

Дискретные ортогональные многочлены: нахождение аномалий временных рядов и граничные эффекты полиномиальных фильтров

С.П.Царев, А.А.Кытманов, W.Auzinger

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
TU Wien, Austria

Декабрьские чтения в Томске 2019

13.12.2019

План доклада

План доклада

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными.

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными. Важный пример: разрывы и скачки в «официальных» траекториях спутников GPS и ГЛОНАСС.

План доклада

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными. Важный пример: разрывы и скачки в «официальных» траекториях спутников GPS и ГЛОНАСС.
- 2 Методика нахождения аномальных значений – формально стандартна: удаление полиномиальных трендов (методом наименьших квадратов, МНК).

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными. Важный пример: разрывы и скачки в «официальных» траекториях спутников GPS и ГЛОНАСС.
- 2 Методика нахождения аномальных значений – формально стандартна: удаление полиномиальных трендов (методом наименьших квадратов, МНК).
- 3 Проблемы:
 - неустойчивость обычных алгоритмов МНК-приближения полиномами высоких степеней \iff неустойчивость алгоритмов построения дискретных ортогональных полиномов (ДОП) *высоких степеней*;

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными. Важный пример: разрывы и скачки в «официальных» траекториях спутников GPS и ГЛОНАСС.
- 2 Методика нахождения аномальных значений – формально стандартна: удаление полиномиальных трендов (методом наименьших квадратов, МНК).
- 3 Проблемы:
 - неустойчивость обычных алгоритмов МНК-приближения полиномами высоких степеней \iff неустойчивость алгоритмов построения дискретных ортогональных полиномов (ДОП) *высоких степеней*;
 - *граничные эффекты (ранее не отмеченные): быстрое затухание ДОП высоких степеней вблизи границы интервала.*

- 1 Прикладная мотивировка: анализ аномальных значений временных рядов с быстро меняющимися гладкими данными. Важный пример: разрывы и скачки в «официальных» траекториях спутников GPS и ГЛОНАСС.
- 2 Методика нахождения аномальных значений – формально стандартна: удаление полиномиальных трендов (методом наименьших квадратов, МНК).
- 3 Проблемы:
 - неустойчивость обычных алгоритмов МНК-приближения полиномами высоких степеней \iff неустойчивость алгоритмов построения дискретных ортогональных полиномов (ДОП) *высоких степеней*;
 - *граничные эффекты (ранее не отмеченные): быстрое затухание ДОП высоких степеней вблизи границы интервала.*

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

Новые результаты:

- 1 ДОП: резкое затухание на решетке вблизи границы;

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

Новые результаты:

- 1 ДОП: резкое затухание на решетке вблизи границы;
- 2 ДОП: огромные значения между точками решетки (вблизи границы);

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

Новые результаты:

- 1 ДОП: резкое затухание на решетке вблизи границы;
- 2 ДОП: огромные значения между точками решетки (вблизи границы);
- 3 ДОП: близость корней к точкам решетки (вблизи границы).

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

Новые результаты:

- 1 ДОП: резкое затухание на решетке вблизи границы;
- 2 ДОП: огромные значения между точками решетки (вблизи границы);
- 3 ДОП: близость корней к точкам решетки (вблизи границы).
- 4 **Общее следствие:** потеря чувствительности *произвольных* стабильных линейных полиномиальных фильтров вблизи границы!
- 5 Проблемы адекватной интерполяции вблизи границы интервала.

План доклада 2

Непрерывные ортогональные полиномы и ДОП:
больше различий, чем сходства для больших степеней!

Новые результаты:

- 1 ДОП: резкое затухание на решетке вблизи границы;
- 2 ДОП: огромные значения между точками решетки (вблизи границы);
- 3 ДОП: близость корней к точкам решетки (вблизи границы).
- 4 **Общее следствие:** потеря чувствительности произвольных стабильных линейных полиномиальных фильтров вблизи границы!
- 5 Проблемы адекватной интерполяции вблизи границы интервала.

Чувствительность полиномиального фильтра *внутри интервала приближения* позволяет обнаруживать аномалии с амплитудой порядка 10^{-11} относительно типичных значений исходных данных.

Предлагаемые IGS (International GNSS Service) final GPS Satellite Ephemerides (финальные орбиты):

- **формат:** координаты для всех НКА GPS и ГЛОНАСС в текстовом формате на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени (~ 3500 км между точками!);

Предлагаемые IGS (International GNSS Service) final GPS Satellite Ephemerides (финальные орбиты):

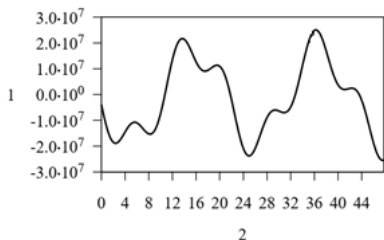
- **формат:** координаты для всех НКА GPS и ГЛОНАСС в текстовом формате на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени (~ 3500 км между точками!);
- **заявляемая точность (СКО):** ~ 3 см;

Предлагаемые IGS (International GNSS Service) final GPS Satellite Ephemerides (финальные орбиты):

- **формат:** координаты для всех НКА GPS и ГЛОНАСС в текстовом формате на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени (~ 3500 км между точками!);
- **заявляемая точность (СКО):** ~ 3 см;
- **формальная точность:** отклоняются от усредненных расчетных орбит не более, чем на 0,5 мм (в SP3-файлах приводятся округленные до 1 мм координаты).

Предлагаемые IGS (International GNSS Service) final GPS Satellite Ephemerides (финальные орбиты):

- **формат:** координаты для всех НКА GPS и ГЛОНАСС в текстовом формате на каждые сутки с 15-минутным шагом по времени (~ 3500 км между точками!);
- **заявляемая точность (СКО):** ~ 3 см;
- **формальная точность:** отклоняются от усредненных расчетных орбит не более, чем на 0,5 мм (в SP3-файлах приводятся округленные до 1 мм координаты).



— типичный график одной из координат спутника (земная вращающаяся декартова система координат).
Горизонтальная ось: время (в часах).
Вертикальная ось: координата (в метрах).

Как показано авторами доклада, фактически в выложенных IGS финальных орбитах (например, с 27.12.2009 по 01.01.2011) наблюдаются:

Как показано авторами доклада, фактически в выложенных IGS финальных орбитах (например, с 27.12.2009 по 01.01.2011) наблюдаются:

- «скачки» (разрывы) на стыках практически всех суток порядка 1 см

Как показано авторами доклада, фактически в выложенных IGS финальных орбитах (например, с 27.12.2009 по 01.01.2011) наблюдаются:

- «скачки» (разрывы) на стыках практически всех суток порядка 1 см
- около 25 аномально больших «скачков» (до 100 м) на стыках некоторых суток,

Как показано авторами доклада, фактически в выложенных IGS финальных орбитах (например, с 27.12.2009 по 01.01.2011) наблюдаются:

- «скачки» (разрывы) на стыках практически всех суток порядка 1 см
- около 25 аномально больших «скачков» (до 100 м) на стыках некоторых суток,
- «аномальные выбросы», не привязанные к концу суток,

Как показано авторами доклада, фактически в выложенных IGS финальных орбитах (например, с 27.12.2009 по 01.01.2011) наблюдаются:

- «скачки» (разрывы) на стыках практически всех суток порядка 1 см
- около 25 аномально больших «скачков» (до 100 м) на стыках некоторых суток,
- «аномальные выбросы», не привязанные к концу суток,
- а также редкие (1-2 в год) «скачки» порядка 1 км.

Методика исследования наличия аномальных значений

Предлагаемая методика исследования основана на *аппроксимации орбит НКА с помощью дискретных ортогональных полиномов.*

Предлагаемая методика исследования основана на *аппроксимации орбит НКА с помощью дискретных ортогональных полиномов*.

- Несмотря на достаточно разреженные исходные данные (выкладываются эфемериды с временным шагом 15 мин. \cong 3500 км полета НКА), удается уверенно распознать как скачки, так и аномальные выбросы величиной 5 мм и более.

Предлагаемая методика исследования основана на *аппроксимации орбит НКА с помощью дискретных ортогональных полиномов*.

- Несмотря на достаточно разреженные исходные данные (выкладываются эфемериды с временным шагом 15 мин. \cong 3500 км полета НКА), удается уверенно распознать как скачки, так и аномальные выбросы величиной 5 мм и более.
- Это объясняется как большой гладкостью самих данных, так и относительной редкостью указанных аномальных явлений.

Предлагаемая методика исследования основана на *аппроксимации орбит НКА с помощью дискретных ортогональных полиномов*.

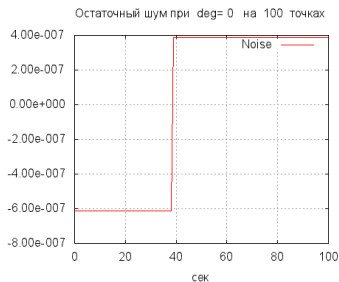
- Несмотря на достаточно разреженные исходные данные (выкладываются эфемериды с временным шагом 15 мин. $\cong 3500$ км полета НКА), удается уверенно распознать как скачки, так и аномальные выбросы величиной 5 мм и более.
- Это объясняется как большой гладкостью самих данных, так и относительной редкостью указанных аномальных явлений.
- Существенным оказывается нахождение устойчивых численных методов построения дискретных ортогональных полиномов высоких степеней.

Предлагаемая методика исследования основана на *аппроксимации орбит НКА с помощью дискретных ортогональных полиномов*.

- Несмотря на достаточно разреженные исходные данные (выкладываются эфемериды с временным шагом 15 мин. \cong 3500 км полета НКА), удается уверенно распознать как скачки, так и аномальные выбросы величиной 5 мм и более.
- Это объясняется как большой гладкостью самих данных, так и относительной редкостью указанных аномальных явлений.
- Существенным оказывается нахождение устойчивых численных методов построения дискретных ортогональных полиномов высоких степеней.
- Экспериментально обнаруживается новый эффект — *резкое затухание невязки приближения вблизи границы исследуемого интервала*.

Проявления «сшивки» двух рядов данных с небольшим сдвигом = «скачок»

Возьмем скачок в 1 мм в ряду данных из 100 точек.

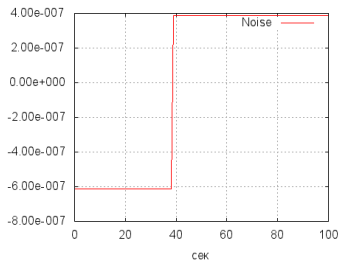


Проявления «сшивки» двух рядов данных с небольшим сдвигом = «скачок»

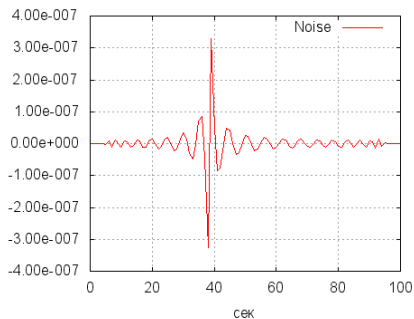
Возьмем скачок в 1 мм в ряду данных из 100 точек.

После расчета полинома наилучшего приближения (в данном случае 50-й степени) и вычисления разности с исходными данными получим:

Остаточный шум при deg= 0 на 100 точках

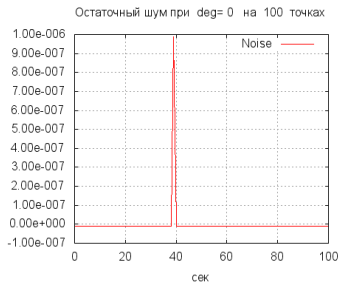


Остаточный шум при deg= 50 на 100 точках



Проявления «аномального выброса» в ряду гладких данных = «выброс»

Возьмем выброс в одной точке
(величиной 1 мм) в ряду из 100
нулевых данных:



Проявления «аномального выброса» в ряду гладких данных = «выброс»

Возьмем выброс в одной точке (величиной 1 мм) в ряду из 100 нулевых данных:

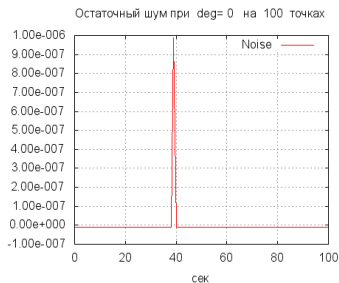
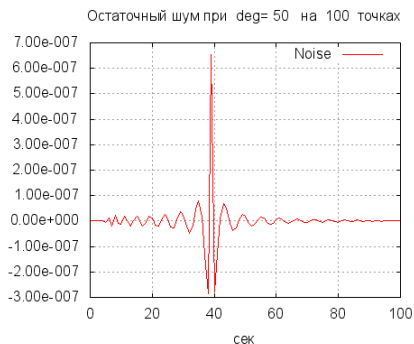
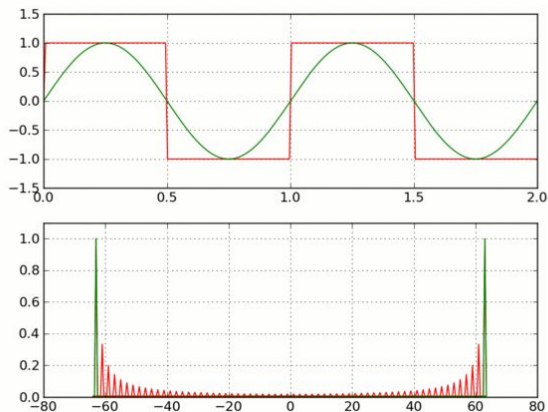


График невязки при приближении полиномом 50-й степени:



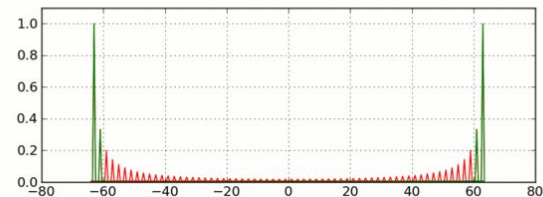
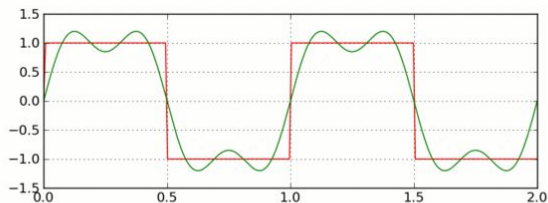
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



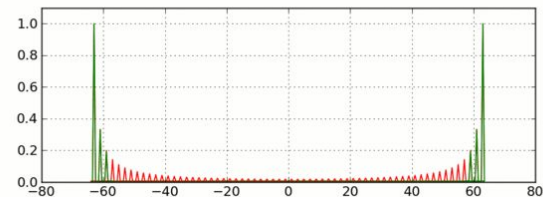
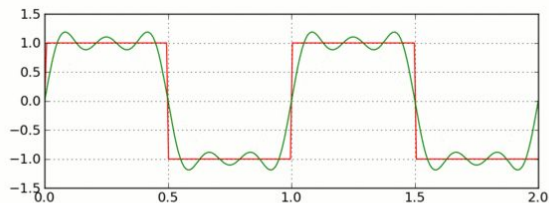
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



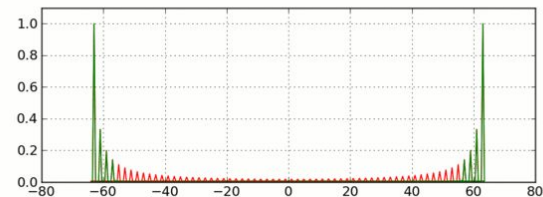
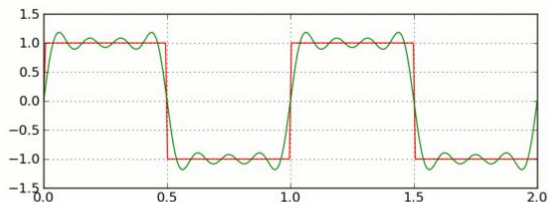
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



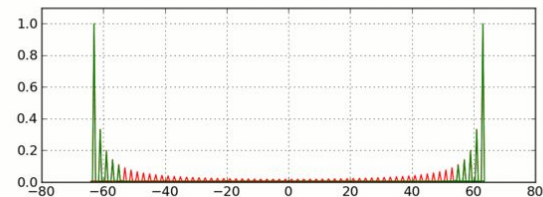
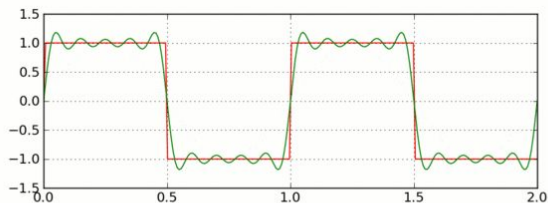
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



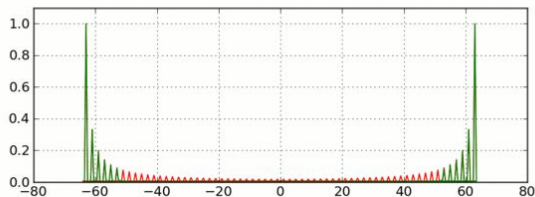
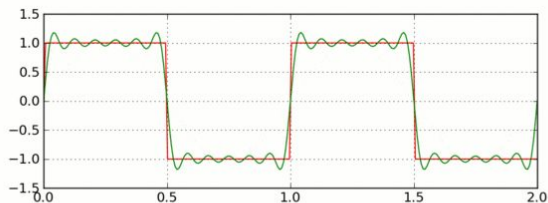
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



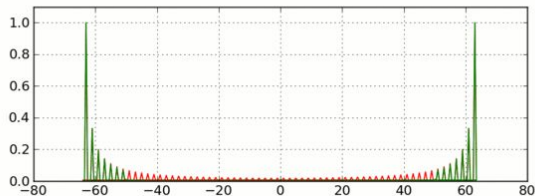
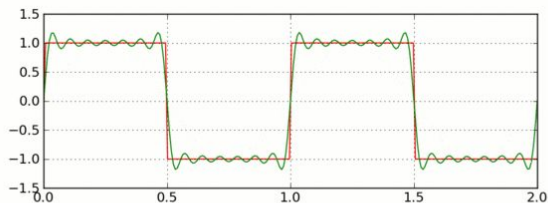
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



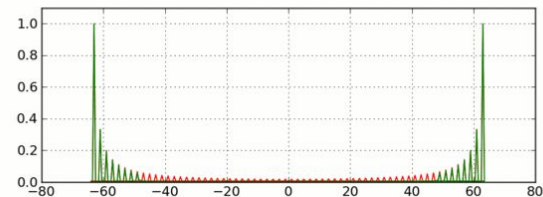
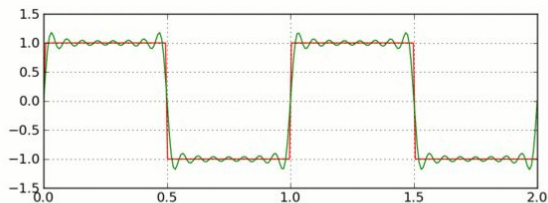
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



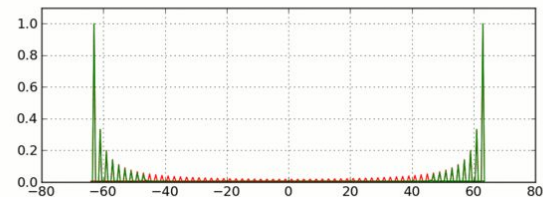
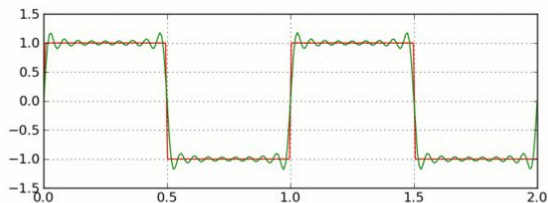
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



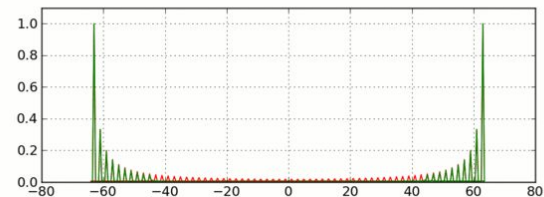
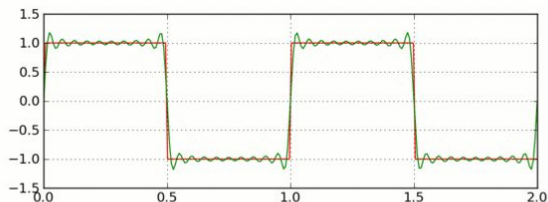
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



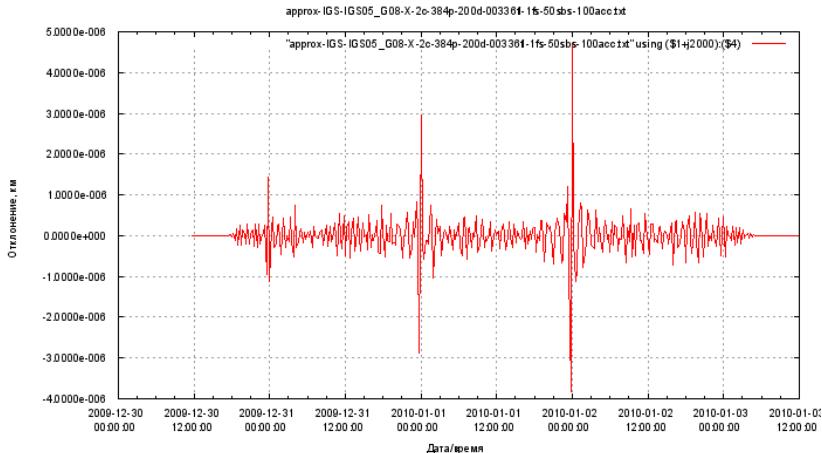
феномен Гиббса

Оба случая («скачок» и «аномальный выброс») иллюстрируют известный «феномен Гиббса», широко известный для приближения рядами Фурье:



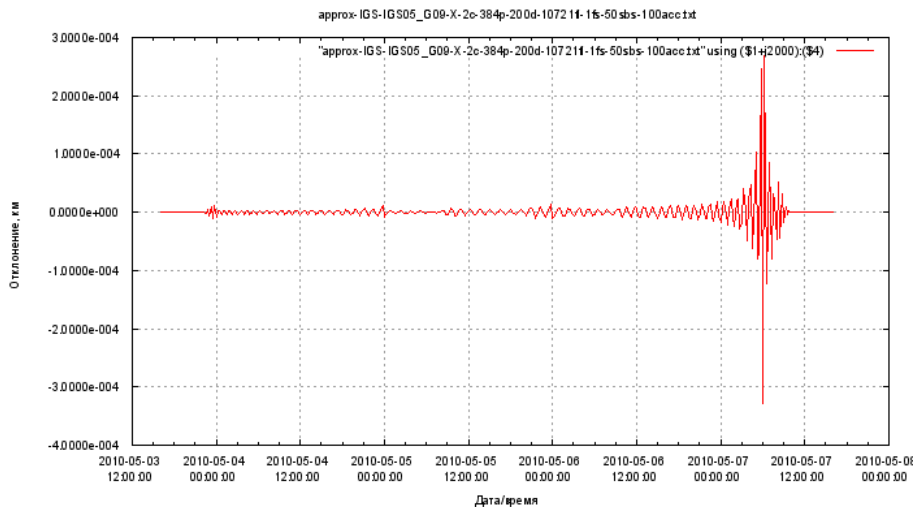
Типичный пример скачков порядка 1 см на стыках суток

Невязка между полиномом наилучшего среднеквадратичного приближения степени 200 и X-координатой финальной орбиты спутника G08 с 12:00:00 30-12-2009 по 12:00:00 03-01-2010 (4 суток) на 386 точках из SP3-файлов:



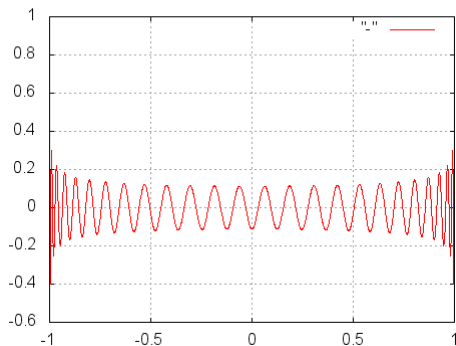
Типичный пример «аномального выброса» в 50 см

НКА G09 с 04-05-2010 по 07-05-2010 (4 суток) на 386 точках из SP3-файлов:



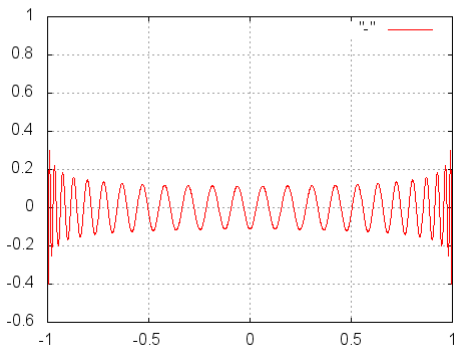
Полином Лежандра степени 50:

Полином Лежандра степени deg= 50



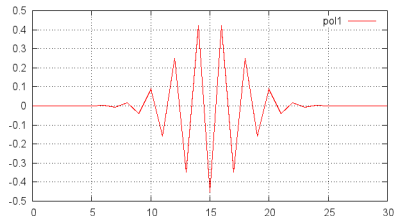
Полином Лежандра степени 50:

Полином Лежандра степени deg= 50



Полином Хана (Чебышева)
 $p_{30}(x)$ степени 30 на решетке из
31 точки:

Графики дискретных орт. полиномов deg= 30 на 30 точках с шагом=1 и с меньшим ша

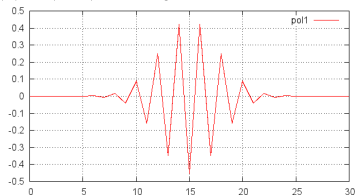


Значения на концах:

x	$p_{30}(x)$
0	$2.9079 \cdot 10^{-9}$
1	$-8.7236 \cdot 10^{-8}$
2	$1.2649 \cdot 10^{-6}$
3	-0.000011806

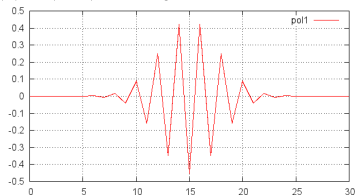
Полином Хана (Чебышева) степени 30 на решетке из 31 точки:

Графики дискретных орт. полиномов deg=30 на 30 точках с шагом=1 и с МЕНЬШИМ ш



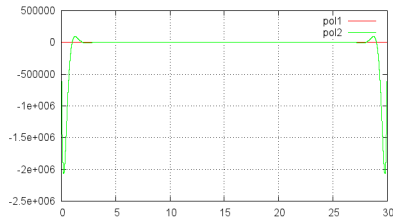
Полином Хана (Чебышева) степени 30 на решетке из 31 точки:

Графики дискретных орт. полиномов deg=30 на 30 точках с шагом=1 и с МЕНЬШИМ ш



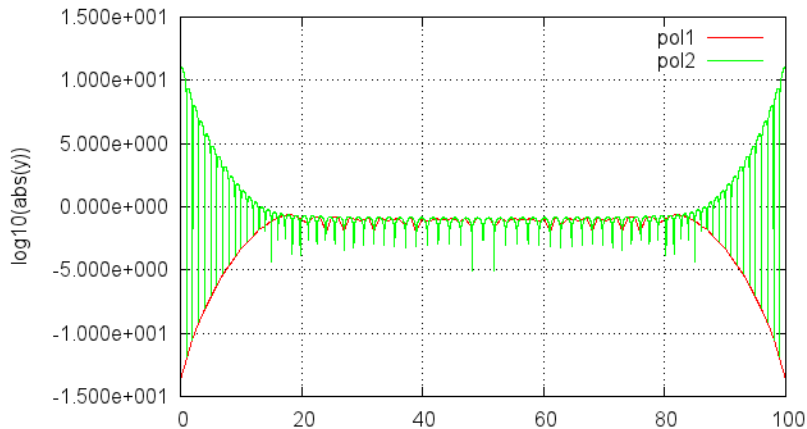
Он же в промежуточных точках:

Графики дискретных орт. полиномов deg=30 на 30 точках с шагом=1 и с МЕНЬШИМ ш



Полином Хана (Чебышева) степени 75 на решетке из 101 точки:

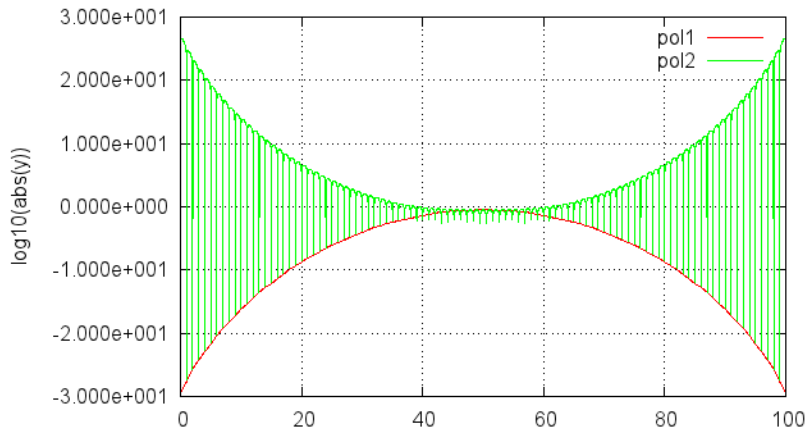
Дискр. орт. полином deg= 75 на 100 точках с шагом=1 и с МЕНЬШИМ шаг



Дискретные ортогональные полиномы в log-масштабе

Полином Хана (Чебышева) степени 100 на решетке из 101 точки:

Дискр. орт. полином deg= 100 на 100 точках с шагом=1 и с МЕНЬШИМ шаг



Мы изучаем для простоты только эквидистантные решетки точек:
 $X = \{0, 1, \dots, N\}$ и равные веса во всех точках.

Мы изучаем для простоты только эквидистантные решетки точек:
 $X = \{0, 1, \dots, N\}$ и равные веса во всех точках.

ДОП Хана (Чебышева):

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) = \delta_{ms}. \quad (1)$$

Мы изучаем для простоты только эквидистантные решетки точек:
 $X = \{0, 1, \dots, N\}$ и равные веса во всех точках.

ДОП Хана (Чебышева):

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) = \delta_{ms}. \quad (1)$$

Свойства:

- удовлетворяют рекуррентии 2-го порядка;
- все их корни - на отрезке $[0, N]$, не более одного между соседними точками решетки.

Мы изучаем для простоты только эквидистантные решетки точек:
 $X = \{0, 1, \dots, N\}$ и равные веса во всех точках.

ДОП Хана (Чебышева):

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) = \delta_{ms}. \quad (1)$$

Свойства:

- удовлетворяют рекуррентии 2-го порядка;
- все их корни - на отрезке $[0, N]$, не более одного между соседними точками решетки.

$$p_m^N(j) = \sum_{k=0}^{\min\{j,m\}} \frac{(-1)^k (m)_{-k} (m+1)_k (j)_{-k}}{(k!)^2 (N)_{-k}}, \quad (2)$$

где $(a)_k$ – символы Похгаммера:

$$(a)_k = \begin{cases} a(a+1) \dots (a+k-1), & \text{если } k > 0, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ a(a-1) \dots (a+k+1), & \text{если } k < 0. \end{cases} \quad (3)$$

- *Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б.*, Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Наука, 1985.
- *Baik, J., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K.D.R., Miller, P.D.* Discrete Orthogonal Polynomials. Princeton University Press, 2007, 170 p.
- *Шарапудинов, И.И.* Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной, Матем. сб., 180:9 (1989), с. 1259–1277.
(Асимптотика ограничена по степени m в сравнении с числом точек решетки N : $m < \alpha\sqrt{N}$)
- *Aptekarev, A.I., Van Assche, W.* Asymptotics of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, v. 34(48), No.10627.

Поведение ДОП высоких степеней вблизи границы для эквидистантной решетки с равными весами

Теорема

Полиномы Хана (Чебышева) высокой степени принимают значения на точках решетки, близкие к нулю при приближении к концам решетки.

Поведение ДОП высоких степеней вблизи границы для эквидистантной решетки с равными весами

Теорема

Полиномы Хана (Чебышева) высокой степени принимают значения на точках решетки, близкие к нулю при приближении к концам решетки.

Теорема

Полиномы Хана (Чебышева) высокой степени принимают между точками решетки значения, близкие к $\frac{1}{\epsilon}$ при приближении к концам решетки.

Теорема

Корни полиномов Хана (Чебышева) высокой степени, близкие к концам решетки, отстоят от точек решетки на расстояние порядка ϵ^2 .

(ϵ — значение полинома в ближайшей точке решетки).

Можно ли избежать подобного подавления аномалий вблизи границы, используя, например:

- ДОП с правильно подобранными весами w_j —

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) w_j = \delta_{ms} \quad ? \quad (4)$$

Можно ли избежать подобного подавления аномалий вблизи границы, используя, например:

- ДОП с правильно подобранными весами w_j —

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) w_j = \delta_{ms} \quad ? \quad (4)$$

- Приближением неортогональными наборами полиномов (пример: дискретные полиномы Чебышева)?

Можно ли избежать подобного подавления аномалий вблизи границы, используя, например:

- ДОП с правильно подобранными весами w_j —

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) w_j = \delta_{ms} \quad ? \quad (4)$$

- Приближением неортогональными наборами полиномов (пример: дискретные полиномы Чебышева)?

Увы, нет . . .

Можно ли избежать подобного подавления аномалий вблизи границы, используя, например:

- ДОП с правильно подобранными весами w_j —

$$\sum_{j=0}^N p_m^N(j) p_s^N(j) w_j = \delta_{ms} \quad ? \quad (4)$$

- Приближением неортогональными наборами полиномов (пример: дискретные полиномы Чебышева)?

Увы, нет . . .

Из доказанного выше легко получить общий результат о подавлении аномалий вблизи границ для произвольных стабильных линейных полиномиальных фильтров.

Линейные полиномиальные фильтры

Пример: полиномиальные фильтры Хана-Чебышева

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных.

Линейные полиномиальные фильтры

Пример: полиномиальные фильтры Хана-Чебышева

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных.
Рассмотрим его разложение по полиномам Хана-Чебышева:

$$\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_j = \sum_{k=0}^N c_k p_k^N(j).$$

Линейные полиномиальные фильтры

Пример: полиномиальные фильтры Хана-Чебышева

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных.
Рассмотрим его разложение по полиномам Хана-Чебышева:

$$\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_j = \sum_{k=0}^N c_k p_k^N(j).$$

Составим матрицу $M = (m_{jk})$, $0 \leq j, k \leq N$, с $m_{jk} = p_k^N(j)$. Тогда

$$\bar{c} = (c_0, c_1, \dots, c_N)^T = M^{-1}\bar{f}.$$

Линейные полиномиальные фильтры

Пример: полиномиальные фильтры Хана-Чебышева

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных. Рассмотрим его разложение по полиномам Хана-Чебышева:

$$\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_j = \sum_{k=0}^N c_k p_k^N(j).$$

Составим матрицу $M = (m_{jk})$, $0 \leq j, k \leq N$, с $m_{jk} = p_k^N(j)$. Тогда

$$\bar{c} = (c_0, c_1, \dots, c_N)^T = M^{-1}\bar{f}.$$

Взяв первые $m + 1$ ($m < N$) коэффициентов (c_0, c_1, \dots, c_m) , получим

$$\hat{f}_j = \sum_{n=0}^m c_n p_n^N(t_j)$$

— ‘сглаженный ряд’ f_j

Линейные полиномиальные фильтры

Пример: полиномиальные фильтры Хана-Чебышева

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных. Рассмотрим его разложение по полиномам Хана-Чебышева:

$$\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_j = \sum_{k=0}^N c_k p_k^N(j).$$

Составим матрицу $M = (m_{jk})$, $0 \leq j, k \leq N$, с $m_{jk} = p_k^N(j)$. Тогда

$$\bar{c} = (c_0, c_1, \dots, c_N)^T = M^{-1}\bar{f}.$$

Взяв первые $m + 1$ ($m < N$) коэффициентов (c_0, c_1, \dots, c_m) , получим

$$\hat{f}_j = \sum_{n=0}^m c_n p_n^N(t_j)$$

— ‘сглаженный ряд’ f_j

и ‘отфильтрованное возмущение’ $\tilde{f} = \bar{f} - \hat{f}$.

Матрица линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева

Обозначим за D_m диагональную $(N + 1) \times (N + 1)$ матрицу с первыми $m + 1$ нулями на диагонали и единицами на остальной части диагонали. Тогда 'отфильтрованное возмущение' временного ряда равно

$$\tilde{f} = MD_mM^{-1}\bar{f},$$

Матрица линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева

Обозначим за D_m диагональную $(N + 1) \times (N + 1)$ матрицу с первыми $m + 1$ нулями на диагонали и единицами на остальной части диагонали. Тогда 'отфильтрованное возмущение' временного ряда равно

$$\tilde{f} = MD_mM^{-1}\bar{f},$$

Определение

Назовем $F_m = MD_mM^{-1}$ матрицей линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева степени m .

Матрица линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева

Обозначим за D_m диагональную $(N + 1) \times (N + 1)$ матрицу с первыми $m + 1$ нулями на диагонали и единицами на остальной части диагонали. Тогда 'отфильтрованное возмущение' временного ряда равно

$$\tilde{f} = MD_mM^{-1}\bar{f},$$

Определение

Назовем $F_m = MD_mM^{-1}$ матрицей линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева степени m .

Быстрое убывание полиномов Хана-Чебышева вблизи конечных точек влечет быстрое убывание 'отфильтрованного возмущения' временного ряда вблизи конечных точек для $m \sim N$.

Матрица линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева

Обозначим за D_m диагональную $(N + 1) \times (N + 1)$ матрицу с первыми $m + 1$ нулями на диагонали и единицами на остальной части диагонали. Тогда 'отфильтрованное возмущение' временного ряда равно

$$\tilde{f} = MD_m M^{-1} \bar{f},$$

Определение

Назовем $F_m = MD_m M^{-1}$ матрицей линейного полиномиального фильтра Хана-Чебышева степени m .

Быстрое убывание полиномов Хана-Чебышева вблизи конечных точек влечет быстрое убывание 'отфильтрованного возмущения' временного ряда вблизи конечных точек для $m \sim N$.

В терминах матрицы фильтра $F_m = MD_m M^{-1}$ это означает малость (порядка ϵ) ее нескольких первых и последних строк и столбцов.

Общие линейные полиномиальные фильтры. Стабильные фильтры

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных

Общие линейные полиномиальные фильтры. Стабильные фильтры

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных и $P_k^N(t_j)$, $k = 0, \dots, N$ — *любой* набор полиномов степеней $k = 0, \dots, N$ соответственно.

Общие линейные полиномиальные фильтры. Стабильные фильтры

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных и $P_k^N(t_j)$, $k = 0, \dots, N$ — *любой* набор полиномов степеней $k = 0, \dots, N$ соответственно.

Рассмотрим

$$M = (m_{jk}), \quad 0 \leq j, k \leq N \quad \text{с} \quad m_{jk} = P_k^N(t_j),$$

Назовем матрицу

$$F_m = MD_m M^{-1} \tag{5}$$

матрицей линейного полиномиального фильтра степени m , соответствующую набору полиномов P_k^N .

Общие линейные полиномиальные фильтры. Стабильные фильтры

Пусть $f_j = f(t_j)$, $j = 0, \dots, N$ — временной ряд (скалярных) данных и $P_k^N(t_j)$, $k = 0, \dots, N$ — любой набор полиномов степеней $k = 0, \dots, N$ соответственно.

Рассмотрим

$$M = (m_{jk}), \quad 0 \leq j, k \leq N \quad \text{с} \quad m_{jk} = P_k^N(t_j),$$

Назовем матрицу

$$F_m = MD_m M^{-1} \tag{5}$$

матрицей линейного полиномиального фильтра степени m , соответствующую набору полиномов P_k^N .

Подсемейство $\{P_k^N\}_{k=0}^m$ очевидно зануляется F_m :

$$F_m P_k^N \equiv 0 \quad \text{при} \quad k \leq m$$

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Т.е. строки F_m ортогональны $P_k^N(t_j)$, $k \leq m$ (с единичными весами).
Т.к. любой полином степени $\leq m$ — линейная комбинация $\{P_k^N\}_{k=0}^m$

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Т.е. строки F_m ортогональны $P_k^N(t_j)$, $k \leq m$ (с единичными весами).

Т.к. любой полином степени $\leq m$ — линейная комбинация $\{P_k^N\}_{k=0}^m$

\implies строки F_m ортогональны полиномам Хана-Чебышева степеней $\leq m$,

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Т.е. строки F_m ортогональны $P_k^N(t_j)$, $k \leq m$ (с единичными весами).

Т.к. любой полином степени $\leq m$ — линейная комбинация $\{P_k^N\}_{k=0}^m$

\implies строки F_m ортогональны полиномам Хана-Чебышева степеней $\leq m$,

\implies они являются *линейной комбинацией полиномов Хана-Чебышева степеней высоких степеней $k > m$* с некоторыми коэффициентами c_s .

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Т.е. строки F_m ортогональны $P_k^N(t_j)$, $k \leq m$ (с единичными весами).

Т.к. любой полином степени $\leq m$ — линейная комбинация $\{P_k^N\}_{k=0}^m$

\implies строки F_m ортогональны полиномам Хана-Чебышева степеней $\leq m$,

\implies они являются *линейной комбинацией полиномов Хана-Чебышева степеней высоких степеней $k > m$* с некоторыми коэффициентами c_s .

Если c_s не слишком велики, для больших m строки F_m будут иметь близкие к нулю элементы вблизи концов.

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Т.е. строки F_m ортогональны $P_k^N(t_j)$, $k \leq m$ (с единичными весами).

Т.к. любой полином степени $\leq m$ — линейная комбинация $\{P_k^N\}_{k=0}^m$

\implies строки F_m ортогональны полиномам Хана-Чебышева степеней $\leq m$,

\implies они являются *линейной комбинацией полиномов Хана-Чебышева степеней высоких степеней $k > m$* с некоторыми коэффициентами c_s .

Если c_s не слишком велики, для больших m строки F_m будут иметь близкие к нулю элементы вблизи концов.

Поскольку c_s — скалярные произведения строки F_m и полиномов Хана-Чебышева, естественно ввести следующее определение:

Определение

Линейный полиномиальный фильтр с матрицей F_m называется стабильным, если все элементы F_m не превосходят по модулю некоторой небольшой константы.

Общие линейные полиномиальные фильтры. Стабильные фильтры

Стабильность фильтра обеспечивает:

- c_s не слишком велики и, следовательно, несколько крайних столбцов F_m настолько же малы, как и в случае фильтра Хана-Чебышева;
- фильтр F_m практически применим к данным, содержащим небольшие случайные шумы (иначе малые отклонения будут усилены фильтром F_m).

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Стабильность фильтра обеспечивает:

- c_s не слишком велики и, следовательно, несколько крайних столбцов F_m настолько же малы, как и в случае фильтра Хана-Чебышева;
- фильтр F_m практически применим к данным, содержащим небольшие случайные шумы (иначе малые отклонения будут усилены фильтром F_m).

Наш основной результат:

Теорема

Любой стабильный полиномиальный фильтр высокой степени имеет свойство подавления сигнала вблизи концов отрезка обработки, подобно фильтрам Хана-Чебышева.

Общие линейные полиномиальные фильтры.

Стабильные фильтры

Стабильность фильтра обеспечивает:

- c_s не слишком велики и, следовательно, несколько крайних столбцов F_m настолько же малы, как и в случае фильтра Хана-Чебышева;
- фильтр F_m практически применим к данным, содержащим небольшие случайные шумы (иначе малые отклонения будут усилены фильтром F_m).

Наш основной результат:

Теорема

Любой стабильный полиномиальный фильтр высокой степени имеет свойство подавления сигнала вблизи концов отрезка обработки, подобно фильтрам Хана-Чебышева.

Remark. Для нестабильных линейных полиномиальных фильтров это утверждение может быть неверно.

Можно ли все-таки избежать эффекта подавления вблизи границ?

Можно ли все-таки избежать эффекта подавления вблизи границ?

Да, если использовать:

- неполиномиальные (линейные) фильтры;
- нелинейные фильтры.

Можно ли все-таки избежать эффекта подавления вблизи границ?

Да, если использовать:

- неполиномиальные (линейные) фильтры;
- нелинейные фильтры.

Примеры подобных стабильных фильтров без подавления малых возмущений вблизи границы области задания временного ряда:
доклад «Концепция свободной интерполяции для больших данных:
как простой формулой увеличить точность ответа в 100 раз»
(СПЦ, Декабрьские чтения - 2018, Томск).

Можно ли все-таки избежать эффекта подавления вблизи границ?

Да, если использовать:

- неполиномиальные (линейные) фильтры;
- нелинейные фильтры.

Примеры подобных стабильных фильтров без подавления малых возмущений вблизи границы области задания временного ряда: доклад «Концепция свободной интерполяции для больших данных: как простой формулой увеличить точность ответа в 100 раз» (СПЦ, Декабрьские чтения - 2018, Томск).

Линейная свободная экстраполяция позволяет выявлять требуемые малые аномалии вблизи границы интервала!

Можно ли все-таки избежать эффекта подавления вблизи границ?

Да, если использовать:

- неполиномиальные (линейные) фильтры;
- нелинейные фильтры.

Примеры подобных стабильных фильтров без подавления малых возмущений вблизи границы области задания временного ряда: доклад «Концепция свободной интерполяции для больших данных: как простой формулой увеличить точность ответа в 100 раз» (СПЦ, Декабрьские чтения - 2018, Томск).

Линейная свободная экстраполяция позволяет выявлять требуемые малые аномалии вблизи границы интервала!

Нелинейная свободная интерполяция позволяет выявлять аномалии всего по 3 точкам (адаптивность к данному классу орбит)!

Спасибо за внимание!