

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа и теории функций

Компактификация предела обратного спектра некоторых компактификаций натурального ряда

Трунов Н. С.

12 июня 2025 г.

Для классификации банаховых пространств и развития теории инъективных пространств актуальна задача изучения инъективных свойств пространства $C(\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N})$, представимого в разных формах. В частности, оно имеет вид $C(c\mathbb{N})$, где $c\mathbb{N}$ — это некоторая компактификация натурального ряда, и его можно изучать именно с этой точки зрения. В работе в первую очередь рассматриваются компактификации обратных спектров, являющиеся также компактификациями натурального ряда.

Определение 1

Банахово пространство E называется инъективным, если для любого банахова пространства X и любого подпространства $Y \subset X$ любое линейное непрерывное отображение $t: Y \rightarrow E$ продолжается до линейного непрерывного отображения $T: X \rightarrow E$. Если всегда существует такое продолжение T , что $\|T\| \leq \lambda \|t\|$ для некоторой константы $\lambda > 0$, то пространство E называется λ -инъективным.

Определение 2

Если в определении 1 пространство X сепарабельно, то пространство E называется сепарабельно инъективным.

Определение 3

Если в определении 1 пространство Y сепарабельно, то пространство E называется универсально сепарабельно инъективным.

Предложение 1

Пусть A и B — банаховы пространства, причем $B \subset A$ — дополняемое подпространство. Тогда если пространство A обладает какой-либо инъективностью (инъективность, сепарабельная инъективность, универсальная сепарабельная инъективность), то и его подпространство B обладает этим свойством.

Определение 4

X — топологическое пространство, Y — хаусдорфов компакт, $c: X \rightarrow Y$ — гомеоморфное вложение, причем $\overline{c(X)} = Y$. Тогда Y называется компактификацией пространства X и обозначается cX .

$c_1X \geq c_2X \iff$ существует непрерывное отображение $f: c_1X \rightarrow c_2X$ такое, что $f \circ c_1 = c_2$.

Среди всех компактификаций пространства X существует наибольшая компактификация. Она называется компактификацией Чеха–Стоуна и обозначается βX .

У всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow K$ в некоторый компакт K есть непрерывное продолжение на βX .

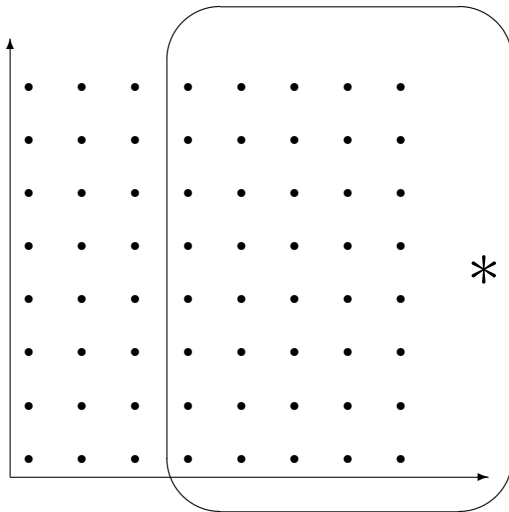
Определение 5

$P = \{A_i, f_i^j\}$ — обратный спектр, если $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность пространств и $\{f_i^j\}_{j \geq i}$ — такой набор непрерывных отображений $f_i^j: A_j \rightarrow A_i$ для всех $j \geq i$, что при $a \geq b \geq c$ $f_c^a = f_c^b \circ f_b^a$.

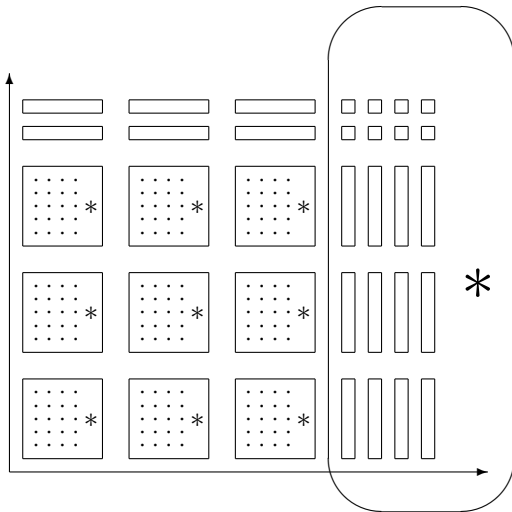
Предел обратного спектра P — это подпространство тихоновского произведения пространств спектра, состоящее из всех точек

$\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ таких, что $f_i^j(x_j) = x_i$ для всех $j \geq i$. Он обозначается $\varprojlim P$.

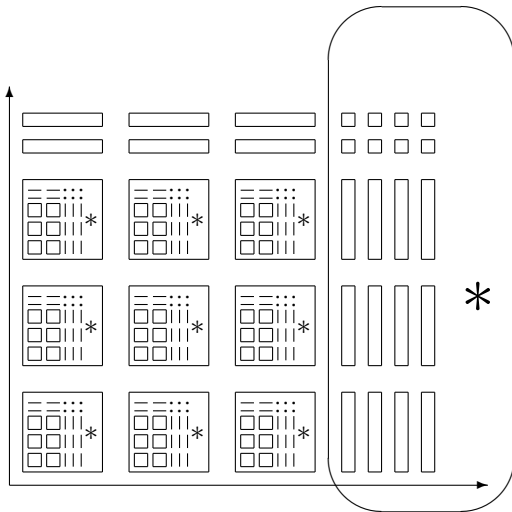
Мы будем работать с последовательностью пространств A_i , где $i \in \mathbb{N}$.
Зададим пространства A_i по индукции. Для каждого пространства
натуральный ряд $\mathbb{N}$ является всюду плотным подпространством.



A_1



A_2



A_i

Предложение 1

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует такое непрерывное отображение $f_i^{i+1}: A_{i+1} \rightarrow A_i$, что $f_i^{i+1}|_{\mathbb{N}^{2(i+1)}}$ — это биекция на $\mathbb{N}^{2i}$.

Построенные отображения f_i^{i+1} позволяют рассмотреть обратную последовательность $P = \{A_i, f_i^j\}$ из пространств A_i . Здесь $f_i^j = f_{j-1}^j \circ f_{j-2}^{j-1} \circ \dots \circ f_i^{i+1}$ для $j > i$.

Кроме того, поскольку пространства A_i тихоновские, можно рассмотреть обратную последовательность $\tilde{P} = \{\beta A_i, \tilde{f}_i^j\}$. Здесь $\tilde{f}_i^j: \beta A_j \rightarrow \beta A_i$ — это непрерывное продолжение отображения f_i^{i+1} , существующая по свойствам компактификации Чеха–Стоуна.

Вложив $\mathbb{N}$ в любое из пространств A_i биекцией на $\mathbb{N}^{2i}$ и согласовав вложения $\mathbb{N}$ во все остальные пространства A_i с помощью отображений f_i^{i+1} , можно рассматривать пространства A_i , а вместе с ними и $\varprojlim \tilde{P}$ и $\beta \varprojlim P$ как компактификации $\mathbb{N}$.

Возникает вопрос о соотношении $\varprojlim \tilde{P}$, $\beta \varprojlim P$ и $\beta \mathbb{N}$ как компактификаций $\varprojlim P$ и $\mathbb{N}$ и как пространств. Легко получить, что $\varprojlim \tilde{P} \leq \beta \varprojlim P \leq \beta \mathbb{N}$.

Теорема 1

$\varprojlim \tilde{P} \neq \beta \varprojlim P$ как компактификации $\varprojlim P$.

Идея доказательства заключается в нахождении в $\varprojlim P$ двух замкнутых непересекающихся множеств A и B , чьи замыкания в $\beta \varprojlim P$ не пересекаются, однако замыкания в $\varprojlim \tilde{P}$ пересекаются.

Следствие 1

$\varprojlim \tilde{P} \neq \beta \varprojlim P$ как компактификации $\mathbb{N}$.

Для доказательства используется отображение $f: \varprojlim P \rightarrow \mathbb{R}$, которое имеет продолжение $\tilde{f}: \beta \varprojlim P \rightarrow \mathbb{R}$, но не продолжается на $\varprojlim \tilde{P}$. Это отображение существует по теореме 1 и свойствам компактификации Чеха–Стоуна.

Следствие 2

$$\varprojlim \tilde{P} \not\cong \beta \varprojlim P.$$

Доказательство заключается в использовании частных свойств рассматриваемых пространств.

Определение

Пусть $P = \{A_i, f_i^{i+1}, \mathbb{N}\}$ — обратный спектр. Пусть $S = \{B_k, g_k^{k+1}, \mathbb{N}\}$ — тоже обратный спектр, где $B_k = A_{i_k}$, для некоторого $i_k \in \mathbb{N}$, а

$$g_k^{k+1} = \begin{cases} f_{i_k}^{i_{k+1}} & \text{при } i_{k+1} \geq i_k, \\ \text{id}_{A_{i_{k+1}}} & \text{при } i_{k+1} < i_k, \end{cases} \quad (1)$$

где $\text{id}_{A_{i_{k+1}}}$ — это тождественное отображение $A_{i_{k+1}}$ на копию $A_{i_{k+1}}$ внутри A_{i_k} с номерами 1 в соответствующих копиях (первая копия $A_{i_{k+1}}$ внутри первой копии $A_{i_{k+1}+1}$ внутри ... первой копии A_{i_k-1} внутри A_{i_k}). Отображения $\text{id}_{A_{i_{k+1}}} : A_{i_{k+1}} \rightarrow A_{i_k}$, конечно, не сюръективны, но являются гомеоморфными вложениями $A_{i_{k+1}}$.

Теорема 2

Предел $\lim_{\leftarrow} S$ может быть трех видов. Чтобы его определить, нужно посчитать последовательность номеров $j_k = i_{k+1} - i_k$.

1. Если $|\{j_k; j_k > 0, k \in \mathbb{N}\}| < \aleph_0$, то $\lim_{\leftarrow} S = A_i$, где $i = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{i_k; k > n\}$;
2. Если $|\{j_k; j_k > 0, k \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$ и $|\{j_k; j_k < 0, k \in \mathbb{N}\}| < \aleph_0$, то $\lim_{\leftarrow} S = \lim_{\leftarrow} P$;
3. Если $|\{j_k; j_k > 0, k \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$ и $|\{j_k; j_k < 0, k \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$, то $\lim_{\leftarrow} S = \{1, *_{s_1}\}$.

Здесь под 1 понимается такая точка $x \in \prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$, что $\text{loc}_{i_k}(x_k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (точка 1 из $\lim_{\leftarrow} P$ обладает теми же свойствами), а под $*_{s_1}$ понимается такая точка $x \in \prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$, что $x_k = *_{t_1 i_{k-1}}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (точка $*_{s_1}$ из $\lim_{\leftarrow} P$ обладает теми же свойствами).

Спасибо за внимание!

Список использованной литературы

- (1) Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг ; пер. с англ. М. Я. Антоновского и А. В. Архангельского. — М. : Мир, 1986. — 751 с.

Апробация

- (1) Международная научная конференции «Геометрия и топология трехмерных многообразий», 17-21 сентября 2022 г., Сочи, Сириус
- (2) Всероссийская молодежная научная конференция студентов «Все грани математики и механики», 21-24 мая 2024 г., г. Томск, ТГУ
- (3) Международная научная конференция «Актуальные проблемы современной геометрии и топологии», приуроченная к 70-летию профессора Нарманова Абдигаппара Якубовича, 27-29 октября, 2024 г., г. Ташкент, Республика Узбекистан