

Концепция свободной интерполяции  
для больших данных:  
как простой формулой увеличить  
точность ответа в 100 раз

С.П.Царев  
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

Декабрьские чтения - 2018, Томск

13.12.2018

# План доклада

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью?*

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- 2 Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??



- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- 2 Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- 3 Основная проблема работы с большими данными

- 1 Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- 2 Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- 3 Основная проблема работы с большими данными:  
их — слишком мало . . .

# Как делать выводы из данных, которых мало?

Семинары: Ю. И. Журавлев, Ю. И. Журавлев

www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option\_lang=rus&presentid=26

Часто посещаемые Начальная страница Комбинаторная логика... Список радиостанции... LaTeX Tables - Wikib... LaTeX Tables Editor Computer Algebra Se... Подстановки в регуля... Использование регу...

- Ближайшие семинары
- Календарь семинаров
- Список семинаров
- Архив по годам
- Регистрация семинара

Общественный семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук  
27 декабря 2007 г. 16:00, г. Москва, конференц-зал МИАН (ул. Губкина, 8)

Математические методы прогнозирования и распознавания на базе неполной, частично противоречивой, разнородной информации

Ю. И. Журавлев

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, г. Москва

Видеозаписи:

|               |          |
|---------------|----------|
| Windows Media | 331.2 Mb |
| Flash Video   | 321.9 Mb |
| MP4           | 321.9 Mb |

Количество просмотров:  
Эта страница: 4429  
Видеофайлы: 1678  
Youtube Video: 9433

Для просмотра файлов Вам могут потребоваться

- Windows Media
- RealPlayer
- Get Adobe Reader
- Get ADOBE FLASH PLAYER

YouTube

Материалы подготовлены в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

© Фотогалерея

- Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- Основная проблема работы с большими данными:  
их — слишком мало . . .

- Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- Основная проблема работы с большими данными:  
их — слишком мало . . .
- Методологические аспекты

- Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- Основная проблема работы с большими данными:  
их — слишком мало . . .
- Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»).

- Простейший пример работы методики свободной интерполяции: интерполяция траекторий спутников GLONASS и GPS.  
В чем трудность расчета орбит *с нужной точностью*?  
По каким данным можно рассчитать орбиты?  
Классическая Лагранжева интерполяция, сравнение точности.  
Нелинейная свободная интерполяция. Двухточечная интерполяция.
- Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем полином??
- Основная проблема работы с большими данными:  
их — слишком мало . . .
- Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»).
- Обобщения идеи свободной интерполяции: модели сплошных сред.

# Объект исследования: траектории НКА ГЛОНАСС и GPS



- *Номинальные траектории GPS*: Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km

- *Номинальные траектории GPS*: Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС*: Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km

- *Номинальные траектории GPS:* Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС:* Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально:* орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).

Т а б л и ц а 10.1

Влияние различных факторов на движение НИСЗ

| Возмущающие факторы           | Максимальное возмущающее ускорение, м/с <sup>2</sup> | Максимальное возмущение за 1 <sup>ч</sup> , м |
|-------------------------------|--|---|
| Центральное поле Земли        | $5,65 \cdot 10^{-1}$                                 | —   |
| Вторая зональная гармоника    | $5,3 \cdot 10^{-6}$                                  | 300   |
| Гравитация Луны               | $5,5 \cdot 10^{-6}$                                  | 40  |
| Гравитация Солнца             | $3 \cdot 10^{-6}$                                    | 20  |
| Четвертая зональная гармоника | $10^{-7}$  | 0,6   |
| Солнечная радиация            | $10^{-7}$  | 0,6   |
| Гравитационные аномалии       | $10^{-8}$  | 0,06  |
| Другие силы                   | $10^{-8}$  | 0,06  |

- *Номинальные траектории GPS:* Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС:* Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально:* орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).

- *Номинальные траектории GPS*: Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС*: Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально*: орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).
- В каком виде доступна стандартная *точная* информация о реальных орбитах? Какова точность?

- *Номинальные траектории GPS:* Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС:* Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально:* орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).
- В каком виде доступна стандартная *точная* информация о реальных орбитах? Какова точность?
- *Формат «точных» данных:* SP3-файлы для всех НКА GPS и ГЛОНАСС на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени;

- *Номинальные траектории GPS*: Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС*: Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально*: орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).
- В каком виде доступна стандартная *точная* информация о реальных орбитах? Какова точность?
- *Формат «точных» данных*: SP3-файлы для всех НКА GPS и ГЛОНАСС на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени; заявляемая точность (СКО):  $\sim 3$  см;



- *Номинальные траектории GPS:* Круговые орбиты с периодом обращения  $1/2$  звездных суток ( $\sim 11$  ч. 58 м.),  $55^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 26.600$  km
- *Номинальные траектории ГЛОНАСС:* Круговые орбиты с периодом обращения ( $\sim 11$  ч. 15 м.),  $65^\circ$  наклона к экватору и радиусом  $\sim 25.800$  km
- *Реально:* орбиты имеют меняющийся эксцентриситет, НКА испытывает воздействие множества различных сил  $\implies$  отклонения от окружности имеют порядок нескольких километров (десятков километров).
- В каком виде доступна стандартная *точная* информация о реальных орбитах? Какова точность?
- *Формат «точных» данных:* SP3-файлы для всех НКА GPS и ГЛОНАСС на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени; заявляемая точность (СКО):  $\sim 3$  см;
- **Не является ли точность  $\sim 3$  см излишней?**

## GPS surveying with 1 mm precision using corrections for atmospheric slant path delay

Chris Alber, Randolph Ware, Christian Rocken, Fredrick Solheim

University Navstar Consortium/University Corporation for Atmospheric Research

**Abstract.** Multipath and atmospheric effects can limit GPS surveying precision. We surveyed a 43 km baseline using large diameter choke ring antennas to reduce multipath and pointed radiometer and barometric data to correct for atmospheric slant delay. Based on 11 daily solutions, atmospheric slant delay corrections improved vertical precision to 1.2 mm rms and horizontal precision to sub-mm. Applications for high precision GPS surveying include deformation monitoring associated with earthquake and volcanic processes, subsidence, isostasy, and sea level measurements; monitoring of atmospheric water vapor for climate and global change research, and to improve the resolution of synthetic aperture radar; calibration of satellite altimeters;

### Experiment Description

We observed with GPS, radiometers, and barometers from sites at Platteville and Table Mountain, Colorado, during fall 1995 and spring 1996. The sites are relatively free from obstructions above 10° elevation and are separated by 43 km. We used Trimble™ SSI GPS receivers and standard 35 cm diameter TurboRogue™ choke ring antennas augmented with 85 cm diameter choke ring collars (Figure 1) mounted on pillars of reinforced concrete.

---

solutions.

| Date | Vertical precision (mm rms) | Improvement factor | Baseline length (km) | Number of solution days |
|------|-----------------------------|--------------------|----------------------|-------------------------|
| 1983 | 12                          | 3                  | 22                   | 3                       |
| 1992 | 2.6                         | 2                  | 47                   | 19                      |
| 1995 | 5                           | 2                  | 850                  | 5                       |
| 1996 | 1.2                         | 5                  | 43                   | 11                      |

The other experiments listed in Table 3 used Radiometrics WVR-1100s and observed 18 or more GPS satellites. The 1992 experiment used Trimble SST receivers and antennas and required a 20 hr minimum for daily solutions [Ware *et al.*, 1993]. *Rocken et al.* [1993] identified ground reflected multipath in this experiment as the dominant source of error

Beutler, G., E. Brockman, S. Frankhauser, W. Gurtner, J. Johnson, L. Mervart, M. Rothacher, S. Schaer, T. Springer, and R. Weber, Bernese GPS Software Version 4.0, Univ. Berne, September, 1996.

Davis, J., G. Elgered, A. Niell, and C. Kuehn, Ground-based measurement of gradients in the "wet" radio refractivity of air, *Rad. Sci.*, 28, 1003-1018, 1993.

Dixon, T., An Introduction to the Global Positioning System and some geological applications, *Rev. Geophys.*, 29, 249-276, 1991.

Genrich, J., and Y. Bock, Rapid Resolution of Crustal Motion at Short Ranges With the Global Positioning System, *J. Geophys. Res.*, 97, 3261-3269, 1992.

Herring, T., The Global Positioning System, *Sci. Am.*, 44-50, Feb., 1996.

Ichikawa, R., M. Kasahara, N. Mannoji, I. Naito, Positioning Error in GPS Measurements due to Atmospheric Excess Path Delay Estimated from Three-Dimensional, Numerical Prediction Model Data, *J. of the Geodetic Society of Japan*, 42, 3, 183-204, 1996.

Johnson, H. and D. Agnew, Monument motion and measurements of

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

Аналогичные формулы - для тригонометрической и пр. интерполяции.

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

Аналогичные формулы - для тригонометрической и пр. интерполяции.

**Свободная интерполяция:**

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

Аналогичные формулы - для тригонометрической и пр. интерполяции.

**Свободная интерполяция: не фиксируется вид  $\alpha_i(\hat{t})$ :**

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad (2)$$

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

Аналогичные формулы - для тригонометрической и пр. интерполяции.

**Свободная интерполяция: не фиксируется вид  $\alpha_i(\hat{t})$ :**

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad (2)$$

Как же найти  $\alpha_i(\hat{t})$ , если их вид — «произвольный»?



$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad \alpha_i(\hat{t}) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k} \quad (1)$$

где  $t_i$  — точки, в которых заданы значения  $f(t_i)$ ,  
 $\hat{t}$  — «целевая точка».

Аналогичные формулы - для тригонометрической и пр. интерполяции.

**Свободная интерполяция: не фиксируется вид  $\alpha_i(\hat{t})$ :**

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\alpha_i(\hat{t}), \quad (2)$$

Как же найти  $\alpha_i(\hat{t})$ , если их вид — «произвольный»?

Простой трюк: фиксировать  $\hat{t}$ !

## Определение

**Шаблон интерполяции:** *фиксируем на временной оси*

## Определение

**Шаблон интерполяции:** *фиксируем на временной оси*

- *$N$  последовательных SPЗ-моментов  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с 15-минутным временным шагом;*

## Определение

**Шаблон интерполяции:** *фиксируем на временной оси*

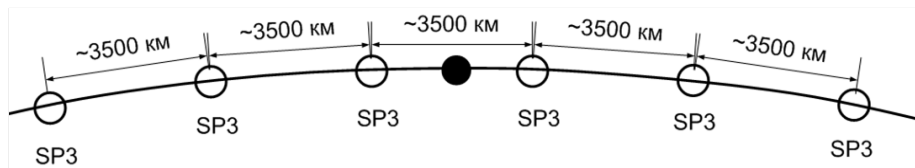
- *$N$  последовательных SP3-моментов  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с 15-минутным временным шагом;*
- *положение целевой точки  $\hat{t}$  относительно моментов  $t_i$ .*

# Как фиксировать $\hat{t}$ : вводим «шаблон интерполяции»

## Определение

**Шаблон интерполяции:** фиксируем на временной оси

- $N$  последовательных SP3-моментов  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с 15-минутным временным шагом;
- положение целевой точки  $\hat{t}$  относительно моментов  $t_i$ .

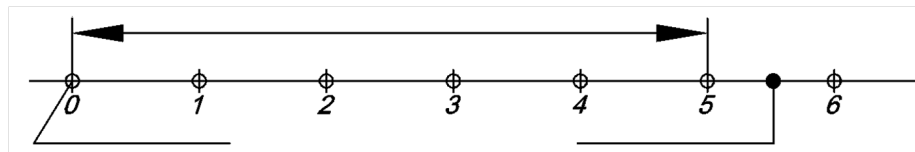
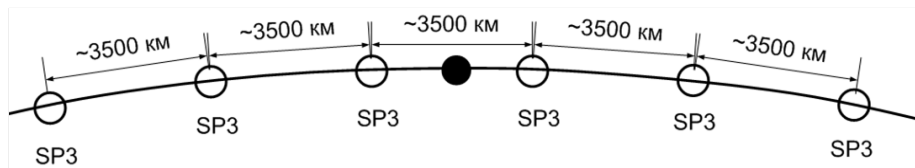


# Как фиксировать $\hat{t}$ : вводим «шаблон интерполяции»

## Определение

**Шаблон интерполяции:** фиксируем на временной оси

- $N$  последовательных SP3-моментов  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с 15-минутным временным шагом;
- положение целевой точки  $\hat{t}$  относительно моментов  $t_i$ .

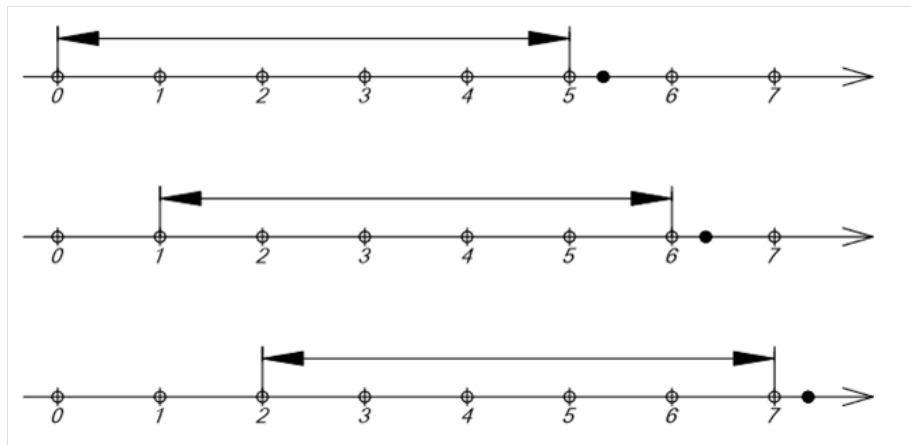


## Следующий шаг: сдвиг шаблона вдоль оси времени

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i),$$

# Следующий шаг: сдвиг шаблона вдоль оси времени

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i),$$





Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i), \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}), \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}). \end{array} \right.$$

Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i), \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}), \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}). \end{array} \right.$$

**Замечание.**

Для того, чтобы найти  $\alpha_j$ , необходимо (на этапе «обучения») уже иметь достаточный набор известных значений  $f(\hat{t}_s)$ !

Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i) + \varepsilon_1, \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}) + \varepsilon_s, \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}) + \varepsilon_K. \end{array} \right.$$

**Замечание.**

Для того, чтобы найти  $\alpha_j$ , необходимо (на этапе «обучения») уже иметь достаточный набор известных значений  $f(\hat{t}_s)$ !

Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i) + \varepsilon_1, \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}) + \varepsilon_s, \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}) + \varepsilon_K. \end{array} \right.$$

**Замечание.**

Для того, чтобы найти  $\alpha_j$ , необходимо (на этапе «обучения») уже иметь достаточный набор известных значений  $f(\hat{t}_s)$ !

Т.е. метод свободной интерполяции предполагает два этапа:

Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i) + \varepsilon_1, \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}) + \varepsilon_s, \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}) + \varepsilon_K. \end{array} \right.$$

### Замечание.

Для того, чтобы найти  $\alpha_j$ , необходимо (на этапе «обучения») уже иметь достаточный набор известных значений  $f(\hat{t}_s)$ !

Т.е. метод свободной интерполяции предполагает два этапа:

- Этап «обучения», на котором надо иметь достаточно большой набор готовых траекторий — они дадут набор констант  $\alpha_j$ .

Следующий шаг: формирование системы уравнений для  $\alpha_j$  (решается МНК)

$$\begin{cases} f(\hat{t}_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i) + \varepsilon_1, \\ \dots \\ f(\hat{t}_s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+s-1}) + \varepsilon_s, \\ \dots \\ f(\hat{t}_K) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_{i+K-1}) + \varepsilon_K. \end{cases}$$

### Замечание.

Для того, чтобы найти  $\alpha_j$ , необходимо (на этапе «обучения») уже иметь достаточный набор известных значений  $f(\hat{t}_s)$ !

Т.е. метод свободной интерполяции предполагает два этапа:

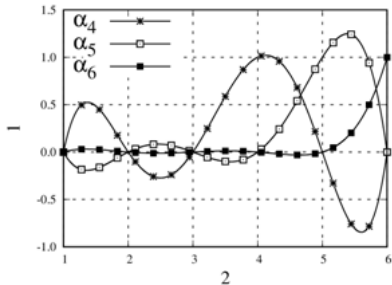
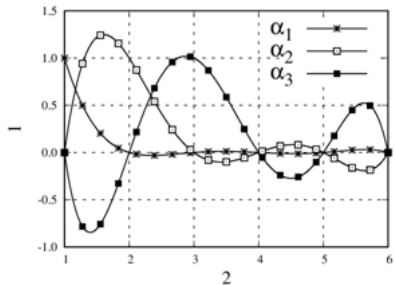
- Этап «обучения», на котором надо иметь достаточно большой набор готовых траекторий — они дадут набор констант  $\alpha_j$ .
- «Пользовательский» этап, на котором не надо иметь готовые траектории, достаточно иметь найденные  $\alpha_j$  и SP3-точки.

## Зависимость $\alpha_i$ от целевой точки $\hat{t}$

Следующий шаг: «разморозка»  $\hat{t}$ .

# Зависимость $\alpha_i$ от целевой точки $\hat{t}$

Следующий шаг: «разморозка»  $\hat{t}$ .





# Сравнение точности Лагранжевой и свободной интерполяции

|         | $N$      | Л. и., СКО (мм) | св. и., СКО (мм) |
|---------|----------|-----------------|------------------|
| GPS     | $N = 6$  | 979.97          | 3.49             |
| GLONASS | $N = 6$  | 1642.11         | 1.35             |
| GPS     | $N = 8$  | 8.67            | 1.11             |
| GLONASS | $N = 8$  | 15.08           | 0.69             |
| GPS     | $N = 10$ | 0.99            |                  |
| GLONASS | $N = 10$ | 0.70            |                  |

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i),$$

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i),$$

заменяем на

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i))$$

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f(t_i),$$

заменяем на

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i))$$

и затем на

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots$$

где  $w_s$  — объединение наборов  $x(t_i)$ ,  $y(t_i)$ ,  $z(t_i)$ .

# Нелинейная свободная интерполяция и экстраполяция, результаты экспериментов

| $N$ | deg | интерп. СКО (мм) | экстр. на 15 мин., СКО (мм) |
|-----|-----|------------------|-----------------------------|
| 2   | 1   | 35150            | 279693                      |
| 2   | 3   | 119              | 951                         |
| 2   | 4   | 89               | 713                         |
| 3   | 1   | 2821             | 44669                       |
| 3   | 2   | 1173             | 18649                       |
| 3   | 3   | 3                | 49                          |
| 4   | 1   | 33               | 8550                        |
| 4   | 2   | 7                | 1850                        |
| 4   | 3   | 0,1              | 4                           |

# Двухточечная интерполяция с лунно-солнечными ускорениями

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

где  $J_s$  — лунно-солнечные ускорения на момент  $\hat{t}$ .

# Двухточечная интерполяция с лунно-солнечными ускорениями

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

где  $J_s$  — лунно-солнечные ускорения на момент  $\hat{t}$ .

| deg | Без ЛСУ, СКО (мм) | с ЛСУ, СКО (мм) |
|-----|-------------------|-----------------|
| 3   | 119               | 16              |
| 4   | 89                | 3,7             |
| 5   | 54                | 2               |

# Двухточечная интерполяция с лунно-солнечными ускорениями

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

где  $J_s$  — лунно-солнечные ускорения на момент  $\hat{t}$ .

| deg | Без ЛСУ, СКО (мм) | с ЛСУ, СКО (мм) |
|-----|-------------------|-----------------|
| 3   | 119               | 16              |
| 4   | 89                | 3,7             |
| 5   | 54                | 2               |

**Замечание.** Аналогично по двум SP3-точкам можно находить скорости НКА с точностью 0.001 мм/сек (т.е. 10 десятичных знаков)



Проблема нелинейной свободной интерполяции:  
зачем **ПОЛИНОМ** по  $w_p$ ??

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

# Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем **полином** по $w_p$ ??

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

В самой концепции свободной интерполяции нет необходимости брать только полиномы по значениям интерполируемой функции в заданных точках  $t_j$ !

# Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем **полином** по $w_p$ ??

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

В самой концепции свободной интерполяции нет необходимости брать только полиномы по значениям интерполируемой функции в заданных точках  $t_j$ !

Как избавиться от этого ограничения?

# Проблема нелинейной свободной интерполяции: зачем **полином** по $w_p$ ??

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x(t_i) + \beta_i \cdot y(t_i) + \gamma_i \cdot z(t_i)) + \sum_{p \leq q} \kappa_{pq} \cdot w_p w_q + \dots \\ + \rho_x J_x(\hat{t}) + \rho_y J_y(\hat{t}) + \rho_z J_z(\hat{t}) + \varepsilon$$

В самой концепции свободной интерполяции нет необходимости брать только полиномы по значениям интерполируемой функции в заданных точках  $t_j$ !

Как избавиться от этого ограничения? .

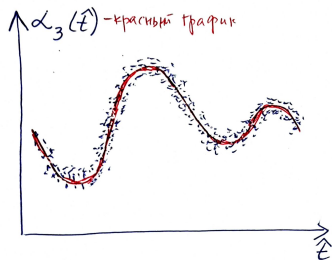
Например, взять

$$x(\hat{t}) = F(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \quad ?$$

Давайте попробуем найти  $F(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  обучением на наших «больших данных»!

Давайте попробуем найти  $F(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  обучением на наших «больших данных»!

Мотивирующий пример:



Количество точек:

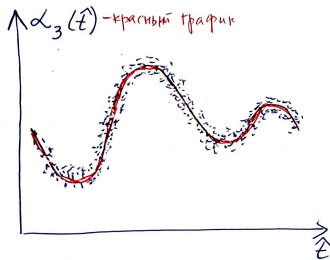
более 1.000.000

Точность  $\alpha_i(\hat{t})$ :

12 десятичных знаков!

Давайте попробуем найти  $F(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  обучением на наших «больших данных»!

Мотивирующий пример:



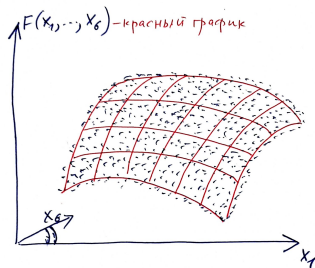
Количество точек:

более 1.000.000

Точность  $\alpha_i(t)$ :

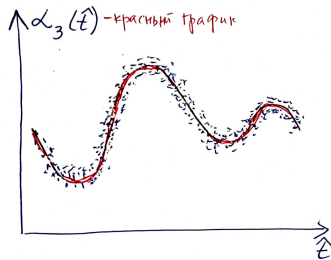
12 десятичных знаков!

Попытка обобщения:



Давайте попробуем найти  $F(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  обучением на наших «больших данных»!

Мотивирующий пример:



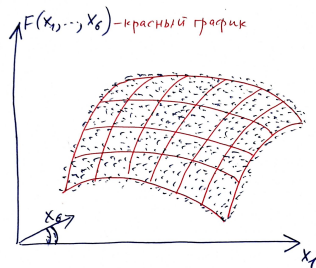
Количество точек:

более 1.000.000

Точность  $\alpha_i(t)$ :

12 десятичных знаков!

Попытка обобщения:



А достаточно ли теперь  
1.000.000 точек??



# Основная проблема работы с реальными большими данными

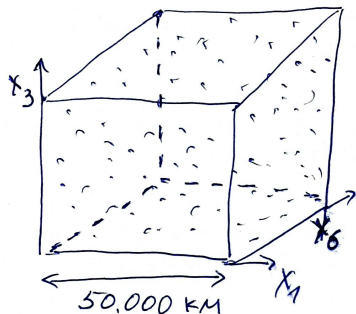
# Основная проблема работы с реальными большими данными

Их — слишком мало!

# Основная проблема работы с реальными большими данными

## Их — слишком мало!

Какое среднее расстояние между двумя из 1.000.000 точек в 6-мерном кубе со стороной 50.000 км?

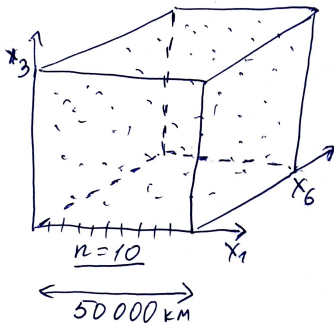
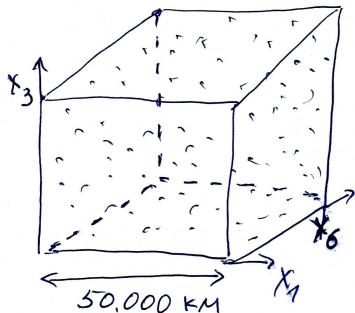


# Основная проблема работы с реальными большими данными

## Их — слишком мало!

Какое среднее расстояние между двумя из 1.000.000 точек в 6-мерном кубе со стороной 50.000 км?

Ответ: от 5.000 км до 10.000 км:

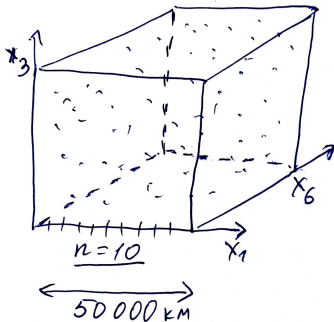
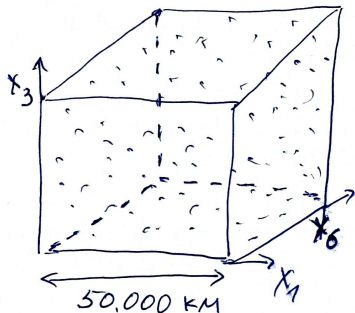


# Основная проблема работы с реальными большими данными

## Их — слишком мало!

Какое среднее расстояние между двумя из 1.000.000 точек в 6-мерном кубе со стороной 50.000 км?

Ответ: от 5.000 км до 10.000 км:



Для справки:  $50.000^6 > 10^{28}$ .

# Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»)

## Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»)

Пусть даны  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Как называется  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  ?

## Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»)

Пусть даны  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Как называется  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  ?

Пусть дана матрица  $A = (a_{ij})$ .

Как называется  $A^t \cdot A$  ?



## Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»)

Пусть даны  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Как называется  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  ?

Пусть дана матрица  $A = (a_{ij})$ .

Как называется  $A^t \cdot A$  ?

В нашем случае: можно ли назвать формулу свободной (линейной) интерполяции «линейной регрессией», а нелинейную свободную интерполяцию — нелинейной регрессией?

## Методологические аспекты (Викторина «Назови формулу»)

Пусть даны  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Как называется  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  ?

Пусть дана матрица  $A = (a_{ij})$ .

Как называется  $A^t \cdot A$  ?

В нашем случае: можно ли назвать формулу свободной (линейной) интерполяции «линейной регрессией», а нелинейную свободную интерполяцию — нелинейной регрессией?

По моему мнению, **нет**, т.к. траектории НКА нельзя интерпретировать как случайные процессы.



A. Pustoshilov, S. Tsarev,  
*Universal Coefficients for Precise Interpolation of GNSS Orbits from Final IGS SP3 Data*, International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017,  
<http://ieeexplore.ieee.org/document/7998463/>



Пустошилов, А. С.П. Царев,  
*Высокоточное восстановление орбит спутников ГНСС методом обучения по расширенным SP3-данным*, Успехи совр. радиоэлектроники. 2017. No 12. с. 48-52.



А.С. Пустошилов, Ю.Ю. Ушаков, С.П. Царев  
*Двухточечная свободная нелинейная интерполяция координат и скоростей навигационных спутников по SP3-данным*, Успехи совр. радиоэлектроники. 2018. No 12.



S. Tsarev, V. Denisenko, M. Valikhanov,  
*Multidimensional Free Interpolation Framework for High-precision Modeling of Slant Total Electron Contents in Mid-latitude and Equatorial Regions*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2018, v.11(6), p.781–791.



М.М. Валиханов, В.В. Денисенко, С.П. Царев  
*Высокоточная модель ионосферной задержки сигналов ГНСС на основе многомерной свободной интерполяции*, Успехи совр. радиоэлектроники, 2018, No 12.