Отображение $f: X \rightarrow A$, определённое правилом $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = y$, продолжается до гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$. Поскольку $\sim_1^X \subset \ker \hat{f}$, имеем $\sim_1 \subset \ker \hat{f}$. Значит,

$$\mu(x, y, y) = \mu(\hat{f}(a), \hat{f}(c), \hat{f}(c)) = \hat{f}(\mu(a, c, c)) = \hat{f}(a) = x$$
 в A . Из аналогичных соображений $\mu(x, x, y) = y$ в A .

➊ Пусть $A \in \mathcal{U}$, $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции на A , $x \sim_1 y \sim_2 z$.
 Тогда $\mu(x, y, z) \sim_1 \mu(x, x, z) = z$ и $\mu(x, y, z) \sim_2 \mu(x, y, y) = x$,
 так что $x \sim_2 \mu(x, y, z) \sim_1 z$. □

Определение

Терм, удовлетворяющий тождествам $(*)$ в данном многообразии, называется **мальцевским термом**. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$, для которой выполнены равенства $(*)$ при любых $x, y, z \in X$, называется **операцией Мальцева**.

Примеры

- ➊ Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.
- ➋ Левая лупа: две бинарные операции $*$ и $\setminus$ и одна 0-арная операция e , тождества:

$$x * (x \setminus y) = y, \quad x \setminus (x * y) = y, \quad x * e = x.$$

Мальцевский терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

- ➌ $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$,
 $\{(x, y, y)\} \subset \Pi_1, \quad \{(x, x, y)\} \subset \Pi_2, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, x)\},$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2. \end{cases}$$

➤ Пусть $A \in \mathcal{U}$, $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции на A , $x \sim_1 y \sim_2 z$.
 Тогда $\mu(x, y, z) \sim_1 \mu(x, x, z) = z$ и $\mu(x, y, z) \sim_2 \mu(x, y, y) = x$,
 так что $x \sim_2 \mu(x, y, z) \sim_1 z$. □

Определение

Терм, удовлетворяющий тождествам $(*)$ в данном многообразии, называется **мальцевским термом**. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$, для которой выполнены равенства $(*)$ при любых $x, y, z \in X$, называется **операцией Мальцева**.

Примеры

- ① Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.
- ② Левая лупа: две бинарные операции $*$ и $\setminus$ и одна 0-арная операция e , тождества:

$$x * (x \setminus y) = y, \quad x \setminus (x * y) = y, \quad x * e = x.$$

Мальцевский терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

- ③ $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$,
 $\{(x, y, y)\} \subset \Pi_1, \quad \{(x, x, y)\} \subset \Pi_2, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, x)\},$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2. \end{cases}$$

➡ Пусть $A \in \mathcal{V}$, $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции на A , $x \sim_1 y \sim_2 z$.
Тогда $\mu(x, y, z) \sim_1 \mu(x, x, z) = z$ и $\mu(x, y, z) \sim_2 \mu(x, y, y) = x$,
так что $x \sim_2 \mu(x, y, z) \sim_1 z$. □

Определение

Терм, удовлетворяющий тождествам $(*)$ в данном многообразии, называется **мальцевским термом**. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$, для которой выполнены равенства $(*)$ при любых $x, y, z \in X$, называется **операцией Мальцева**.

Примеры

① Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.

② Левая лупа: две бинарные операции $*$ и $\setminus$ и одна 0-арная операция e , тождества:

$$x * (x \setminus y) = y, \quad x \setminus (x * y) = y, \quad x * e = x.$$

Мальцевский терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

③ $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$,

$$\{(x, y, y)\} \subset \Pi_1, \quad \{(x, x, y)\} \subset \Pi_2, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, x)\},$$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2. \end{cases}$$

➡ Пусть $A \in \mathcal{V}$, $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции на A , $x \sim_1 y \sim_2 z$.
Тогда $\mu(x, y, z) \sim_1 \mu(x, x, z) = z$ и $\mu(x, y, z) \sim_2 \mu(x, y, y) = x$,
так что $x \sim_2 \mu(x, y, z) \sim_1 z$. □

Определение

Терм, удовлетворяющий тождествам $(*)$ в данном многообразии, называется **мальцевским термом**. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$, для которой выполнены равенства $(*)$ при любых $x, y, z \in X$, называется **операцией Мальцева**.

Примеры

- 1 Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.
- 2 Левая лупа: две бинарные операции $*$ и $\setminus$ и одна 0-арная операция e , тождества:

$$x * (x \setminus y) = y, \quad x \setminus (x * y) = y, \quad x * e = x.$$

Мальцевский терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

- 3 $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$,
 $\{(x, y, y)\} \subset \Pi_1, \quad \{(x, x, y)\} \subset \Pi_2, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, x)\},$
$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2. \end{cases}$$

➡ Пусть $A \in \mathcal{V}$, $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции на A , $x \sim_1 y \sim_2 z$.
Тогда $\mu(x, y, z) \sim_1 \mu(x, x, z) = z$ и $\mu(x, y, z) \sim_2 \mu(x, y, y) = x$,
так что $x \sim_2 \mu(x, y, z) \sim_1 z$. □

Определение

Терм, удовлетворяющий тождествам $(*)$ в данном многообразии, называется **мальцевским термом**. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$, для которой выполнены равенства $(*)$ при любых $x, y, z \in X$, называется **операцией Мальцева**.

Примеры

- 1 Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.
- 2 Левая лупа: две бинарные операции $*$ и $\setminus$ и одна 0-арная операция e , тождества:

$$x * (x \setminus y) = y, \quad x \setminus (x * y) = y, \quad x * e = x.$$

Мальцевский терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

- 3 $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$,
 $\{(x, y, y)\} \subset \Pi_1, \quad \{(x, x, y)\} \subset \Pi_2, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, x)\},$
$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2. \end{cases}$$

Определение

Топологическая универсальная алгебра — это универсальная алгебра с топологией, относительно которой все операции непрерывны.

Определение

Класс $\mathcal{K}$ топологических алгебр называется **многообразием** топологических алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — факторный гомоморфизм и B — топологическая алгебра $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Определение

Полное многообразие топологических алгебр — класс всех топологических универсальных алгебр одной и той же сигнатуры, в которых выполнены все тождества из заданного набора тождеств.

Определение

Топологическая универсальная алгебра — это универсальная алгебра с топологией, относительно которой все операции непрерывны.

Определение

Класс $\mathcal{K}$ топологических алгебр называется **многообразием** топологических алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — факторный гомоморфизм и B — топологическая алгебра $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Определение

Полное многообразие топологических алгебр — класс всех топологических универсальных алгебр одной и той же сигнатуры, в которых выполнены все тождества из заданного набора тождеств.

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр. **Свободной топологической алгеброй** пространства X в многообразии $\mathcal{V}$ называется алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$, удовлетворяющая условиям:

- множество $i_X(X)$ порождает алгебру $F_{\mathcal{V}}(X)$;
- для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V}$ существует непрерывный гомоморфизм $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = \hat{f} \circ i_X$.

Теорема (Мальцев, ...)

В любом многообразии топологических алгебр существует свободная топологическая алгебра любого топологического пространства, причём она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр. **Свободной топологической алгеброй** пространства X в многообразии $\mathcal{V}$ называется алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$, удовлетворяющая условиям:

- множество $i_X(X)$ порождает алгебру $F_{\mathcal{V}}(X)$;
- для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V}$ существует непрерывный гомоморфизм $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = \hat{f} \circ i_X$.

Теорема (Мальцев, ...)

В любом многообразии топологических алгебр существует свободная топологическая алгебра любого топологического пространства, причём она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

Обозначение: для топологической алгебры A через $\bar{A}$ обозначается A без топологии; для многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}$.

Теорема (Walter Taylor)

$\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \bar{A}$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $C \subset A^\omega$, состоящее из всех стабилизирующих последовательностей.

$A \in \mathcal{V} \Rightarrow A^\omega \in \mathcal{V}$. C — подалгебра алгебры $A^\omega \Rightarrow C \in \mathcal{V}$.

Пусть $h: C \rightarrow \bar{A}$ — гомоморфизм, который каждой последовательности из C ставит в соответствие то постоянное значение, которое эта последовательность принимает начиная с некоторого момента. Это гомоморфизм. Он открыт относительно антидискретной топологии на $\bar{A}$. □

Следствие

Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Обозначение: для топологической алгебры A через $\bar{A}$ обозначается A без топологии; для многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}$.

Теорема (Walter Taylor)

$\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \bar{A}$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $C \subset A^\omega$, состоящее из всех стабилизирующих последовательностей. $A \in \mathcal{V} \Rightarrow A^\omega \in \mathcal{V}$. C — подалгебра алгебры $A^\omega \Rightarrow C \in \mathcal{V}$. Пусть $h: C \rightarrow \bar{A}$ — гомоморфизм, который каждой последовательности из C ставит в соответствие то постоянное значение, которое эта последовательность принимает начиная с некоторого момента. Это гомоморфизм. Он открыт относительно антидискретной топологии на $\bar{A}$. □

Следствие

Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Обозначение: для топологической алгебры A через $\bar{A}$ обозначается A без топологии; для многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}$.

Теорема (Walter Taylor)

$\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \bar{A}$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $C \subset A^\omega$, состоящее из всех стабилизирующих последовательностей.

$A \in \mathcal{V} \Rightarrow A^\omega \in \mathcal{V}$. C — подалгебра алгебры $A^\omega \Rightarrow C \in \mathcal{V}$.

Пусть $h: C \rightarrow \bar{A}$ — гомоморфизм, который каждой последовательности из C ставит в соответствие то постоянное значение, которое эта последовательность принимает начиная с некоторого момента. Это гомоморфизм. Он открыт относительно антидискретной топологии на $\bar{A}$. □

Следствие

Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Обозначение: для топологической алгебры A через $\bar{A}$ обозначается A без топологии; для многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}$.

Теорема (Walter Taylor)

$\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \bar{A}$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $C \subset A^\omega$, состоящее из всех стабилизирующих последовательностей.

$A \in \mathcal{V} \Rightarrow A^\omega \in \mathcal{V}$. C — подалгебра алгебры $A^\omega \Rightarrow C \in \mathcal{V}$.

Пусть $h: C \rightarrow \bar{A}$ — гомоморфизм, который каждой последовательности из C ставит в соответствие то постоянное значение, которое эта последовательность принимает начиная с некоторого момента. Это гомоморфизм. Он открыт относительно антидискретной топологии на $\bar{A}$. □

Следствие

Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Следствие

Для любого нетривиального многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ и любого топологического пространства X отображение $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}$ инъективно и алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре множества X .

Можно считать, что X содержится в $F_{\mathcal{V}}(X)$ как множество (но индуцированная на нём из $F_{\mathcal{V}}(X)$ топология может оказаться слабее топологии пространства X).

Предложение

Топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в топологии пространства X .

Следствие

$X \in T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X$ гомеоморфно вложено в $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Хаусдорфово пространство с непрерывной операцией Мальцева не обязано быть регулярным.

Следствие

Для любого нетривиального многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ и любого топологического пространства X отображение $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}$ инъективно и алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре множества X .

Можно считать, что X содержится в $F_{\mathcal{V}}(X)$ как множество (но индуцированная на нём из $F_{\mathcal{V}}(X)$ топология может оказаться слабее топологии пространства X).

Предложение

Топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в топологии пространства X .

Следствие

$X \in T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X$ гомеоморфно вложено в $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Хаусдорфово пространство с непрерывной операцией Мальцева не обязано быть регулярным.

Следствие

Для любого нетривиального многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ и любого топологического пространства X отображение $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}$ инъективно и алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре множества X .

Можно считать, что X содержится в $F_{\mathcal{V}}(X)$ как множество (но индуцированная на нём из $F_{\mathcal{V}}(X)$ топология может оказаться слабее топологии пространства X).

Предложение

Топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в топологии пространства X .

Следствие

$X \in T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X$ гомеоморфно вложено в $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Хаусдорфово пространство с непрерывной операцией Мальцева не обязано быть регулярным.

Следствие

Для любого нетривиального многообразия топологических алгебр $\mathcal{V}$ и любого топологического пространства X отображение $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}$ инъективно и алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре множества X .

Можно считать, что X содержится в $F_{\mathcal{V}}(X)$ как множество (но индуцированная на нём из $F_{\mathcal{V}}(X)$ топология может оказаться слабее топологии пространства X).

Предложение

Топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в топологии пространства X .

Следствие

$X \in T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X$ гомеоморфно вложено в $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Хаусдорфово пространство с непрерывной операцией Мальцева не обязано быть регулярным.

Предложение

$X \in T_0$, на X есть непрерывная операция Мальцева $\Rightarrow X \in T_2$.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $U \subset X$ открыто, $x \in U$ и $y \notin U$. Тогда $\mu(x, y, y) \in U \Rightarrow$ существуют открытые $V \ni x$ и $W \ni y$, для которых $\mu(V \times W \times W) \subset U$. Для $z \in V \cap W$ имеем $(z, z, y) \in V \times W \times W \Rightarrow y = \mu(z, z, y) \in U$. Противоречие. $\square$

Следствие

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр с мальцевским термом. Если $X \in T_0$ и $X \notin T_2$, то $X \notin F_{\mathcal{V}}(X)$.

Конгруэнции $\sim_1$ и $\sim_2$ n -перестановочны, если $\sim_1 \circ \sim_2 \circ \dots = \sim_2 \circ \sim_1 \circ \dots$ (n знаков $\circ$).

Hagemann, Mitchke: Многообразие $\mathcal{V}$ n -перестановочно $\iff$ существуют тернарные производные операции $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$, удовлетворяющие тождествам $\rho_0(x, y, z) = x$, $\dots$, $\rho_i(x, x, y) = \rho_{i+1}(x, y, y)$, $\dots$ $\rho_n(x, y, z) = z$.

Теорема (Coleman, 1997)

Многообразие топологических алгебр $\mathcal{V}$ n -перестановочно для некоторого $n \iff \forall A \in \mathcal{V} \ A \in T_0 \Rightarrow A \in T_1$.

Предложение

$X \in T_0$, на X есть непрерывная операция Мальцева $\Rightarrow X \in T_2$.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $U \subset X$ открыто, $x \in U$ и $y \notin U$. Тогда $\mu(x, y, y) \in U \Rightarrow$ существуют открытые $V \ni x$ и $W \ni y$, для которых $\mu(V \times W \times W) \subset U$. Для $z \in V \cap W$ имеем $(z, z, y) \in V \times W \times W \Rightarrow y = \mu(z, z, y) \in U$. Противоречие. $\square$

Следствие

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр с мальцевским термом. Если $X \in T_0$ и $X \notin T_2$, то $X \notin F_{\mathcal{V}}(X)$.

Конгруэнции $\sim_1$ и $\sim_2$ **n -перестановочны**, если $\sim_1 \circ \sim_2 \circ \dots = \sim_2 \circ \sim_1 \circ \dots$ (n знаков $\circ$).

Hagemann, Mitchke: Многообразие $\mathcal{V}$ n -перестановочно $\iff$ существуют тернарные производные операции $p_0, p_1, \dots, p_n$, удовлетворяющие тождествам $p_0(x, y, z) = x$, $\dots$, $p_i(x, x, y) = p_{i+1}(x, y, y)$, $\dots$ $p_n(x, y, z) = z$.

Теорема (Coleman, 1997)

Многообразие топологических алгебр $\mathcal{V}$ n -перестановочно для некоторого $n \iff \forall A \in \mathcal{V} \ A \in T_0 \Rightarrow A \in T_1$.

Теорема (Keith Kearnes + Luís Sequeira, 2002)

Пусть $\mathcal{P}$ — топологическое свойство, $[\mathcal{P}]$ — «класс» многообразий $\mathcal{V}$ абстрактных алгебр таких, что $\forall A \in \mathcal{V}$ существует согласованная с операциями топология $\mathcal{T}$ на A , для которой $(A, \mathcal{T}) \in \mathcal{P}$. Если свойство $\mathcal{P}$ сохраняется конечными произведениями, а свойство $\neg \mathcal{P}$ сохраняется ультрапроизведениями, то $[\mathcal{P}]$ определяется мальцевскими условиями (существование термов, для которых выполнены данные тождества во всех алгебрах, принадлежащих многообразиям $\mathcal{V}$ из $[\mathcal{P}]$).

Следствие

Существует мальцевское условие, выполнение которого в многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр равносильно тому, что для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ $A \in T_0 \Rightarrow A \in T_2$. То же верно для $A \in T_0 \Rightarrow A \in T_{2\frac{1}{2}}$ и $A \in T_0 \Rightarrow A \in T_3$.

Для T_4 это тоже верно, так как в любом нетривиальном многообразии топологических алгебр есть $A \in T_0$, $A \notin T_4$. Для $T_{3\frac{1}{2}}$ вопрос открыт.

Вопрос: Пусть A — топологическая Σ -алгебра, $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Верно ли, что B — тоже топологическая Σ -алгебра (операции непрерывны)?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$, и пусть $W(\mathbb{Q})$ — абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \oplus \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ &\dots & & \\ W_n(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\max k_j = n-1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ &\dots & & \\ W(X) &= \bigoplus_{n \in \omega} W_n(X) \end{aligned}$$

(Σ_0 снабжено дискретной топологией).

Пусть $F(\mathbb{Q})$ — свободная топологическая группа и $f: \mathbb{Q} \rightarrow F(\mathbb{Q})$ — тождественное вложение. Оно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}: W(\mathbb{Q}) \rightarrow F(\mathbb{Q})$. Если бы топология на $F(\mathbb{Q})$ была факторной, то она была бы топологией индуктивного предела относительно разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n \in \omega} F_n(\mathbb{Q})$, где $F_n(\mathbb{Q})$ — множество всех слов длины $\leq n$. Это не так. Значит, топология группы $F(\mathbb{Q})$ слабее факторной. Но она самая сильная среди всех групповых топологий, относительно которых $\mathbb{Q}$ — подпространство.

Вопрос: Пусть A — топологическая Σ -алгебра, $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Верно ли, что B — тоже топологическая Σ -алгебра (операции непрерывны)?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$, и пусть $W(\mathbb{Q})$ — абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \oplus \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ &\dots & & \\ W_n(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\max k_j = n-1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ &\dots & & \\ W(X) &= \bigoplus_{n \in \omega} W_n(X) \end{aligned}$$

(Σ_0 снабжено дискретной топологией).

Пусть $F(\mathbb{Q})$ — свободная топологическая группа и $f: \mathbb{Q} \rightarrow F(\mathbb{Q})$ — тождественное вложение. Оно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}: W(\mathbb{Q}) \rightarrow F(\mathbb{Q})$. Если бы топология на $F(\mathbb{Q})$ была факторной, то она была бы топологией индуктивного предела относительно разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n \in \omega} F_n(\mathbb{Q})$, где $F_n(\mathbb{Q})$ — множество всех слов длины $\leq n$. Это не так. Значит, топология группы $F(\mathbb{Q})$ слабее факторной. Но она самая сильная среди всех групповых топологий, относительно которых $\mathbb{Q}$ — подпространство.

Вопрос: Пусть A — топологическая Σ -алгебра, $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Верно ли, что B — тоже топологическая Σ -алгебра (операции непрерывны)?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$, и пусть $W(\mathbb{Q})$ — абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \oplus \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)^j_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W_n(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\max k_j = n-1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W(X) &= \bigoplus_{n \in \omega} W_n(X) \end{aligned}$$

(Σ_0 снабжено дискретной топологией).

Пусть $F(\mathbb{Q})$ — свободная топологическая группа и $f: \mathbb{Q} \rightarrow F(\mathbb{Q})$ — тождественное вложение. Оно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}: W(\mathbb{Q}) \rightarrow F(\mathbb{Q})$. Если бы топология на $F(\mathbb{Q})$ была факторной, то она была бы топологией индуктивного предела относительно разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n \in \omega} F_n(\mathbb{Q})$, где $F_n(\mathbb{Q})$ — множество всех слов длины $\leq n$. Это не так. Значит, топология группы $F(\mathbb{Q})$ слабее факторной. Но она самая сильная среди всех групповых топологий, относительно которых $\mathbb{Q}$ — подпространство.

Вопрос: Пусть A — топологическая Σ -алгебра, $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Верно ли, что B — тоже топологическая Σ -алгебра (операции непрерывны)?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \{1, ^{-1}, \cdot\}$, и пусть $W(\mathbb{Q})$ — абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда

$$\begin{aligned} W_0(X) &= X \oplus \Sigma_0 & W_1(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_0(X)_{\sigma}^j \\ & & \dots & \\ W_n(X) &= \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\max k_i = n-1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \\ & & \dots & \\ W(X) &= \bigoplus_{n \in \omega} W_n(X) \end{aligned}$$

(Σ_0 снабжено дискретной топологией).

Пусть $F(\mathbb{Q})$ — свободная топологическая группа и $f: \mathbb{Q} \rightarrow F(\mathbb{Q})$ — тождественное вложение. Оно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}: W(\mathbb{Q}) \rightarrow F(\mathbb{Q})$. Если бы топология на $F(\mathbb{Q})$ была факторной, то она была бы топологией индуктивного предела относительно разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n \in \omega} F_n(\mathbb{Q})$, где $F_n(\mathbb{Q})$ — множество всех слов длины $\leq n$. Это не так. Значит, топология группы $F(\mathbb{Q})$ слабее факторной. Но она самая сильная среди всех групповых топологий, относительно которых $\mathbb{Q}$ — подпространство.

Теорема (Мальцев + Taylor)

Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр. Для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$, любой конгруэнции $\sim$ на A и любого открытого множества $U \subset A$ $\sim$ -насыщение

$$[U]_{\sim} = \{x \in A : \exists u \in U (u \sim x)\}$$

открыто $\iff$ в $\mathcal{V}$ имеется мальцевский терм.

Следствие

Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр с мальцевским термом.

- 1 Если $A \in \mathcal{V}$, $B \in \overline{\mathcal{V}}$ и $h: A \rightarrow B$ — гомоморфизм, то B с фактортопологией — топологическая алгебра (из $\mathcal{V}$).
- 2 Для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции $\sim$ на A определена топологическая факторалгебра $A/\sim$ (и $A/\sim \in \mathcal{V}$).
- 3 Любой факторный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ из $A \in \mathcal{V}$ на $B \in \mathcal{V}$ открыт.

Теорема (Мальцев + Taylor)

Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр. Для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$, любой конгруэнции $\sim$ на A и любого открытого множества $U \subset A$ $\sim$ -насыщение

$$[U]_{\sim} = \{x \in A : \exists u \in U (u \sim x)\}$$

открыто $\iff$ в $\mathcal{V}$ имеется мальцевский терм.

Следствие

Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр с мальцевским термом.

- 1 Если $A \in \mathcal{V}$, $B \in \overline{\mathcal{V}}$ и $h: A \rightarrow B$ — гомоморфизм, то B с фактортопологией — топологическая алгебра (из $\mathcal{V}$).
- 2 Для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции $\sim$ на A определена топологическая факторалгебра $A/\sim$ (и $A/\sim \in \mathcal{V}$).
- 3 Любой факторный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ из $A \in \mathcal{V}$ на $B \in \mathcal{V}$ открыт.

Вопрос: Верно ли, что если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, в котором определены топологические факторалгебры (образ алгебры $A \in \mathcal{V}$ при факторном гомоморфизме всегда является топологической алгеброй), то в $\mathcal{V}$ имеется операция Мальцева?

Ответ: Нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \Sigma_1$, $A \in \mathcal{V}$, $\overline{B} \in \overline{\mathcal{V}}$, $h: A \rightarrow \overline{B}$ — гомоморфизм и B — алгебра $\overline{B}$ с фактортопологией. Для $\sigma \in \Sigma$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

h факторно, σ^A непрерывно $\Rightarrow \sigma^B$ непрерывно.

Теорема

$\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, $\overline{\mathcal{V}}$ регулярно (определяется тождествами с одинаковым набором переменных справа и слева) $\Rightarrow$ для любого X $F_{\mathcal{V}}(X)$ имеет топологию индуктивного предела.

В регулярных многообразиях с $\Sigma \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \neq \emptyset$ непрерывность операций не сохраняется факторными гомоморфизмами.

Вопрос: Верно ли, что если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, в котором определены топологические факторалгебры (образ алгебры $A \in \mathcal{V}$ при факторном гомоморфизме всегда является топологической алгеброй), то в $\mathcal{V}$ имеется операция Мальцева?

Ответ: Нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \Sigma_1$, $A \in \mathcal{V}$, $\overline{B} \in \overline{\mathcal{V}}$, $h: A \rightarrow \overline{B}$ — гомоморфизм и B — алгебра $\overline{B}$ с фактортопологией. Для $\sigma \in \Sigma$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

h факторно, σ^A непрерывно $\Rightarrow \sigma^B$ непрерывно.

Теорема

$\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, $\overline{\mathcal{V}}$ регулярно (определяется тождествами с одинаковым набором переменных справа и слева) $\Rightarrow$ для любого $X \in F_{\mathcal{V}}(X)$ имеет топологию индуктивного предела.

В регулярных многообразиях с $\Sigma \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \neq \emptyset$ непрерывность операций не сохраняется факторными гомоморфизмами.

Вопрос: Верно ли, что если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, в котором определены топологические факторалгебры (образ алгебры $A \in \mathcal{V}$ при факторном гомоморфизме всегда является топологической алгеброй), то в $\mathcal{V}$ имеется операция Мальцева?

Ответ: Нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \Sigma_1$, $A \in \mathcal{V}$, $\overline{B} \in \overline{\mathcal{V}}$, $h: A \rightarrow \overline{B}$ — гомоморфизм и B — алгебра $\overline{B}$ с фактортопологией. Для $\sigma \in \Sigma$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

h факторно, σ^A непрерывно $\Rightarrow \sigma^B$ непрерывно.

Теорема

$\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, $\overline{\mathcal{V}}$ регулярно (определяется тождествами с одинаковым набором переменных справа и слева) $\Rightarrow$ для любого $X \in F_{\mathcal{V}}(X)$ имеет топологию индуктивного предела.

В регулярных многообразиях с $\Sigma \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \neq \emptyset$ непрерывность операций не сохраняется факторными гомоморфизмами.

Вопрос: Верно ли, что если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, в котором определены топологические факторалгебры (образ алгебры $A \in \mathcal{V}$ при факторном гомоморфизме всегда является топологической алгеброй), то в $\mathcal{V}$ имеется операция Мальцева?

Ответ: Нет.

Пример: Пусть $\Sigma = \Sigma_1$, $A \in \mathcal{V}$, $\overline{B} \in \overline{\mathcal{V}}$, $h: A \rightarrow \overline{B}$ — гомоморфизм и B — алгебра $\overline{B}$ с фактортопологией. Для $\sigma \in \Sigma$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

h факторно, σ^A непрерывно $\Rightarrow \sigma^B$ непрерывно.

Теорема

$\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр, $\overline{\mathcal{V}}$ регулярно (определяется тождествами с одинаковым набором переменных справа и слева) $\Rightarrow$ для любого X $F_{\mathcal{V}}(X)$ имеет топологию индуктивного предела.

В регулярных многообразиях с $\Sigma \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \neq \emptyset$ непрерывность операций не сохраняется факторными гомоморфизмами.

Определение

Квазитопологическая универсальная алгебра — это универсальная алгебра с топологией, относительно которой все операции раздельно непрерывны.

Кросс-произведение $X \otimes Y$ — это $X \times Y$ с кросс-топологией: множество $U \subset X \otimes Y$ открыто $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in U$ сечение $U \cap (\{x\} \times Y)$ открыто в $\{x\} \times Y$ и сечение $U \cap (X \times \{y\})$ открыто в $X \times \{y\}$.

Отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно $\Leftrightarrow f: X \otimes Y \rightarrow Z$ непрерывно.

Отображения $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ факторны (непрерывны) $\Leftrightarrow f_1 \otimes f_2: X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ факторно (непрерывно).

Следовательно, раздельная непрерывность операций сохраняется факторными гомоморфизмами:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \dots \otimes A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \otimes \dots \otimes h \downarrow & & \downarrow h \otimes \dots \otimes h \\ B \otimes \dots \otimes B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

Определение

Квазитопологическая универсальная алгебра — это универсальная алгебра с топологией, относительно которой все операции раздельно непрерывны.

Кросс-произведение $X \otimes Y$ — это $X \times Y$ с кросс-топологией: множество $U \subset X \otimes Y$ открыто $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in U$ сечение $U \cap (\{x\} \times Y)$ открыто в $\{x\} \times Y$ и сечение $U \cap (X \times \{y\})$ открыто в $X \times \{y\}$.

Отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно $\Leftrightarrow f: X \otimes Y \rightarrow Z$ непрерывно.

Отображения $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ факторны (непрерывны) $\Leftrightarrow f_1 \otimes f_2: X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ факторно (непрерывно).
Следовательно, раздельная непрерывность операций сохраняется факторными гомоморфизмами:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \dots \otimes A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \otimes \dots \otimes h \downarrow & & \downarrow h \otimes \dots \otimes h \\ B \otimes \dots \otimes B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

Определение

Квазитопологическая универсальная алгебра — это универсальная алгебра с топологией, относительно которой все операции раздельно непрерывны.

Кросс-произведение $X \otimes Y$ — это $X \times Y$ с кросс-топологией: множество $U \subset X \otimes Y$ открыто $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in U$ сечение $U \cap (\{x\} \times Y)$ открыто в $\{x\} \times Y$ и сечение $U \cap (X \times \{y\})$ открыто в $X \times \{y\}$.

Отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно $\Leftrightarrow f: X \otimes Y \rightarrow Z$ непрерывно.

Отображения $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ факторны (непрерывны) $\Leftrightarrow f_1 \otimes f_2: X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ факторно (непрерывно).

Следовательно, раздельная непрерывность операций сохраняется факторными гомоморфизмами:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \cdots \otimes A & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h \otimes \cdots \otimes h \downarrow & & \downarrow h \otimes \cdots \otimes h \\ B \otimes \cdots \otimes B & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

Определение

Класс $\mathcal{K}$ квазитопологических алгебр называется **многообразием** квазитопологических алгебр, если

- $A_\iota \in \mathcal{K}$ для $\iota \in I \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$, B — подалгебра алгебры $A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K}$ и $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — факторный гомоморфизм $\Rightarrow B \in \mathcal{K}$.

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{V}$ — многообразие квазитопологических алгебр. **Свободной квазитопологической алгеброй** пространства X в многообразии $\mathcal{V}$ называется алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$, удовлетворяющая условиям:

- множество $i_X(X)$ порождает алгебру $F_{\mathcal{V}}(X)$;
- для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V}$ существует непрерывный гомоморфизм $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = \hat{f} \circ i_X$.

Теорема (А. А. Солонков)

- 1 В любом многообразии $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр для любого топологического пространства X существует свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$.
- 2 $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ единственна (с точностью до топологического изоморфизма).
- 3 $\overline{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр и $\overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ множества X .
- 4 Если $\mathcal{V}$ нетривиально, то отображение i_X инъективно.
- 5 Любая алгебра $A \in \mathcal{V}$, порождённая подпространством $X \subset A$, является топологической факторалгеброй свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ (и абсолютно свободной квазитопологической алгебры $W^q(X)$).
- 6 Алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ всегда имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \in \omega} F_{\mathcal{V},n}^q(X)$, где $F_{\mathcal{V},n}^q(X) = h(W_n^q(X))$ (здесь $h: W^q(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$ — естественный факторный гомоморфизм).
- 7 Если X тихоновское, то i_X — топологическое вложение.

Теорема (А. А. Солонков)

Любое непустое топологическое пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева является ретрактом квазитопологической группы.

Теорема

Пусть X и Y — непустые топологические пространства с раздельно непрерывными операциями Мальцева μ_X и μ_Y , и пусть $h: X \rightarrow Y$ — факторное отображение со свойством

$$h(\mu_X(x, y, z)) = \mu_Y(h(x), h(y), h(z)) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Тогда h открыто.

Замечание

Композиция раздельно непрерывных операций не всегда раздельно непрерывна. Пример: группа невырожденных вещественных матриц размера 2×2 с топологией, состоящей из дополнений до конечных множеств. Операции $(A, B) \mapsto A \cdot B$ и $A \mapsto A^{-1}$ раздельно непрерывны, $(A, B) \mapsto A^{-1} \cdot B \cdot A$ не раздельно непрерывна ($A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Теорема (А. А. Солонков)

Любое непустое топологическое пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева является ретрактом квазитопологической группы.

Теорема

Пусть X и Y — непустые топологические пространства с раздельно непрерывными операциями Мальцева μ_X и μ_Y , и пусть $h: X \rightarrow Y$ — факторное отображение со свойством

$$h(\mu_X(x, y, z)) = \mu_Y(h(x), h(y), h(z)) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Тогда h открыто.

Замечание

Композиция раздельно непрерывных операций не всегда раздельно непрерывна. Пример: группа невырожденных вещественных матриц размера 2×2 с топологией, состоящей из дополнений до конечных множеств. Операции $(A, B) \mapsto A \cdot B$ и $A \mapsto A^{-1}$ раздельно непрерывны, $(A, B) \mapsto A^{-1} \cdot B \cdot A$ не раздельно непрерывна ($A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Теорема (А. А. Солонков)

Любое непустое топологическое пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева является ретрактом квазитопологической группы.

Теорема

Пусть X и Y — непустые топологические пространства с раздельно непрерывными операциями Мальцева μ_X и μ_Y , и пусть $h: X \rightarrow Y$ — факторное отображение со свойством

$$h(\mu_X(x, y, z)) = \mu_Y(h(x), h(y), h(z)) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Тогда h открыто.

Замечание

Композиция раздельно непрерывных операций не всегда раздельно непрерывна. Пример: группа невырожденных вещественных матриц размера 2×2 с топологией, состоящей из дополнений до конечных множеств. Операции $(A, B) \mapsto A \cdot B$ и $A \mapsto A^{-1}$ раздельно непрерывны, $(A, B) \mapsto A^{-1} \cdot B \cdot A$ не раздельно непрерывна ($A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Общий вопрос 1: При каких условиях композиция отдельно непрерывных отображений отдельно непрерывна?

Общий вопрос 2: При каких условиях на многообразии квазитопологических алгебр всякий факторный гомоморфизм алгебр в этом многообразии открыт?

Общий вопрос 3: Существует ли мальцевское условие на многообразии топологических алгебр, равносильное тому, что топологическая факторалгебра любой топологической алгебры из этого многообразия является топологической алгеброй?

Общий вопрос 4: Существует ли мальцевское условие, описывающее выполнение импликации $T_0 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ в многообразии топологических алгебр?

Общий вопрос 1: При каких условиях композиция отдельно непрерывных отображений отдельно непрерывна?

Общий вопрос 2: При каких условиях на многообразии квазитопологических алгебр всякий факторный гомоморфизм алгебр в этом многообразии открыт?

Общий вопрос 3: Существует ли мальцевское условие на многообразии топологических алгебр, равносильное тому, что топологическая факторалгебра любой топологической алгебры из этого многообразия является топологической алгеброй?

Общий вопрос 4: Существует ли мальцевское условие, описывающее выполнение импликации $T_0 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ в многообразии топологических алгебр?

Общий вопрос 1: При каких условиях композиция отдельно непрерывных отображений отдельно непрерывна?

Общий вопрос 2: При каких условиях на многообразии квазитопологических алгебр всякий факторный гомоморфизм алгебр в этом многообразии открыт?

Общий вопрос 3: Существует ли мальцевское условие на многообразии топологических алгебр, равносильное тому, что топологическая факторалгебра любой топологической алгебры из этого многообразия является топологической алгеброй?

Общий вопрос 4: Существует ли мальцевское условие, описывающее выполнение импликации $T_0 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ в многообразии топологических алгебр?

Общий вопрос 1: При каких условиях композиция отдельно непрерывных отображений отдельно непрерывна?

Общий вопрос 2: При каких условиях на многообразии квазитопологических алгебр всякий факторный гомоморфизм алгебр в этом многообразии открыт?

Общий вопрос 3: Существует ли мальцевское условие на многообразии топологических алгебр, равносильное тому, что топологическая факторалгебра любой топологической алгебры из этого многообразия является топологической алгеброй?

Общий вопрос 4: Существует ли мальцевское условие, описывающее выполнение импликации $T_0 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ в многообразии топологических алгебр?

СПАСИБО