Кольца когомологий римановых многообразий со специальными группами голономий

И.А. Тайманов
(Новосибирск)

"Декабрьские чтения в Томске"
Томск, 14 декабря 2018

Согласно теореме Берже, если односвязное риманово многообразие M не локально симметрично и не является произведением, то его группа голономий принадлежит следующему списку:

- $SO(n) \quad (\dim M = n)$;
- $U(n) \quad (\dim M = 2n,$ кэлерово$)$;
- $SU(n) \quad (\dim M = 2n,$ Калаби–Яо$)$;
- $Sp(n) \quad (\dim M = 4n,$ гиперкэлерово$)$;
- $Sp(n)Sp(1) \quad (\dim M = 4n,$ кватернионно кэлерово$)$;
- $G_2 \quad (\dim M = 7)$;
- $Spin(7) \quad (\dim M = 8)$.

Группы голономий $U(n), SU(n), Sp(n), Sp(n)Sp(1), G_2$ и $Spin(7)$ называются специальными группами голономий.

Многообразия с группами голономий $SU(n), Sp(n), G_2$ и $Spin(7)$ являются **риччи-плоскими**.

Это — единственные известные примеры односвязных риччи-плоских компактных односвязных многообразий.

Явные примеры риччи-плоских метрик на таких многообразиях неизвестны.

Если $\dim M = 7$ *или 8, то* M *допускает нетривиальное параллельное спинорное поле тогда и только тогда, когда его группа голономий есть* G_2 *или* $Spin(7)$*.*

Все известные результаты касаются только существования таких метрик:

теорема Яо (о многообразиях Калаби–Яо, 1977),

теоремы о существовании метрик с G_2- и $Spin(7)$-голономиями на некоторых многообразиях (первые примеры построены Джойсом, 1996).

Односвязное многообразие **формально**, если его минимальная модель (в смысле Сулливана) квазиизоморфна его кольцу рациональных когомологий (как ДГА).

Для формальных многообразий все рациональные высшие гомотопические группы восстанавливаются по рациональному кольцу когомологий.

Многообразие формально, если и только если все его произведения Масси равны нулю (в некотором равномерном смысле).

Кэлеровы многообразия формальны (Делинь–Гриффитс–Морган–Сулливан, 1975).
Симметрические многообразия формальны.

Существуют неформальные односвязные симплектические многообразия (Бабенко–Т., 1998).

Открытый вопрос. *Являются ли многообразия со специальными голономиями формальными?*

Этот вопрос открыт для многообразий с группами голономий $Sp(n)Sp(1)$, G_2 и $Spin(7)$.

Обобщенная конструкция Куммера:

Джойс (1995: T^N/Γ для G_2 и $Spin(7)$, 1999: CY^8/Γ для $Spin(7)$)

Скрученная связная сумма и ее обобщения:

Ковалев (2003), Ковалев–Ли (2011),
Корти–Хаскинс–Нордстрем–Пачини (2015)

Конструкция Куммера:
$T^4/\langle\sigma\rangle, \ \ \sigma : x \to -x, \quad \sigma^2 = 1, \ \ \langle\sigma\rangle = \mathbb{Z}_2.$
16 неподвижных точек инволюции σ задают 16 конических (над $\mathbb{R}P^3$) точек в $T^4/\mathbb{Z}_2$.
Разрешая особенности, мы заменяем эти конуса на расслоения над $\mathbb{C}P^1 = S^2$ со слоями, диффеоморфными двумерному диску.
Каждая копия $\mathbb{C}P^1$ задает двумерный цикл $[z]$ с индексом самопересечения -2:

$$[z] \cap [z] = -2.$$

Проекции двумерных торов приводят к трем копиям $2H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в форме пересечений.
В терминах этих двумерных циклов форма пересечения (над $\mathbb{Q}$) равна

$$\underbrace{(-2) \oplus \cdots \oplus (-2)}_{16} \oplus (2H) \oplus 2H \oplus 2H.$$

Следовательно, сигнатура поверхности Куммера равна -16, а ее второе число Бетти есть $b_2 = 22$.

Милнор (1958):

четная незнакоопределенная унимодулярная форма над $\mathbb{Z}$ однозначно определяется ее рангом r и сигнатурой τ:

$$\left(\frac{-\tau}{8}\right) E_8(-1) \oplus \left(\frac{r+\tau}{2}\right) H,$$

где

$$E_8(-1) = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма пересечения $K3$ поверхности есть

$$E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus H \oplus H \oplus H.$$

Явная конструкция канонического базиса (без использования теории решеток) (Т.,2017).

Для замкнутого ориентированного n-мерного гладкого многообразия X форма пересечения (циклов)

$$H_k(X;\mathbb{Z}) \times H_l(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap} H_{k+l-n}(X;\mathbb{Z})$$

определяется как

$$u \cap v = D^{-1}(Du \cup Dv),$$

где

$$D : H_i(X;\mathbb{Z}) \to H^{n-i}(X;\mathbb{Z}), \quad i = 0, \dots, n,$$

— оператор двойственности Пуанкаре. Кольцо пересечения (Пуанкаре–Лефшец–Понтрягин) двойственно кольцу когомологий.

Если циклы u и v реализованы трансверсально пересекающимися подмногообразиями Y и Z, то их пересечение — это гладкое подмногообразие W, реализующее цикл w такой, что

$$u \cap v = w, \quad u \cap v = (-1)^{(n-k)(n-l)} v \cap u.$$

Пример многообразия Джойса

Рассмотрим на $T^7 = \mathbb{R}^7/\mathbb{Z}^7$ инволюции

$$\alpha((x_1,\dots,x_7)) = (-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,x_5,x_6,x_7),$$

$$\beta((x_1,\dots,x_7)) = (b_1-x_1,b_2-x_2,x_3,x_4,-x_5,-x_6,x_7),$$

$$\gamma((x_1,\dots,x_7)) = (c_1-x_1,x_2,c_3-x_3,x_4,c_5-x_5,x_6,-x_7),$$

которые попарно коммутируют

$$\alpha\beta=\beta\alpha,\quad \alpha\gamma=\gamma\alpha,\quad \beta\gamma=\gamma\beta,$$

и следовательно для всех b_1,b_2,c_1,c_3,c_5 порождают действие $\Gamma=\mathbb{Z}_2^3$ на T^7.

Рассмотрим следующие постоянные, которым отвечает односвязное многообразие M^7:

$$b_1=c_5=0,\quad b_2=c_1=c_3=\frac{1}{2}.$$

- Γ действует на $H^*(T^7)$ инволюциями, $H^1(T^7)$ и $H^2(T^7)$ не содержат нетривиальных инвариантных подпространств, а инвариантное подпространство в $H^3(T^7)$ порождено формами

$$dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6, \quad dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_7, \quad dx_5 \wedge dx_6 \wedge dx_7,$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_7, \quad dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_6,$$
$$dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5, \quad dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5.$$

  Отсюда следует, что

$$b^1(T^7/\Gamma) = b^2(T^7/\Gamma) = 0, \quad b^3(T^7/\Gamma) = 7.$$

  Так как 7-форма $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_7$ является Γ-инвариантной, $* : H^k(T^7) \to H^{7-k}(T^7)$ переводит инвариантные формы в инвариантные и, следовательно,

$$b^6(T^7/\Gamma) = b^5(T^7/\Gamma) = 0, \quad b^4(T^7/\Gamma) = 7.$$

- Действие $\Gamma = \mathbb{Z}_2^3$ не является свободным. Неподвижные точки каждой из инволюций α, β, γ образуют 16 трехмерных торов.

- $\Gamma/\mathbb{Z}_2$ действует нетривиальными перестановками на неподвижных торах инволюций α, β, γ и Γ-орбита каждого такого тора состоит из четырех торов.
- Произведения различных элементарных инволюций, т.е. $\alpha\beta$ и т.д., не имеют неподвижных точек.
- Каждая инволюция α, β, γ такое $\mathbb{Z}_2$-действие на T^7, что

$$T^7/\mathbb{Z}_2 = T^3 \times (T^4/\mathbb{Z}_2),$$

  где $T^4/\mathbb{Z}_2$ — сингулярная поверхность Куммера. Более того $\pi_1(T^7/\Gamma) = 0$.
- Сингулярное множество в T^7/Γ распадается на 12 трехмерных торов. Для каждого сингулярного тора существует окрестность, гомеоморфная

$$U = T^3 \times (D/\langle -1 \rangle),$$

  где $D = \{|z| \leq \tau \ : \ z \in \mathbb{C}^2\}$.
- С топологической точки зрения M^7 получается из T^7/Γ послойным разрешеним сингулярностей в $D/\mathbb{Z}_2$.

- Рациональные группы гомолгий многообразия M^7 имеют следующий вид:

  $b^2 = 12$ и образующие задаются 12 циклами $c_{\delta i}$, которые отвечают подмногообразиям вида $\mathbb{C}P^1$, возникающих при разрешении особенностей;

  $b^3 = 43$ и образующие задаются 7 циклами t_k, заданных торами, отвечающими инвариантным 3-формам на T^7, и 12 семействами произведений $\mathbb{C}P^1$ и образующих 1-циклов в сингулярных торах: $\lambda_{\delta ij}$.

Здесь $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, $k \in \{\alpha, \beta, \gamma, 1, 2, 3, 4\}$.

Теорема.

Группа рациональных гомологий $H_*(M^7;\mathbb{Q})$ имеет следующие образующие размерности $\leq \dim M^7 = 7$:

$$\dim = 2: \quad c_{\delta i}; \quad \dim = 3: \quad c_{\delta ij},\ t_\delta,\ t_i;$$

$$\dim = 4: \quad c'_{\delta ij},\ t'_\delta,\ t'_i; \quad \dim = 5: \quad c'_{\delta i},$$

где $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, 2, 3$. Нетривиальные пересечения образующих имеют вид

$$c_{\delta i} \cap c'_{\delta i} = -2, \quad c_{\delta ij} \cap c'_{\delta ij} = -2, \quad t_\delta \cap t'_\delta = 4, \quad t_i \cap t'_i = 8,$$

$$c'_{\delta i} \cap c'_{\delta i} = -2t_\delta, \quad t'_\delta \cap c'_{\delta i} = 4c_{\delta i}.$$

Замечания.

1) Для описания кольца рациональных когомологий достаточно каждой образующей $a \in H_*, \dim a = k$ сопоставить образующую $\bar{a} \in H^*, \deg \bar{a} = n - k$, и все соотношения вида $a \cap b = c$ заменить на $\bar{a} \cup \bar{b} = \bar{c}$.

2) Аналогично мы можем описать рациональные кольца когомологий других многообразий со специальными голономиями, которые получаются с помощью обобщенной конструкции Куммера.

3) Первая строка в теореме задает спаривание групп H_k и H_{n-k} (двойственность Пуанкаре), которое в терминах данных образущих имеет вид $a \to a'$. Нетривиальные произведения описываются во второй строке.

4) M^7 не имеет нетривиальных произведений Масси, которые в данном случае могут быть только тройными произведениями $\langle a, b, c \rangle$ двумерных циклов.