

О ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ТОПОЛОГИЕЙ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ НА ПЛОТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ.

Т. Е. Хмылева, С. Л. Парамонов

Томский Государственный Университет

13.06.2025 г.

Определения и обозначения

K, S - хаусдорфовы компакты $C(K)$ - банахово пространство непрерывных вещественнозначных функций на компакте K с нормой $\|x\| = \sup\{|x(k)| : k \in K\}$

$C_p(K)$ - пространство непрерывных вещественнозначных функций на K с топологией поточечной сходимости.

Если $A \subset K$ и $\bar{A} = K$, то через $C_{p(A)}(K)$ будем понимать пространство непрерывных вещественнозначных функций, в котором база окрестностей функции x_0 задается множествами вида $u(x_0, k_1, \dots, k_n, \varepsilon) = \{x \in C(K) : |x(k_i) - x_0(k_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$, где $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ и $k_i \in A$ для всех $i \leq n$.

Такие пространства рассматривались, например, в работе T.Dobrowolski, W. Marciszewski «Classification of function spaces with the pointwise topology determined by a countable dense set» Fund. math. 148(1995). В этой работе применяется обозначение $C_A(K)$ для счетных всюду плотных подмножеств $A \subset K$

Вопрос: при каких всюду плотных подмножества A и B в компакте K пространства $C_{p(A)}(K)$ и $C_{p(B)}(K)$ являются линейно гомеоморфными

Например: пространства c и c_0 , рассматриваемые как подпространства в произведении $\mathbb{R}^\omega$, не являются линейно гомеоморфными, хотя эти пространства в нормированной топологии изоморфны

Основной результат

Теорема

Если $n = m$, то пространства $C_{p(A)}[a, b]$ и $C_{p(B)}[c, d]$ являются линейно гомеоморфными.

Теорема

Пусть K, S – хаусдорфовы компакты, $A = K \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ и $B = S \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ – плотные подмножества в K, S соответственно, $n \neq m$ и для любого $j \leq n$ характер точек b_j счетен. Тогда пространства $C_{p(A)}(K)$ и $C_{p(B)}(S)$ не являются линейно гомеоморфными.

Используемые факты

Для доказательства нам потребуются следующие факты: непрерывные линейные функционалы на $C_p(K)$ имеют вид $f = \alpha_1 \delta_{k_1} + \dots + \alpha_n \delta_{k_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $\delta_{k_i}(x) = x(k_i)$ для всех $i \leq n$. На пространстве $C_{p(A)}(K)$ непрерывными будут те и только те функционалы, для которых множество $\{k_1, \dots, k_n\} \subset A$.

Рассмотрим теперь банахово пространство $C(K)$ и его сопряженное $C^*(K)$, с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$. Известно, что существует изометрический изоморфизм Φ_K пространства $C^*(K)$ на пространство $M(K)$ всех регулярных счетно аддитивных борелевских мер на K , такой, что для любой меры $\mu \in M(K)$, $(\Phi_K \mu)(x) = \int_K x d\mu$ для всех $x \in C(K)$ и $\|\Phi_K \mu\| = |\mu|$, где $|\mu|$ — это вариация меры μ на компакте K . Функционал $\Phi_K \mu$ будем обозначать F_μ .

Доказательство

Предположим что существует линейный гомеоморфизм $T : C_{p(A)}(K) \longrightarrow C_{p(B)}(S)$. Обозначим через $\Gamma(T)$ график отображения T . Так как T непрерывно, $\Gamma(T)$ – замкнутое линейное подпространство в $C_{p(A)}(K) \times C_{p(B)}(S)$. Поскольку топология пространства $C(K) \times C(S)$ сильнее, чем топология пространства $C_{p(A)}(K) \times C_{p(B)}(S)$, получаем, что $\Gamma(T)$ – замкнутое линейное подпространство в $C(K) \times C(S)$.

По теореме о замкнутом графике для банаховых пространств отображение $T : C(K) \longrightarrow C(S)$ также линейный гомеоморфизм. Отсюда следует, что и сопряженный оператор $T^* : C^*(S) \longrightarrow C^*(K)$, действующий по формуле $T^*(F) = F \circ T$, является – линейным гомеоморфизмом.

Доказательство

Для всех $j = 1, \dots, n$ функционалы $\delta_{b_j} \in C^*(S)$. Нетрудно видеть, что $\delta_{b_j} = \Phi_S \mu_{b_j}$, где $\mu_{b_j} \in M(S)$ и $\mu_{b_j}(V) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j \in V \\ 0, & \text{если } b_j \notin V \end{cases}$ для любого борелевского подмножества $V \subset S$. Рассмотрим отображение $U = \Phi_K^{-1} \circ T^* \circ \Phi_S : M(Y) \longrightarrow M(X)$. Положим $d_{ji} = (U\mu_{b_j})\{a_i\}$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и рассмотрим векторы $d_j = (d_{j1}, \dots, d_{jm}) \in \mathbb{R}^m$. Поскольку $n > m$, найдутся числа $c_j \in \mathbb{R}$, такие, что $c_1 d_1 + \dots + c_n d_n = 0$, но $c_{j_0} \neq 0$ для некоторого $j_0 \leq n$. Для счетной базы окрестностей $\{V_r(b_{j_0})\}_{r=1}^\infty$ определим функции $y_r \in C(S)$, для которых $y_r(b_{j_0}) = 1$, $y_r(S \setminus V_r(b_{j_0})) \subset \{0\}$ и $\|y_r\| = 1$. Ясно, что в пространстве $C_{p(B)}(S) \lim_{r \rightarrow \infty} y_r = 0$, где 0 – функция, тождественно равная нулю на S .

Доказательство

Так как T - линейный гомеоморфизм, то и

$\lim_{r \rightarrow \infty} T^{-1}y_r = \mathbf{0} \in C_{p(A)}(K)$. Это означает, что $\lim_{r \rightarrow \infty} (T^{-1}y_r)(t) = 0$ для

всех $t \in K \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$. В пространстве $M(K)$ рассмотрим меру

$\mu = c_1 U\mu_{b_1} + \dots + c_n U\mu_{b_n}$. Так как

$\mu\{a_i\} = c_1 (U\mu_{b_1})\{a_i\} + \dots + c_n (U\mu_{b_n})\{a_i\} = c_1 d_{1i} + \dots + c_n d_{ni} = 0$,

то $\mu\{a_1, \dots, a_n\} = 0$. Следовательно, последовательность $\{T^{-1}y_r\}_{r=1}^{\infty}$

μ -почти всюду сходится к нулевой функции и $\|T^{-1}y_r\| \leq \|T^{-1}\|$. По

теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\Phi_K \mu)(T^{-1}y_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} F_\mu(T^{-1}y_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_K T^{-1}y_r d\mu = 0 \quad (1)$$

Доказательство

Но с другой стороны, $\Phi_K \mu = \Phi_K \left(\sum_{j=1}^n c_j U \mu_{b_j} \right) =$

$$\sum_{j=1}^n c_j \Phi_K (U \mu_{b_j}) = \sum_{j=1}^n c_j T^* (\Phi_S \mu_{b_j}) = \sum_{j=1}^n c_j T^* (\delta_{b_j}) = \sum_{j=1}^n c_j (\delta_{b_j} \circ T).$$

Отсюда

$$(\Phi_K \mu) (T^{-1} y_r) = \sum_{j=1}^n c_j (\delta_{b_j} \circ T) (T^{-1} y_r) = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{b_j} (y_r) = c_{j_0} \neq 0 \text{ для}$$

всех $r \in \mathbb{N}$, что противоречит равенству (1). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы □

Следствия

В частном случае для пространств $K = S = [a, b]$ условие $m = n$ является необходимым и достаточным для существования линейного гомеоморфизма $T : C_{p(A)}(K) \longrightarrow C_{p(B)}(S)$.

Следуя обозначениям А.В. Архангельского в книге «Топологические пространства функций», для плотного подпространства $A \subset K$ обозначим через $C_p(A | X)$ подпространство в $C_p(A)$ таких функций, которые имеют непрерывное продолжение на X . Нетрудно видеть, что отображение сужения $\pi_A : C_p(A) \longrightarrow C_p(A | X)$ является линейным гомеоморфизмом. В частности, для $X = [a, b]$ и $A = (a, b)$ пространство $C_p(A | X)$ – это пространство равномерно непрерывных функций на (a, b) с топологией поточечной сходимости.

Следствие

Если $X = [a, b]$, $A = (a, b)$ и $B = [a, b]$, то пространства $C_p(A | X)$ и $C_p(B | X)$ не являются линейно гомеоморфными.

Следствия

Обозначим через c банахово пространство сходящихся числовых последовательностей с нормой $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$, а через $c_0 \subset c$ – подпространство сходящихся к нулю последовательностей. Хорошо известно, что пространство c_0 линейно гомеоморфно c , а пространство c линейно гомеоморфно своей конечной степени, то есть $c \sim c_0$ и $c \sim c^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если же мы рассматриваем пространство c как подпространство в тихоновском произведении вещественных прямых $\prod_{\aleph_0} \mathbb{R}$, то $c = C_p(A) [1, \omega]$, где $A = [1, \omega)$ и ω – первый бесконечный ординал. Для подпространства $c_0 \subset \prod_{\aleph_0} \mathbb{R}$, нетрудно показать, что $c_0 \sim C_p [1, \omega]$. Отсюда и из теоремы 1 получаем

Следствие

Если $c_0 \subset c \subset \prod_{\aleph_0} \mathbb{R}$, то пространства c^n , c^m при $n \neq m$, а также c_0 и c , не являются линейно гомеоморфными.

Случай локально компактных пространств

Пусть теперь K и S локально компактные метризуемые пространства. В этом случае мы используем теорему о замкнутом графике для пространств Фреше. Пространство $C_c(K)$ и $C_c(S)$ определенное на локально компактном метризуемом пространстве S и наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах является пространством Фреше если $w(S) \leq \aleph_0$.

Случай локально компактных пространств

Теорема

Пусть K, S – метризуемые локально компактные пространства со счетной базой, $A = K \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ и $B = S \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ – плотные подмножества в K, S соответственно и $n \neq m$. Тогда пространства $C_{p(A)}(K)$ и $C_{p(B)}(S)$ не являются линейно гомеоморфными.

Спасибо за внимание!