

Особый вихрь в релятивистской гидродинамике и неявные дифференциальные уравнения

А. П. Чупахин
совместно с А. А. Черевко и А. А. Янченко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирский государственный университет

Частично инвариантные решения

Инвариантные решения (ИР) - все функции имеют представления через инварианты

Частично инвариантные (ЧИР) - некоторые функции остаются произвольными "не инвариантными" (их число - **дефект** решения)

Исходная система уравнений разделяется на инвариантную и не инвариантную подсистемы

Глубокое обобщение метода разделения переменных

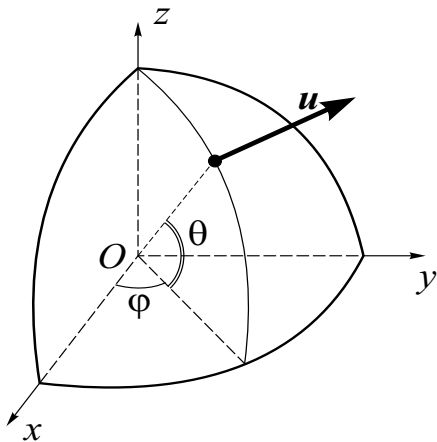
Отыскание - существенно сложнее, чем ИР, надо приводить в инволюцию переопределенные системы ДУ

Достоинства - большая, чем для ИР, широта решения

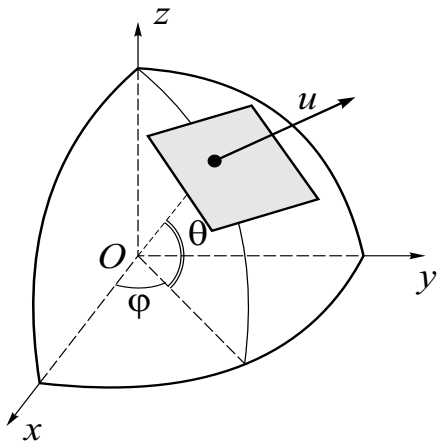
*Сферически частично инвариантные
решения (вихрь Овсянникова).*

Особый вихрь (Л.В. Овсянников, 1995г.) обобщает классические сферически симметричные решения.

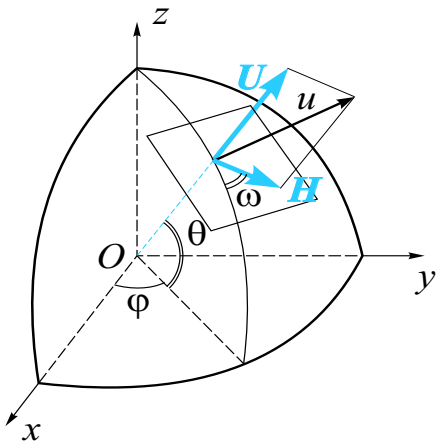
Скорость - не инвариантна.



Скорость - не инвариантна.

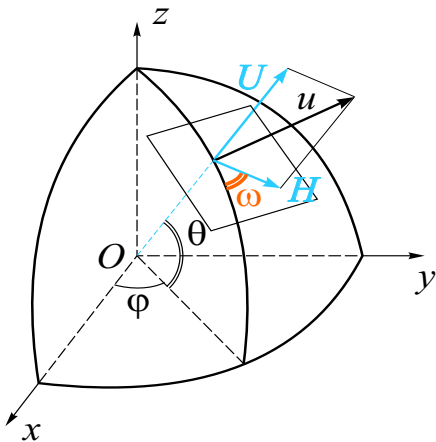


U и $|\mathbf{H}|$ — инвариантны.



U и $|\mathbf{H}|$ — инвариантны.

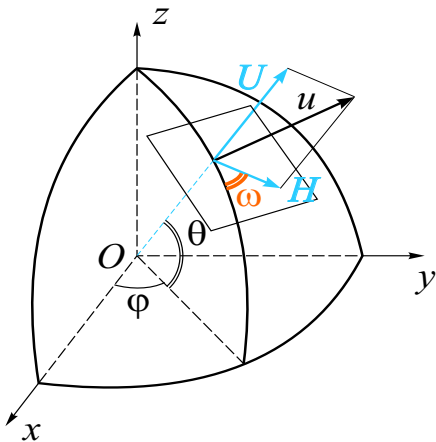
Угол ω , образуемый \mathbf{H} и меридианом — лишняя функция — зависит от всех переменных: $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$



Все термодинамические функции
(плотность, давление, энтропия) — инвариантны.

U и $|\mathbf{H}|$ — инвариантны.

Угол ω , образуемый \mathbf{H} и меридианом — лишняя функция
— зависит от всех переменных: $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$



Вихрь Овсянникова — частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 1. Представление решения:

$$U = U(t, r) , \quad H = H(t, r) ,$$

$$\rho = \rho(t, r) , \quad p = p(t, r) , \quad \omega = \omega(t, r, \theta, \varphi) .$$

Свойства вихря Овсянникова

Траектория каждой частицы газа лежит в плоскости (своей для каждой частицы). *Л.В.Овсянников, 1995*

Инвариантные подмодели вихря Овсянникова (стационарный, однородный). *А.П.Чупахин, 2003*

Переопределенная система на угол ω — "сферические"
движения

$$k \sin \theta D_0 \omega + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi = -\cos \theta \sin \omega ,$$

$$\sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi = \cos \theta \cos \omega + h \sin \theta .$$

Инвариантная система — радиальные движения

$$D_0 U + \rho^{-1} p_r = r^{-1} H^2 , \quad D_0(rH) = 0 , \quad D_0 S = 0 , \quad p = f(\rho, S)$$

Условия совместности

$$k D_0 h = h^2 + 1 ,$$

где $D_0 = \partial_t + U \partial_r$, инвариантные функции h и k имеют вид

$$k = r/H, \quad h = k(D_0 \ln \rho + r^{-2}(r^2 U)_r) ,$$

Интегрирование переопределенной системы (Овсянников)

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 ,$$

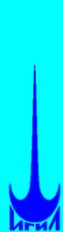
где F — гладкая произвольная функция своих аргументов

$$D_0\xi = 0 , \quad kD_0\tau = 1 , \quad h = \operatorname{tg}\tau$$

$$\eta = \cos \tau \sin \theta \cos \omega - \sin \tau \cos \theta ,$$

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\zeta + \varphi) = \cos \tau \cos \theta \cos \omega + \sin \tau \sin \theta .$$

Сложная зависимость для $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$ определяемая неявно.



В осесимметрическом случае уравнения для $\omega(r, \theta, t)$ — угла отклонения касательной к сферам компоненты вектора скорости от меридиана, интегрируются в явном виде:

$$\cos(\omega) = h \operatorname{ctg}(\theta) + \frac{\mathbf{S}}{\sin(\theta)},$$

где $\mathbf{S}(t, r)$ является решением уравнения

$$rH^{-1} (\partial_t + U\partial_r) \mathbf{S} = h \mathbf{S},$$

а функции $h(t, r)$, $H(t, r)$, $U(t, r)$ – решения инвариантной системы.

Во всех приводимых примерах мы будем полагать $\mathbf{S} \equiv \mathbf{0}$.

В этом случае течение “симметрично” относительно плоскости экватора.

После подстановки следующего представления решения:

$$l = \ln \left(\frac{r}{t^{\alpha+1}} \right), \quad U = \frac{r}{t} \hat{U}(l), \quad c = \frac{r}{t} \hat{c}(l), \quad H = \frac{r}{t} \hat{H}(l), \quad h = \hat{h}(l)$$

и замены

$$\hat{U} = \frac{v+w}{2} + 1, \quad \hat{c} = \frac{v-w}{2}$$

система сводится к автономной системе ОДУ.

В случае $\gamma = 3$ система ОДУ принимает следующий вид (точка обозначает дифференцирование по l , крышки над буквами опущены):

$$2(w - \alpha) \dot{w} = 2H^2 + hH(v - w) + v(2 + v) - w(4 + 3w)$$

$$2(v - \alpha) \dot{v} = 2H^2 + hH(w - v) + w(2 + w) - v(4 + 3v)$$

$$(v + w - 2\alpha) \dot{H} = -2H(1 + v + w) \quad (9)$$

$$(v + w - 2\alpha) \dot{h} = 2(1 + h^2)H$$

Будем рассматривать значения $-1/2 < \alpha < 0$, при которых конечна энергия газа содержащегося в любом шаре с центром в начале координат.

*Стационарный ВО (СВО),
политропный газ: $p = f(S)\rho^\gamma$*

Представление решения

$$U = \bar{a}_0(1 + h^2)/(R^2 h_R) , \quad \rho = \bar{\rho}_0 |h_R| / \sqrt{1 + h^2} ,$$

$$H = \bar{a}_0/R , \quad c^2 = \bar{c}_0^2 (h_R)^2 / (1 + h^2)$$

$\bar{a}_0, \bar{c}_0, \bar{\rho}_0$ — константы, c — скорость звука.

Функция $h = h(R)$ — своеобразный обобщенный потенциал решения, через неё и её производные решение определяется полностью.

Она находится из инвариантного интеграла Бернулли.

$$(U^2 + \bar{a}_0^2/R^2) + c^2 = 2b_0$$

где \bar{a}_0, b_0 — константы

Ключевое уравнение

$$|h_R|^{\gamma+1} - \beta_0^2 \left(\frac{R^2 - 1}{R^2} \right) (1+h^2)^{(\gamma-1)/2} h_R^2 + \beta_0^2 \frac{(1+h^2)^{(\gamma+3)/2}}{R^4} = 0,$$

где $\beta_0^2 = (\gamma - 1) \bar{a}_0^{\gamma-1} / \left(2^{(\gamma-1)/2} b_0^{(\gamma-3)/2} \bar{c}_0^2 \right)$.

для $\gamma = 3$:

$$h_R^4 - \beta_0^2 \left(\frac{R^2 - 1}{R^2} \right) (1+h^2) h_R^2 + \beta_0^2 \frac{(1+h^2)^3}{R^4} = 0$$

где $\beta_0^2 = \bar{a}_0^2 / \bar{c}_0^2$

Неявные дифференциальные уравнения

Основы: Арнольд, Геометрические методы в теории ОДУ
ОДУ: Пхакадзе и Шестаков (1959), Мукминов, Кузьмин,
Пилия и Федоров, Давыдов, Ремизов (2002)

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = dy/dx$$

Сложность: решение определено не однозначно – интегральные кривые пересекаются.

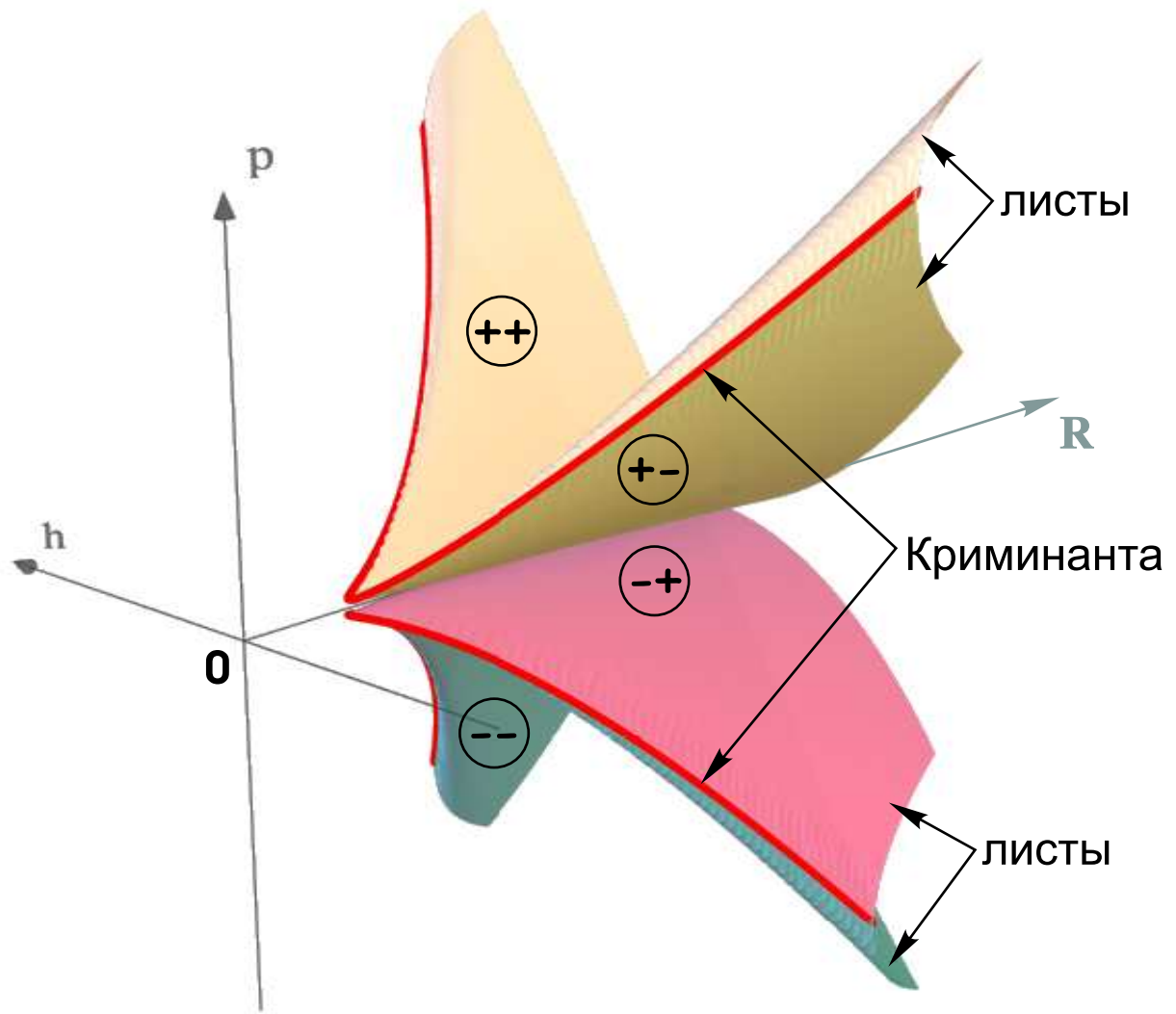
⇒ Выход в пространство струй (x, y, p) .

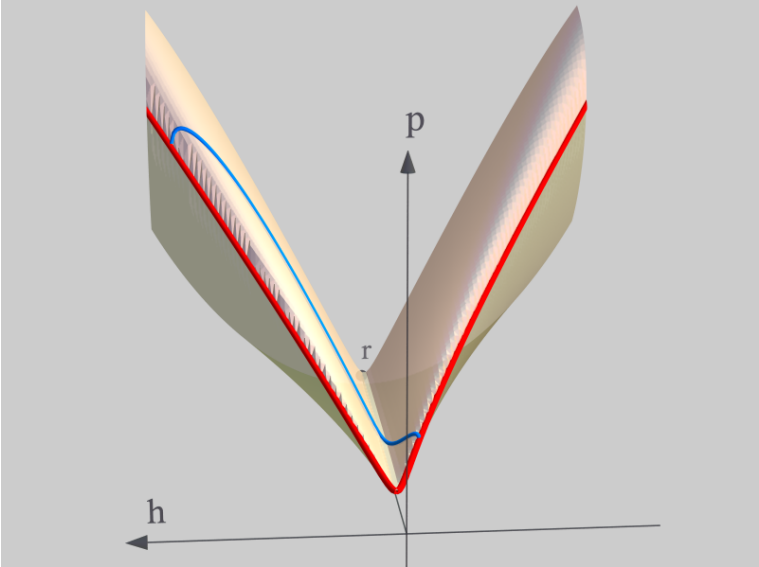
В пространстве струй решение определено однозначно на нескольких листах, пересекающихся по кривинанте.

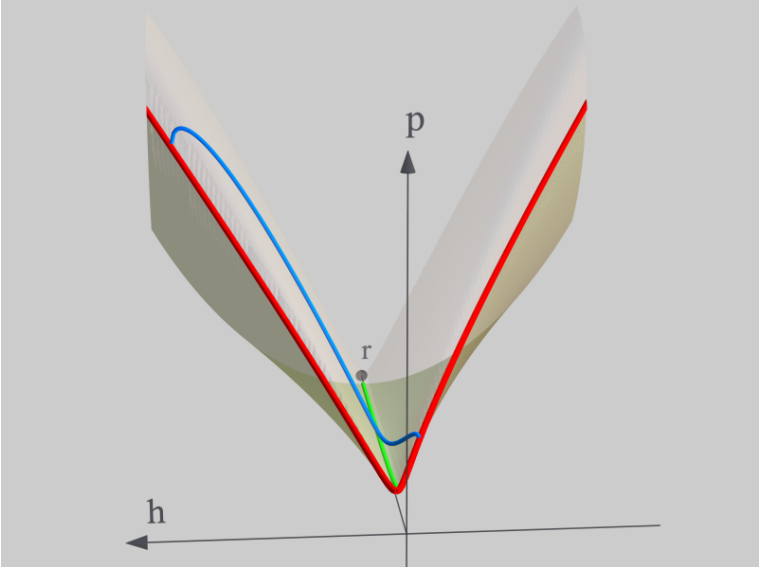
Проекция кривинанты на плоскость (x, y) — дискриминантная кривая, ограничивающая область существования решения.

Многолистная (4-х) поверхность ключевого уравнения
в пространстве струй $\mathbf{R}^3 (R, h, p=h_R)$

Поверхность состоит
из двух компонент:
 $p < 0$ и $p > 0$

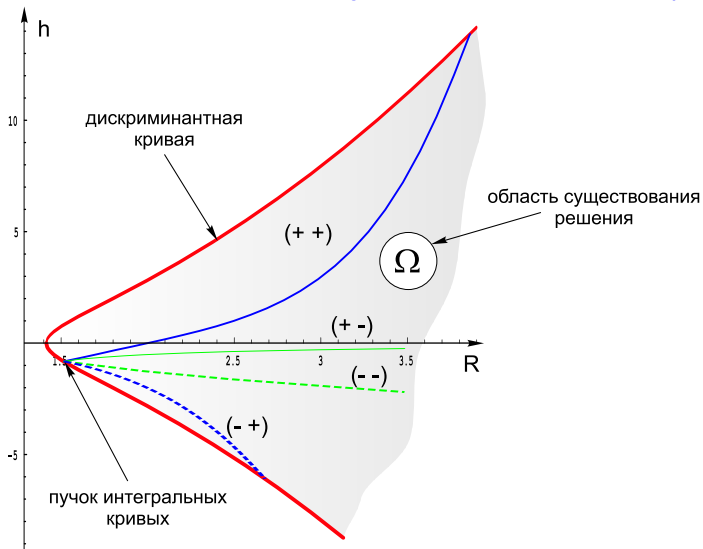




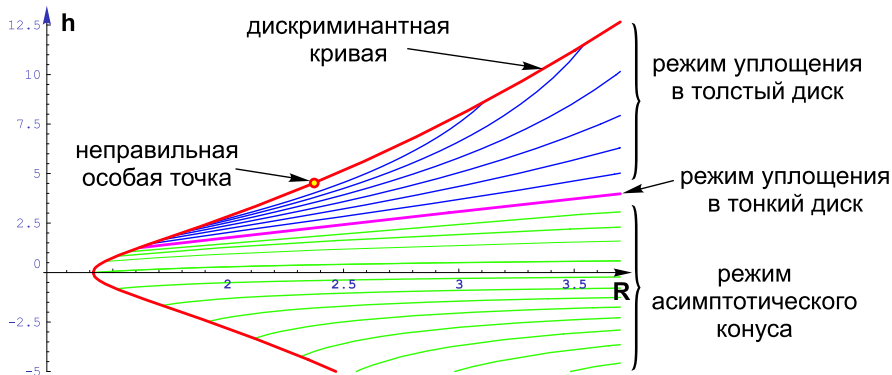


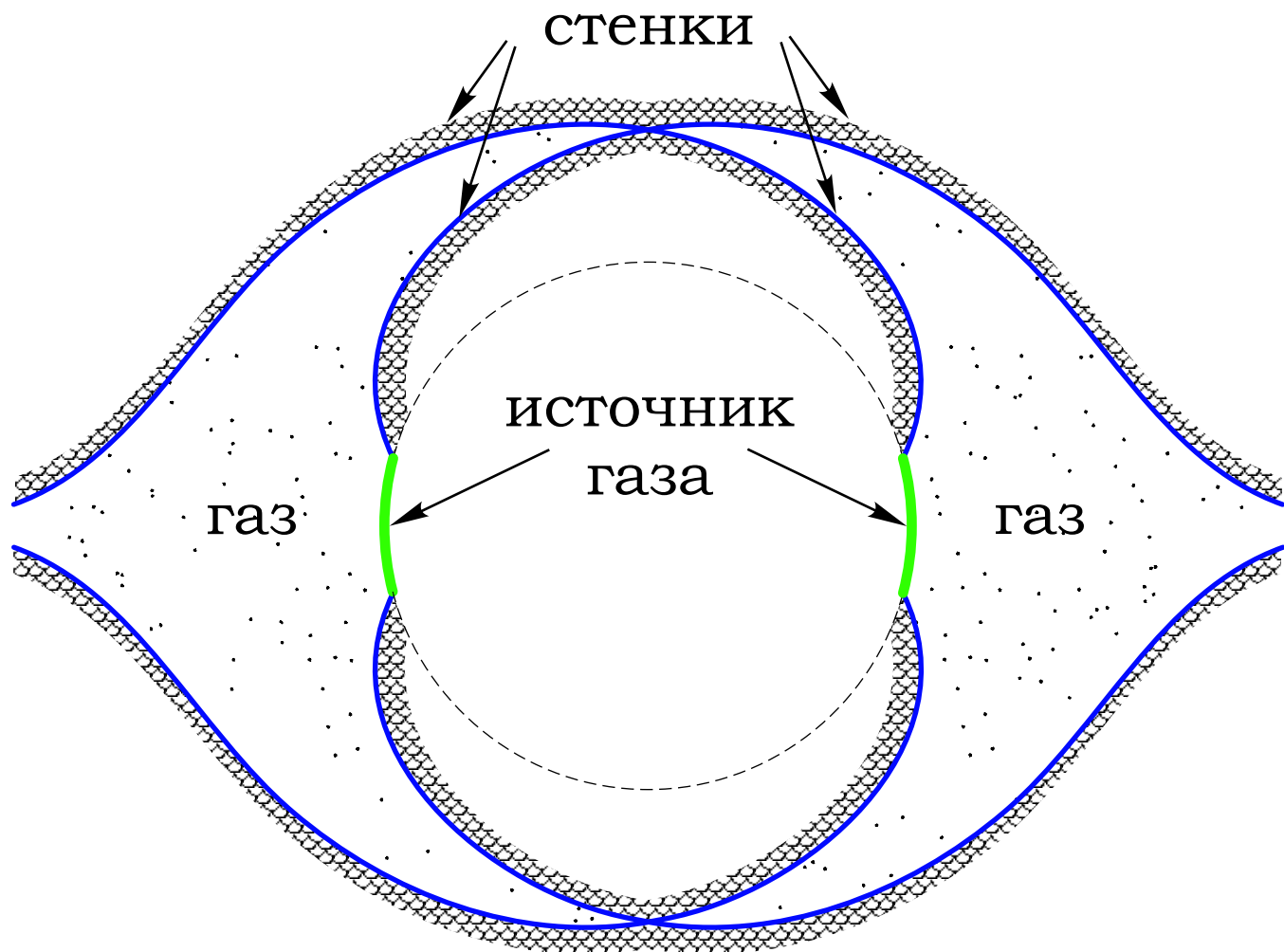
$$h_R^4 - \beta_0^2 \left(\frac{R^2 - 1}{R^2} \right) (1 + h^2) h_R^2 + \beta_0^2 \frac{(1 + h^2)^3}{R^4} = 0$$

Интегральные кривые ключевого уравнения на плоскости (h,R)

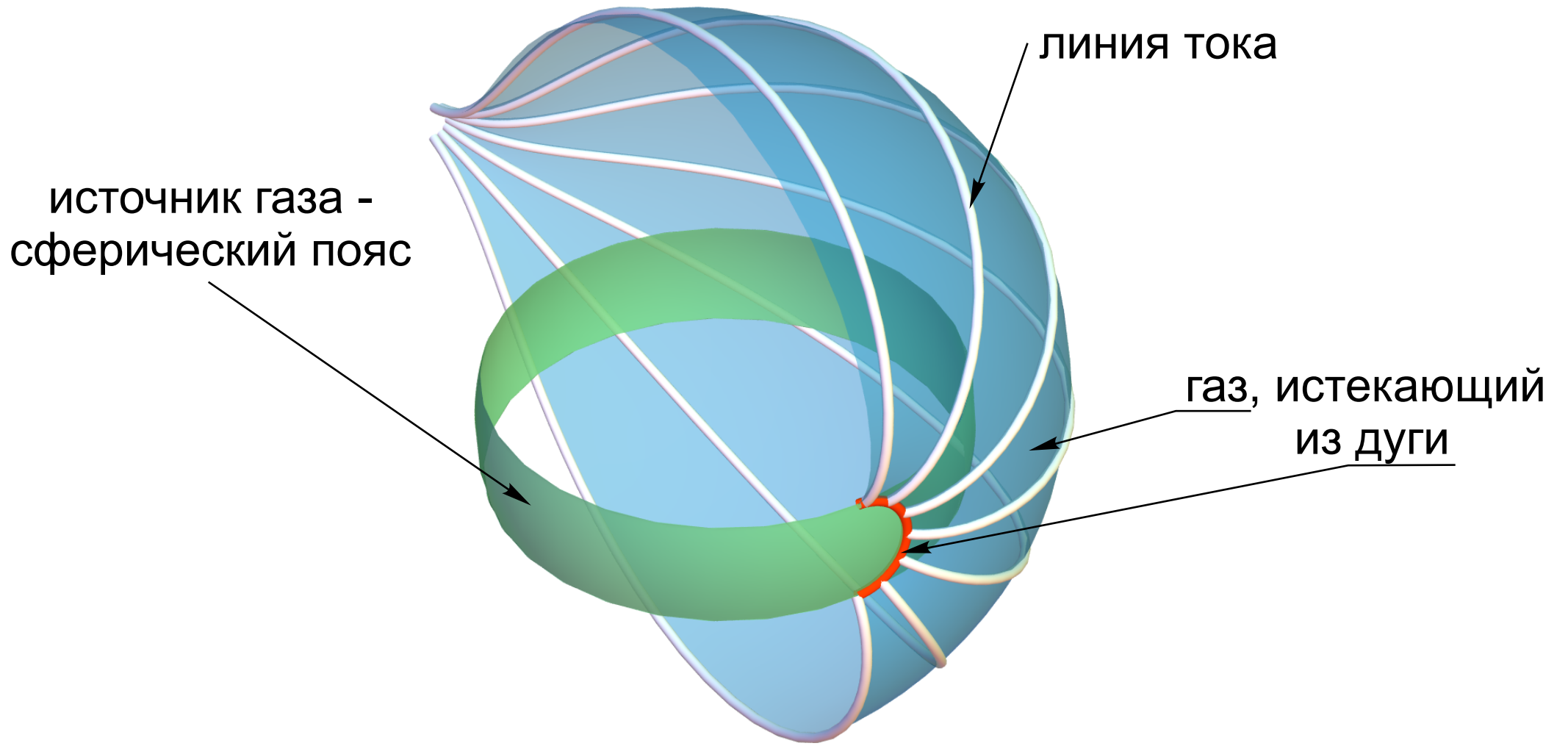


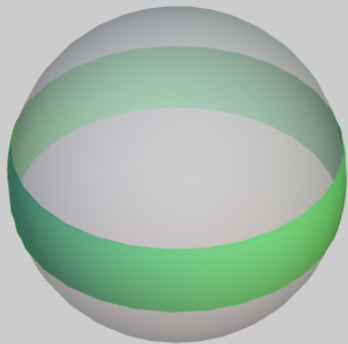
Интегральные кривые на листе \pm

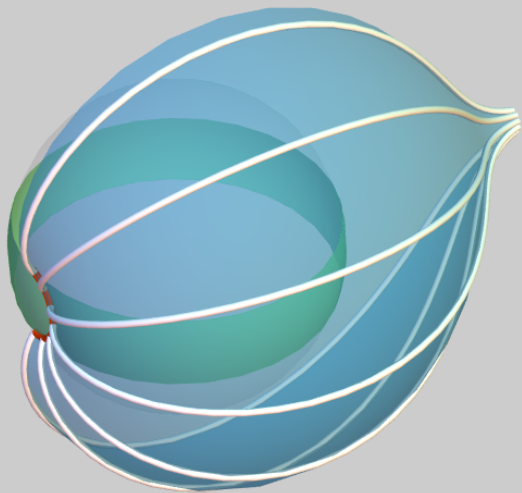


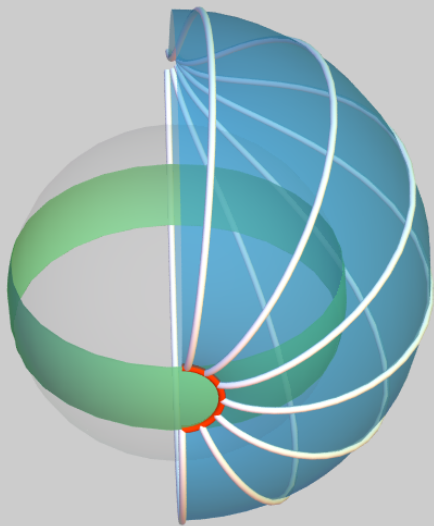


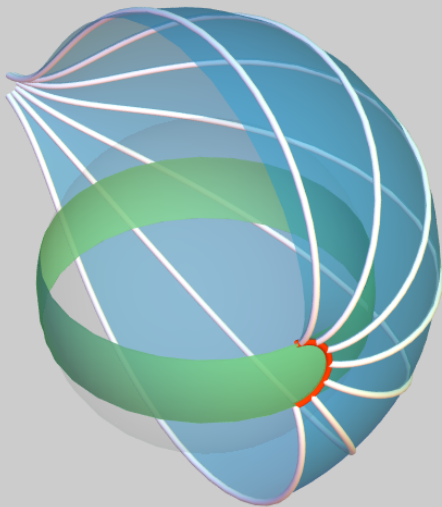
меридиональное сечение течения

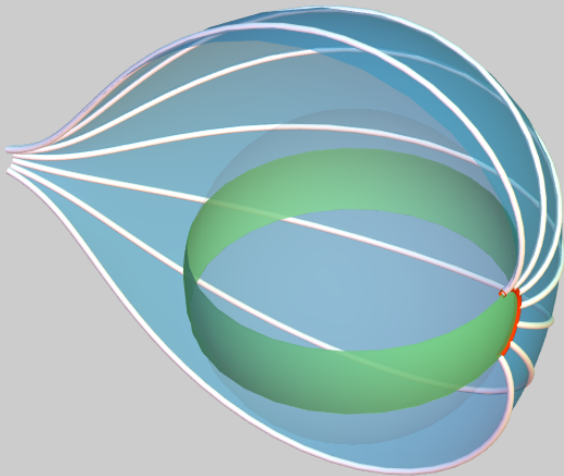


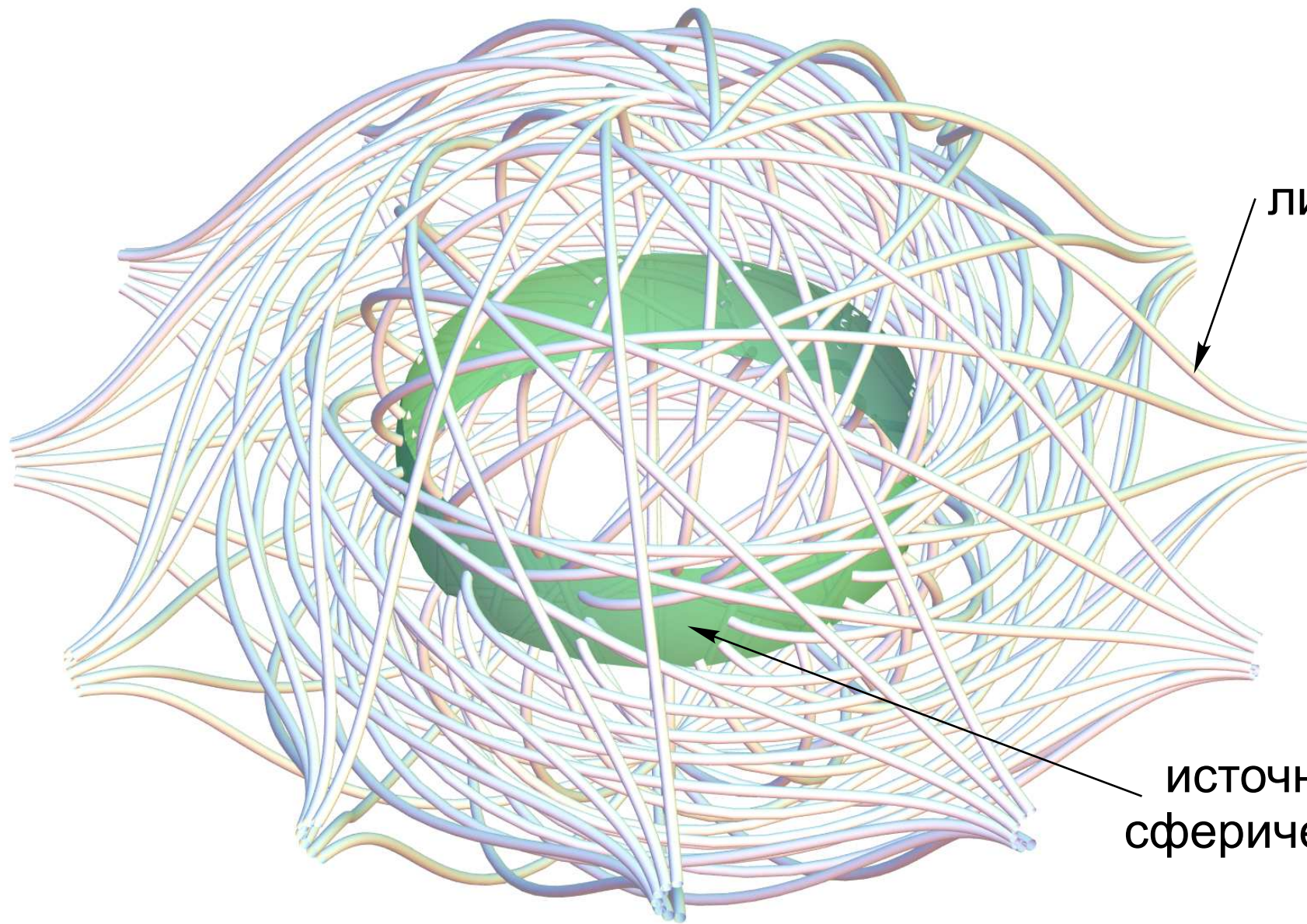






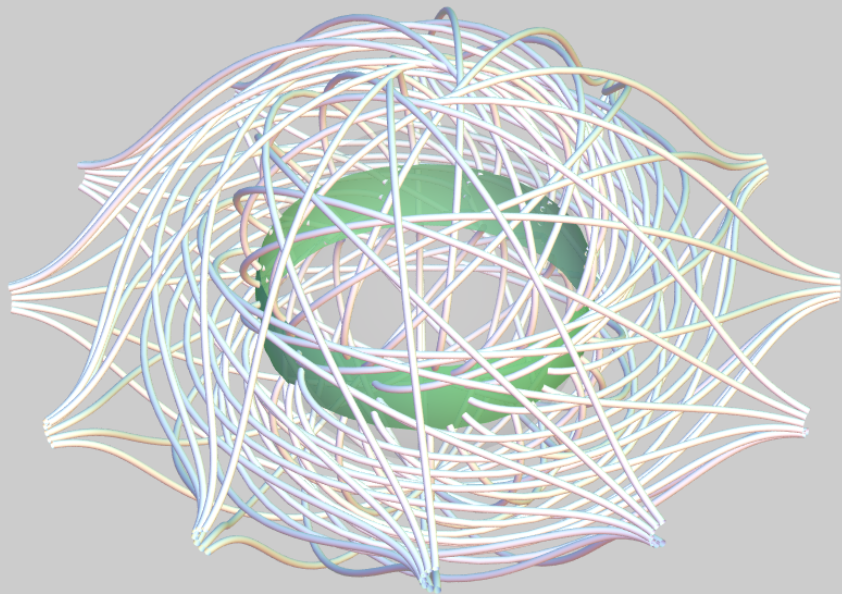


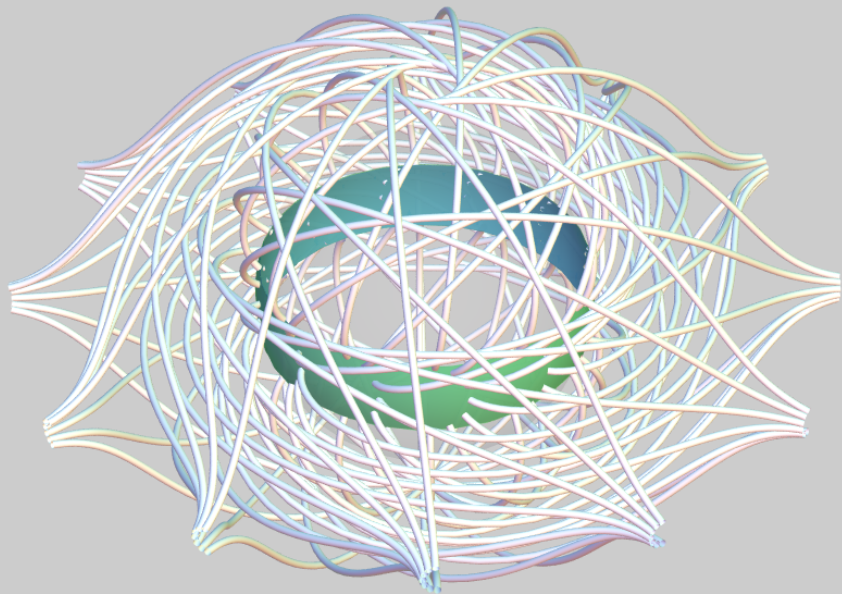


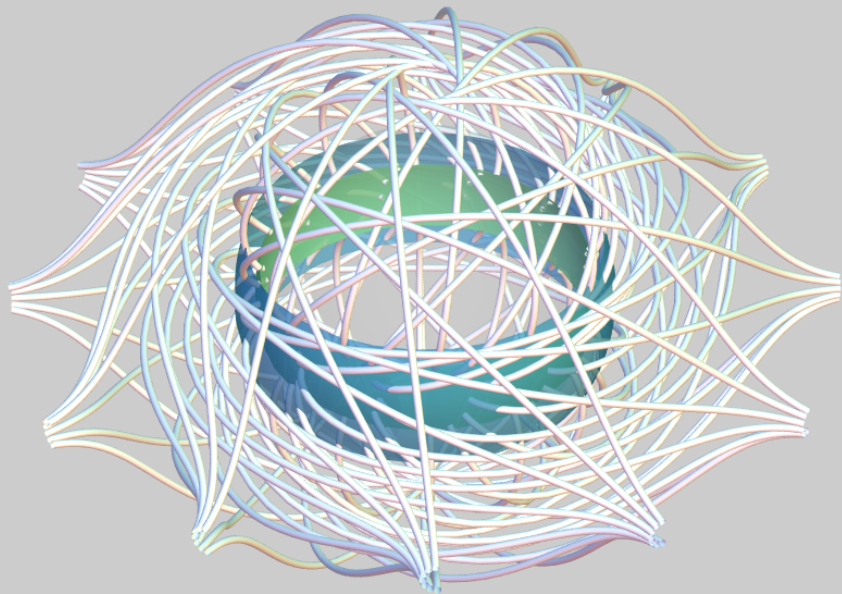


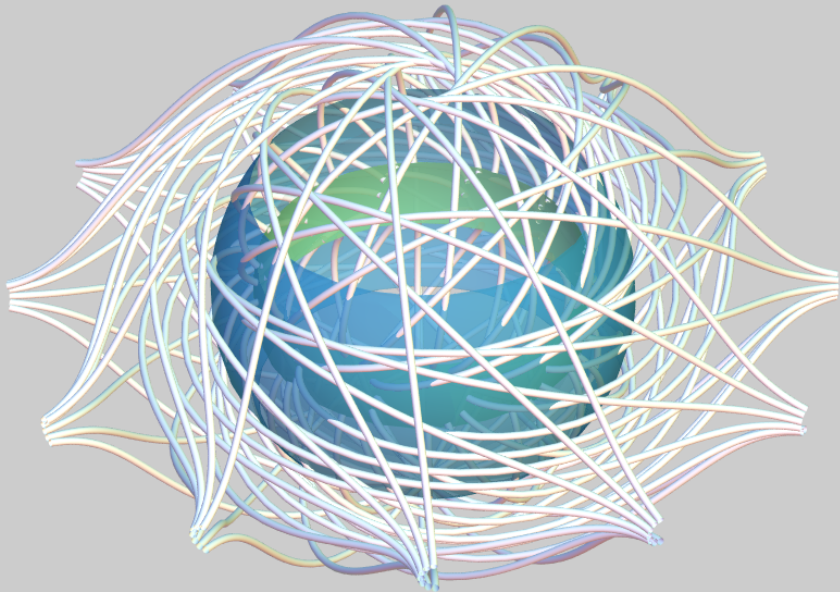
ЛИНИЯ ТОКА

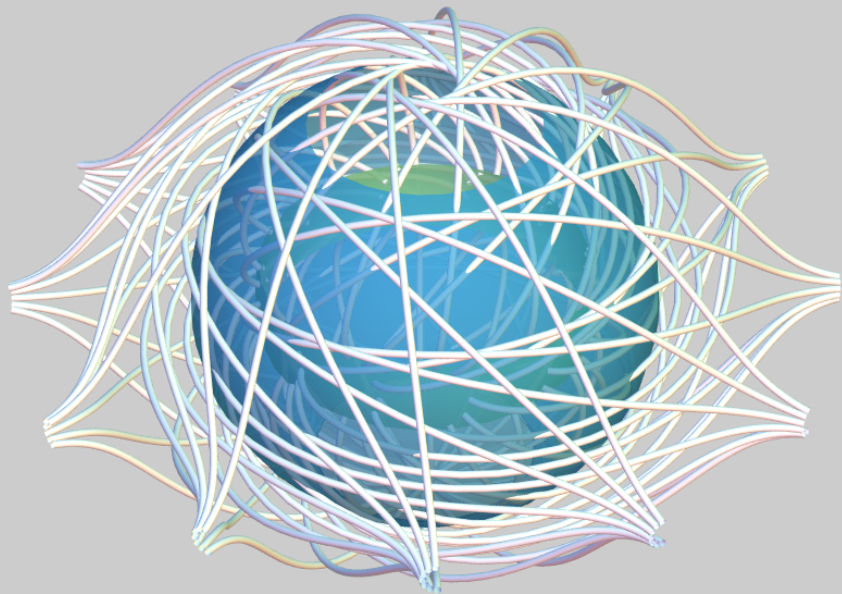
ИСТОЧНИК газа -
сферический пояс

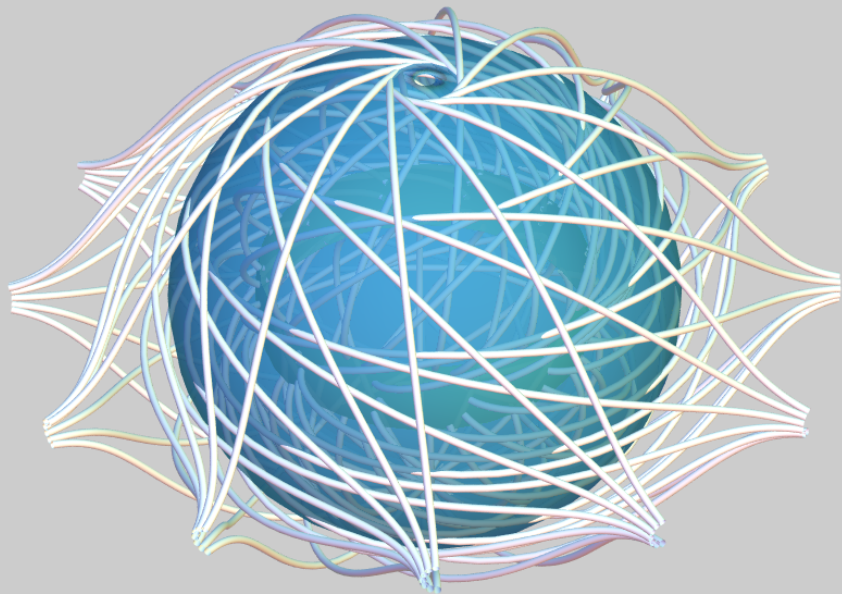


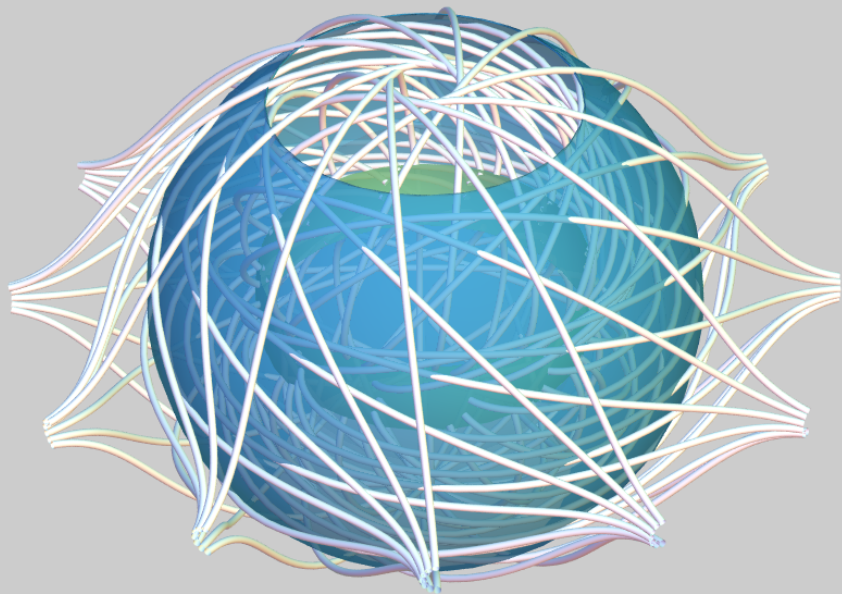


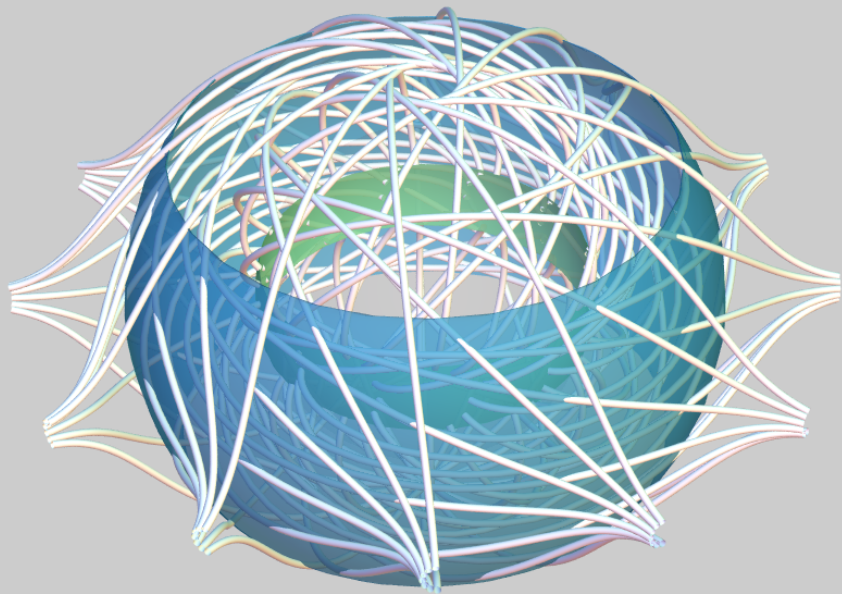


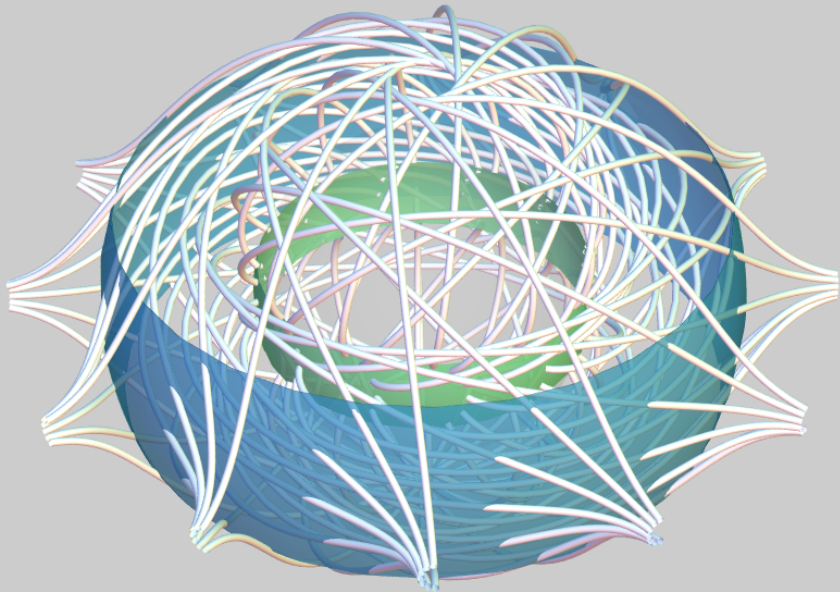


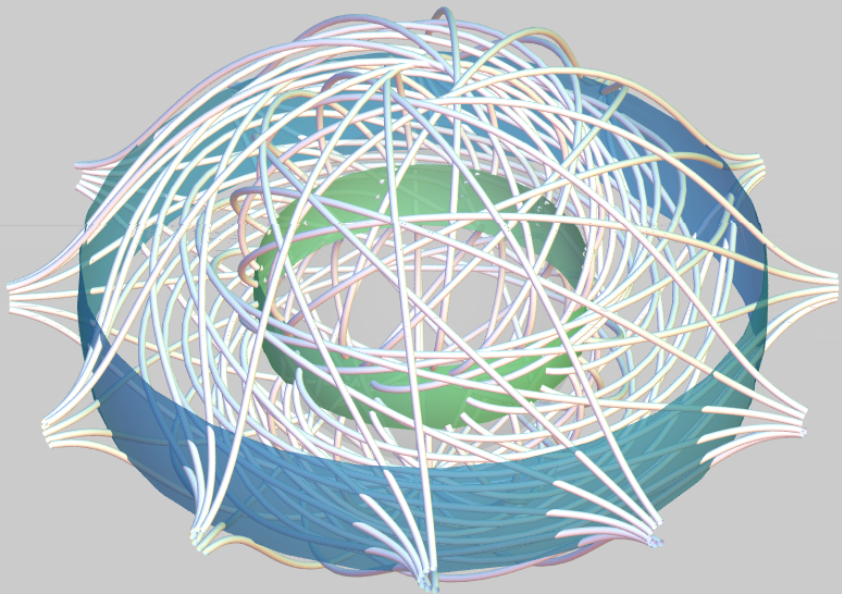


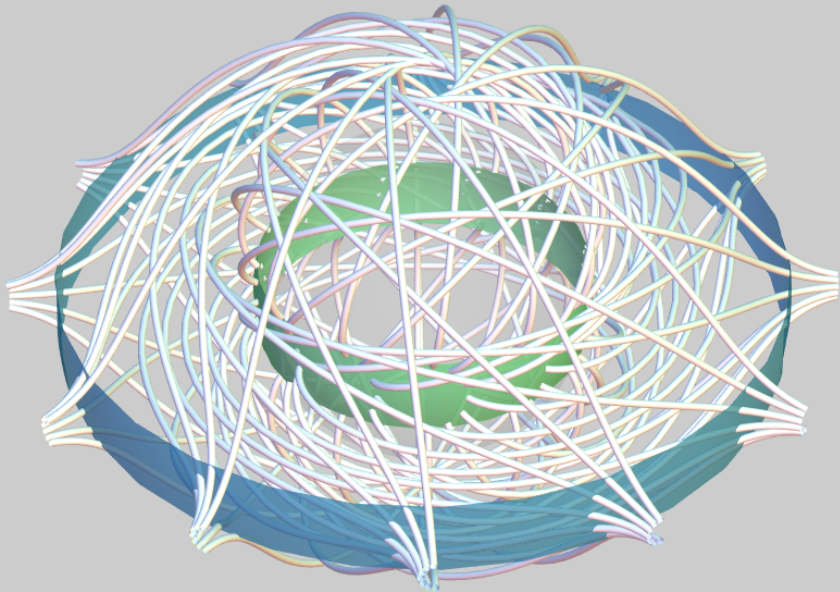


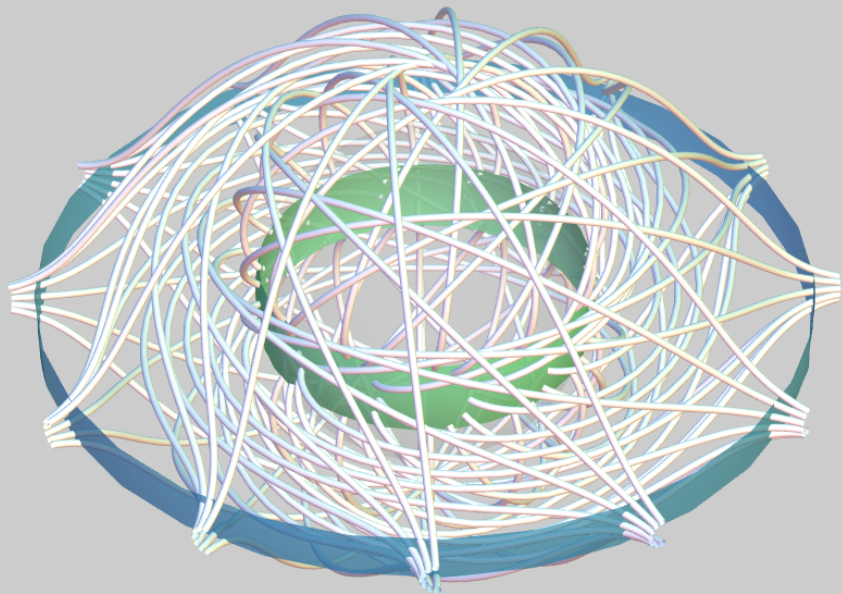


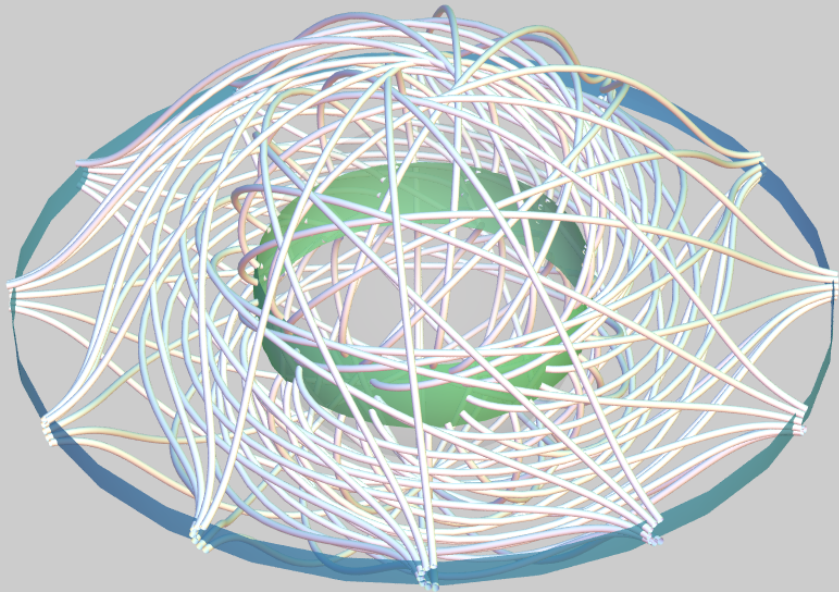






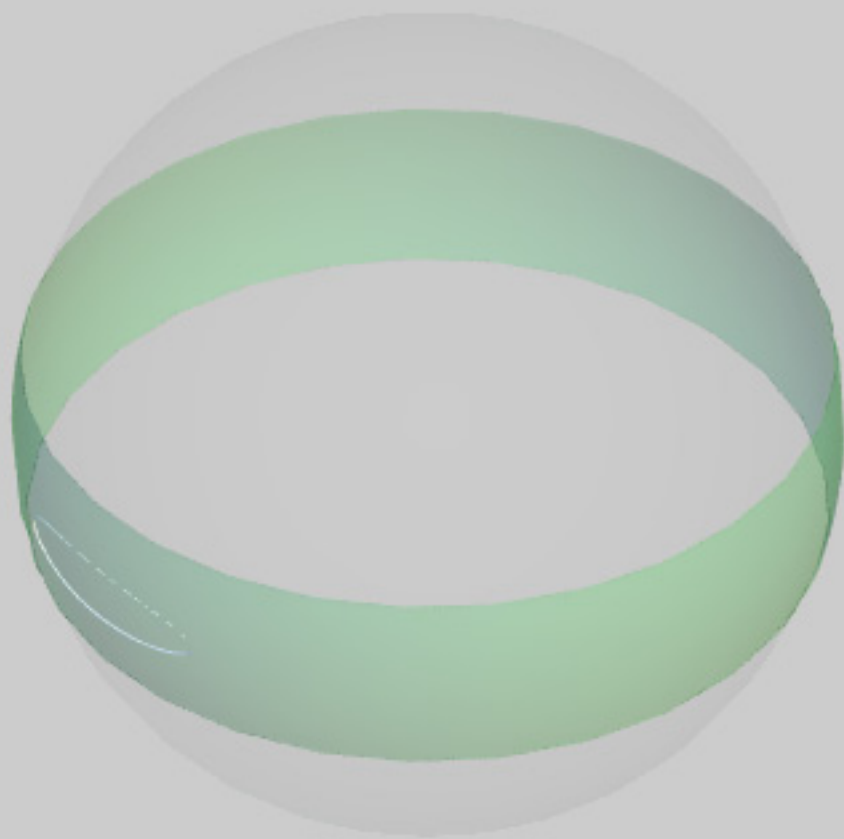


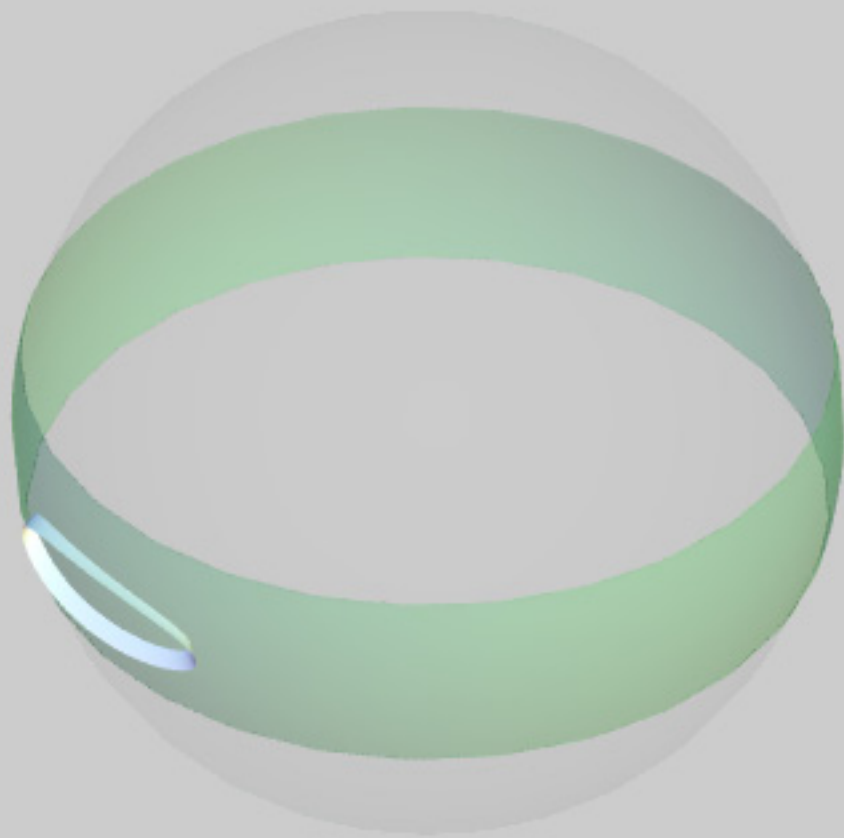


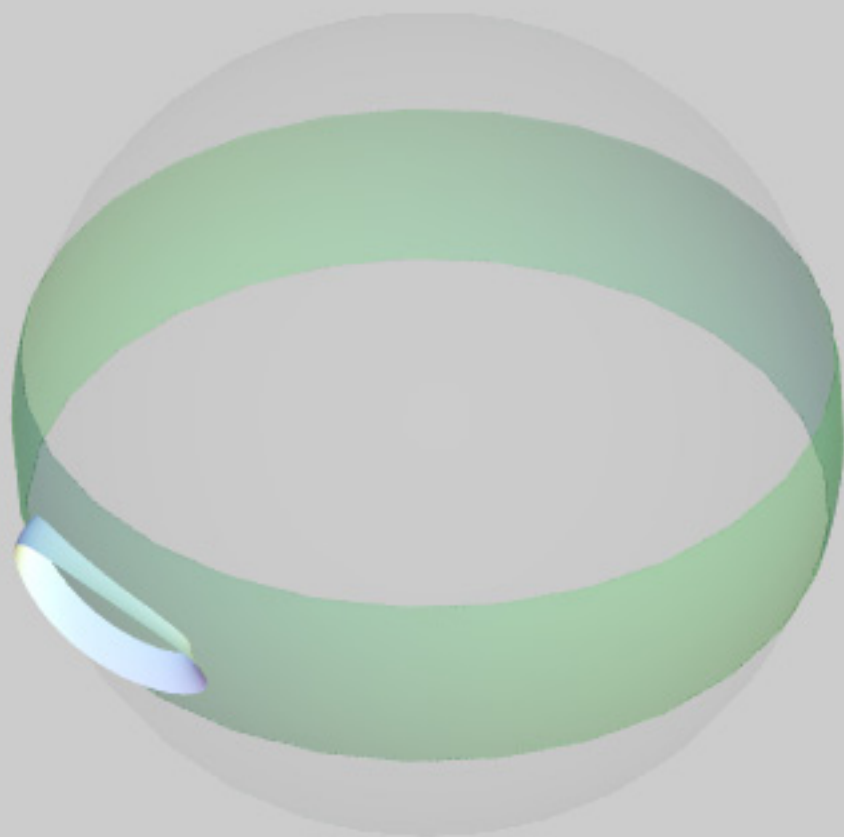


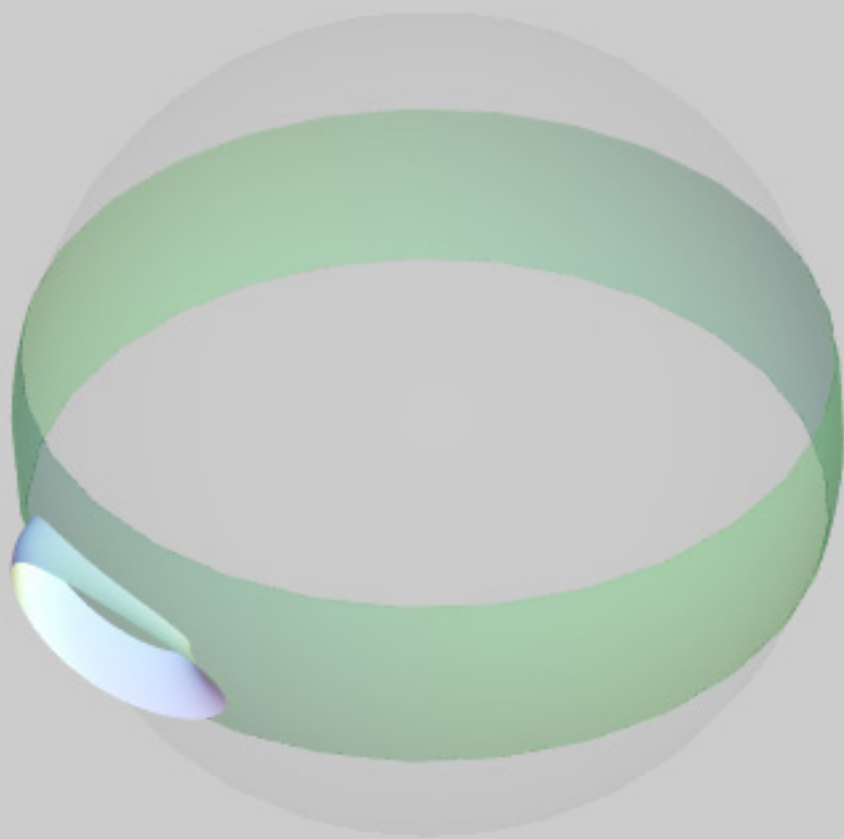
повтор

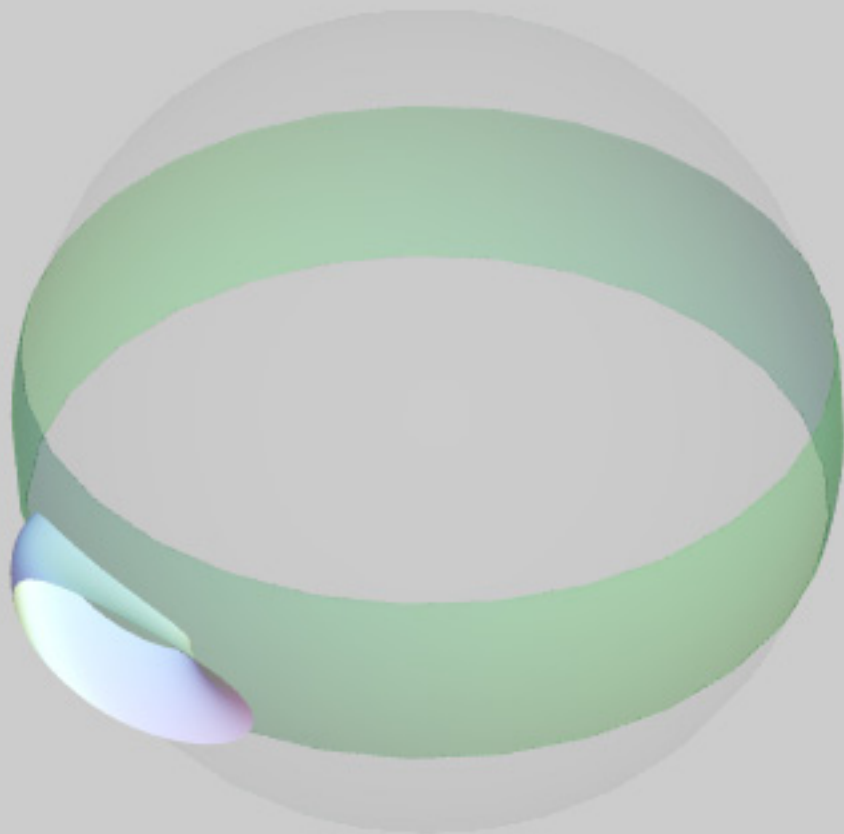
в начало

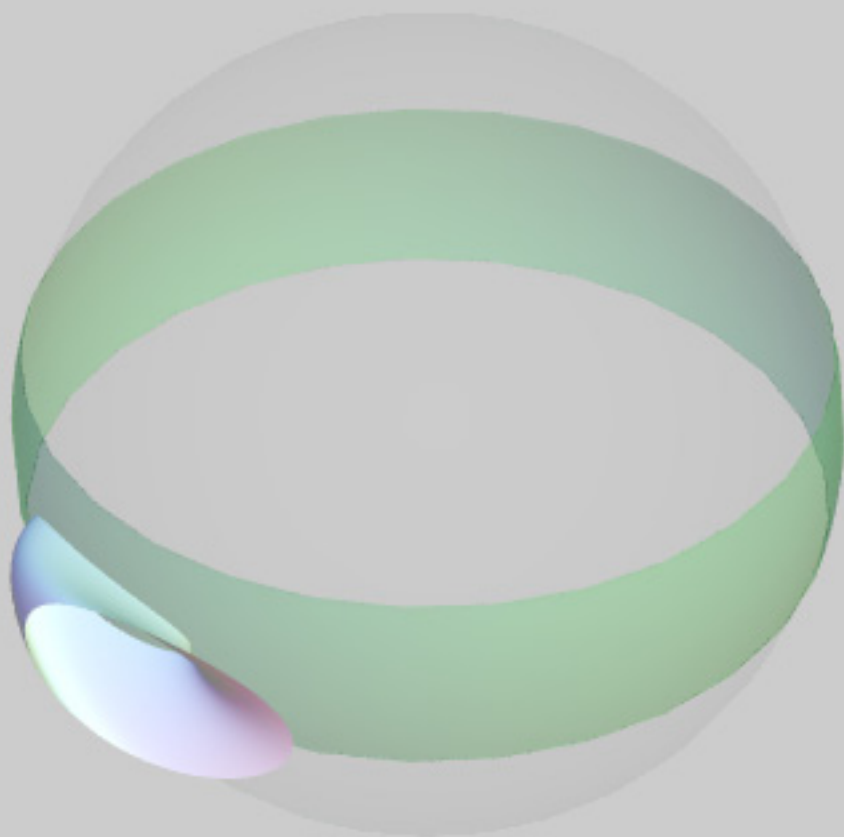


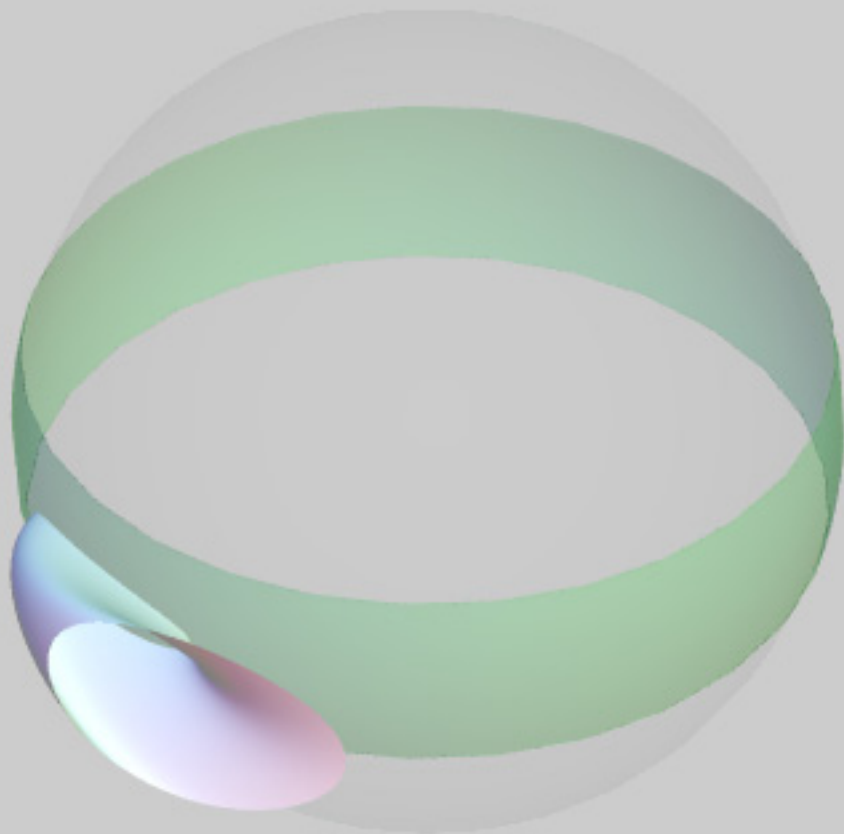


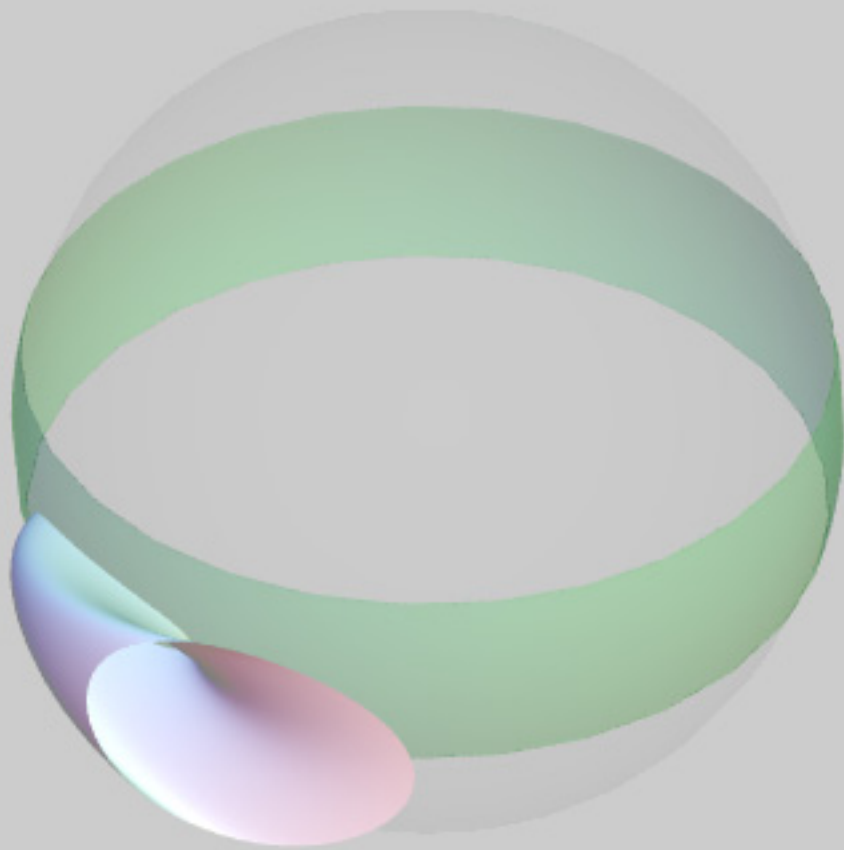


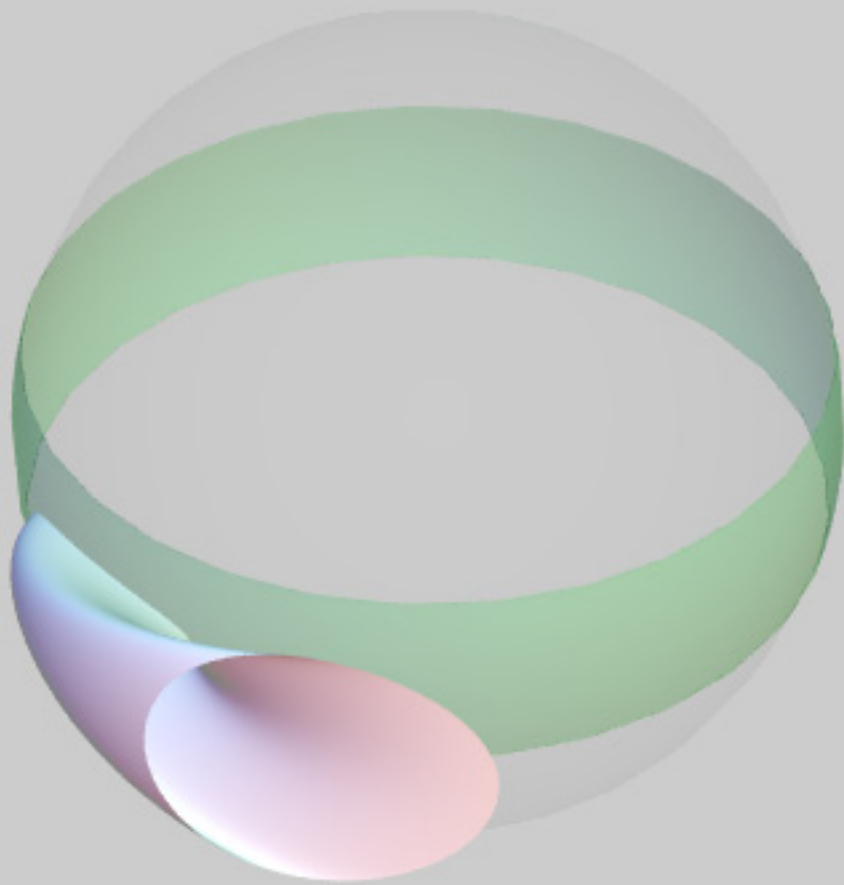


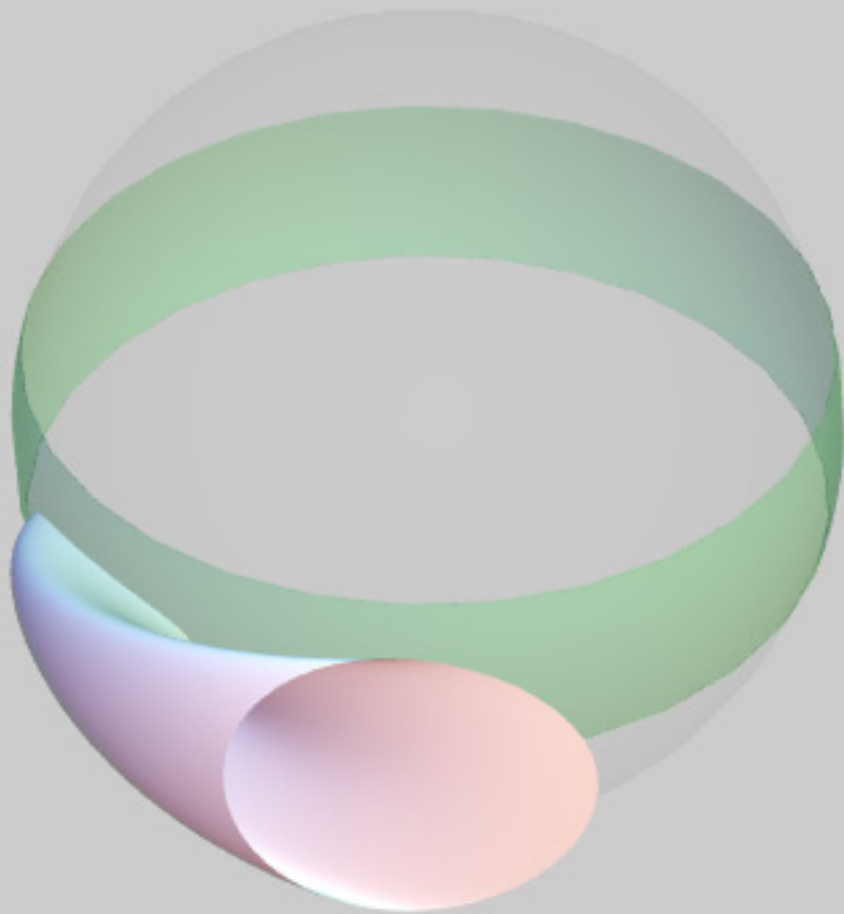


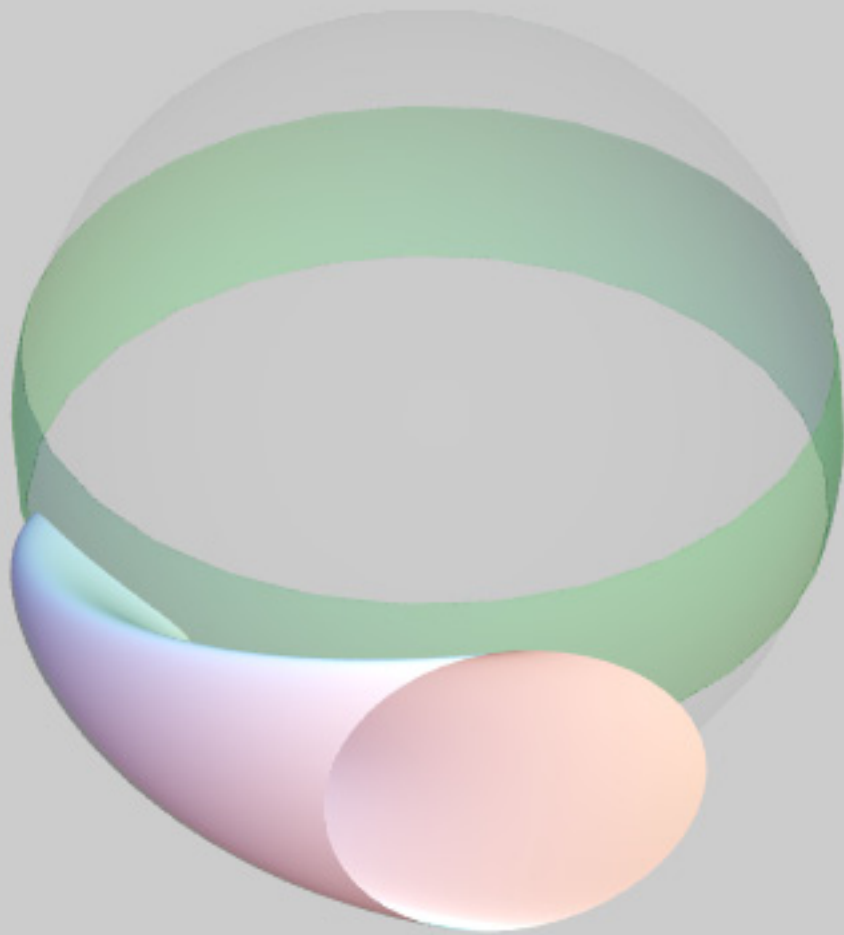


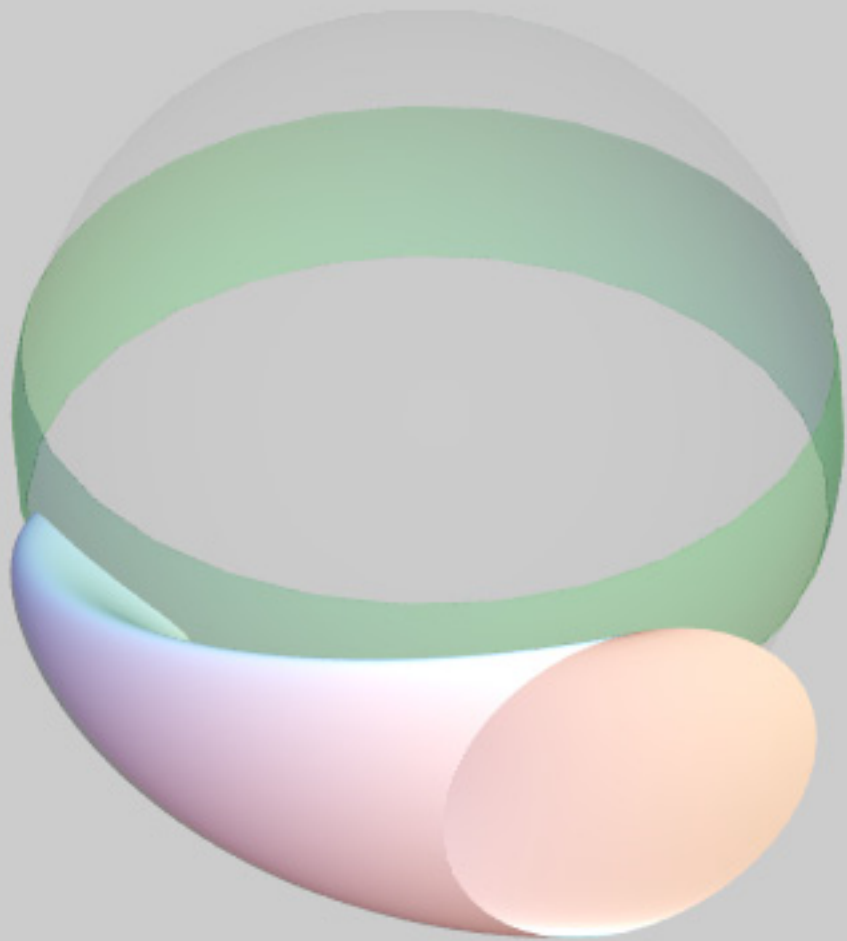


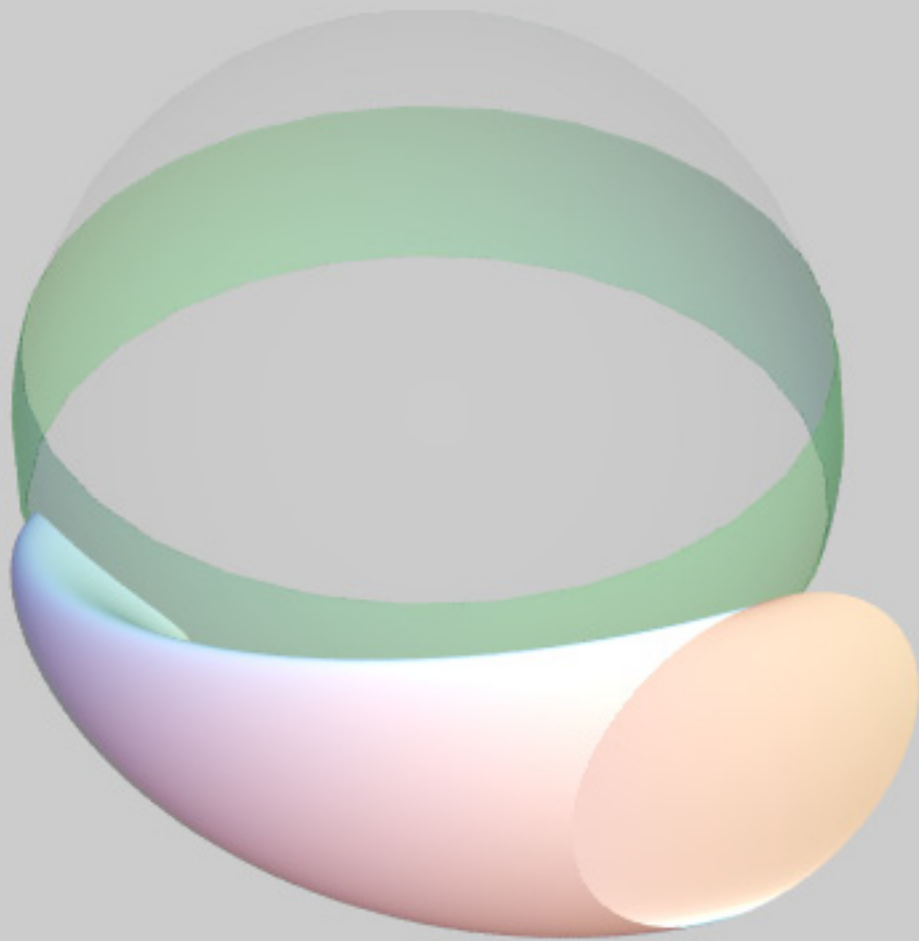


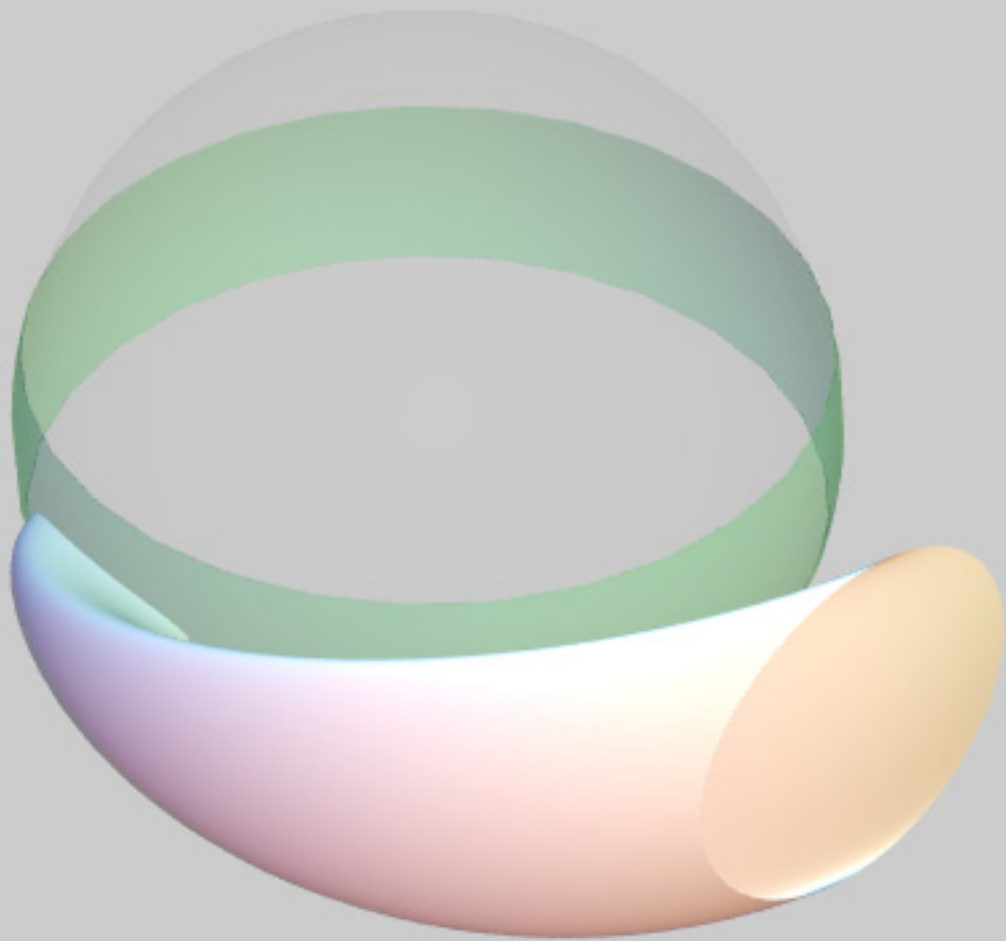


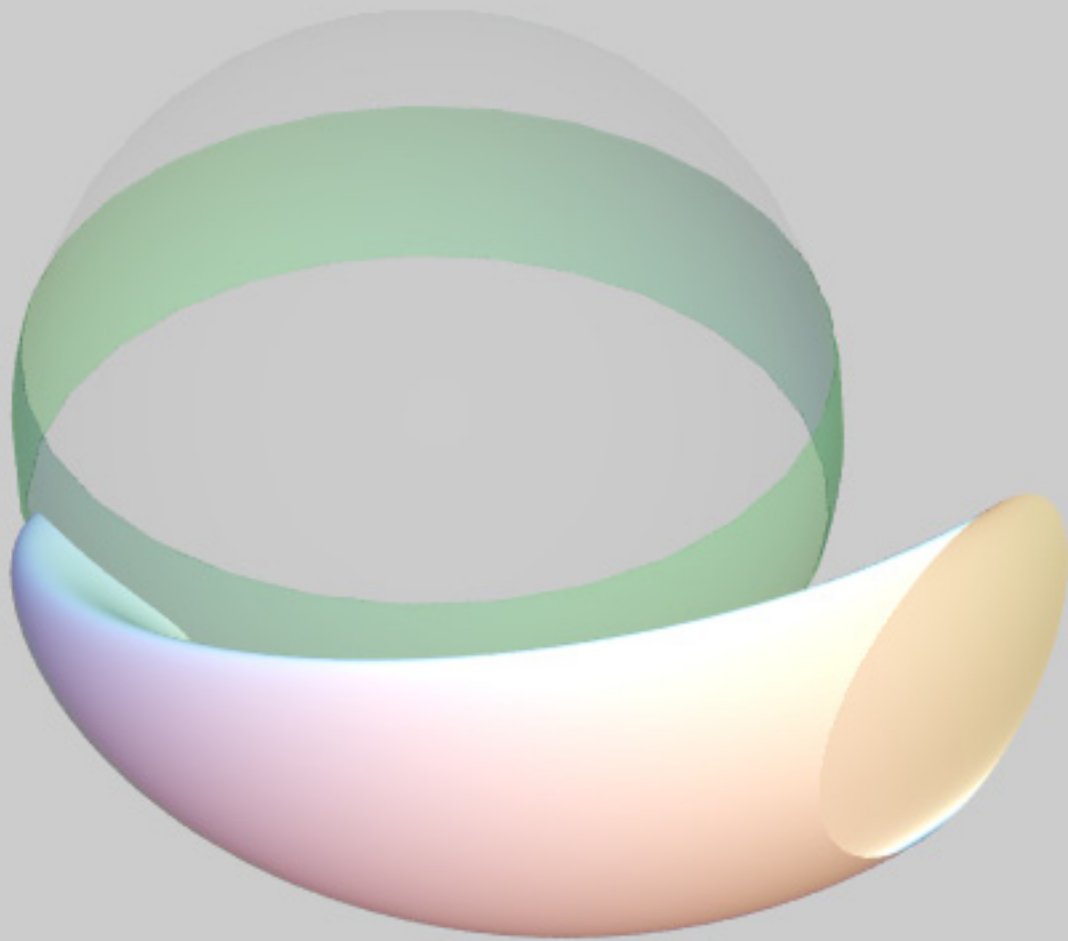


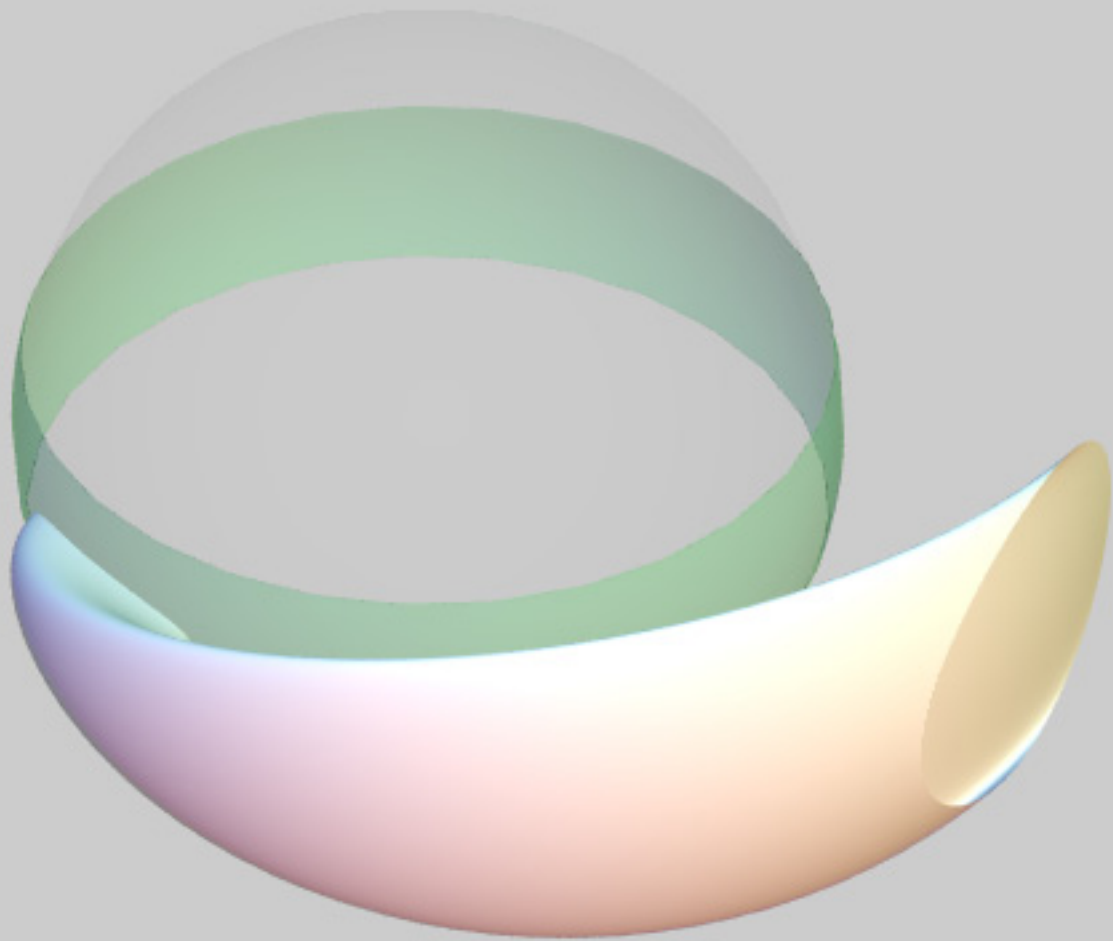


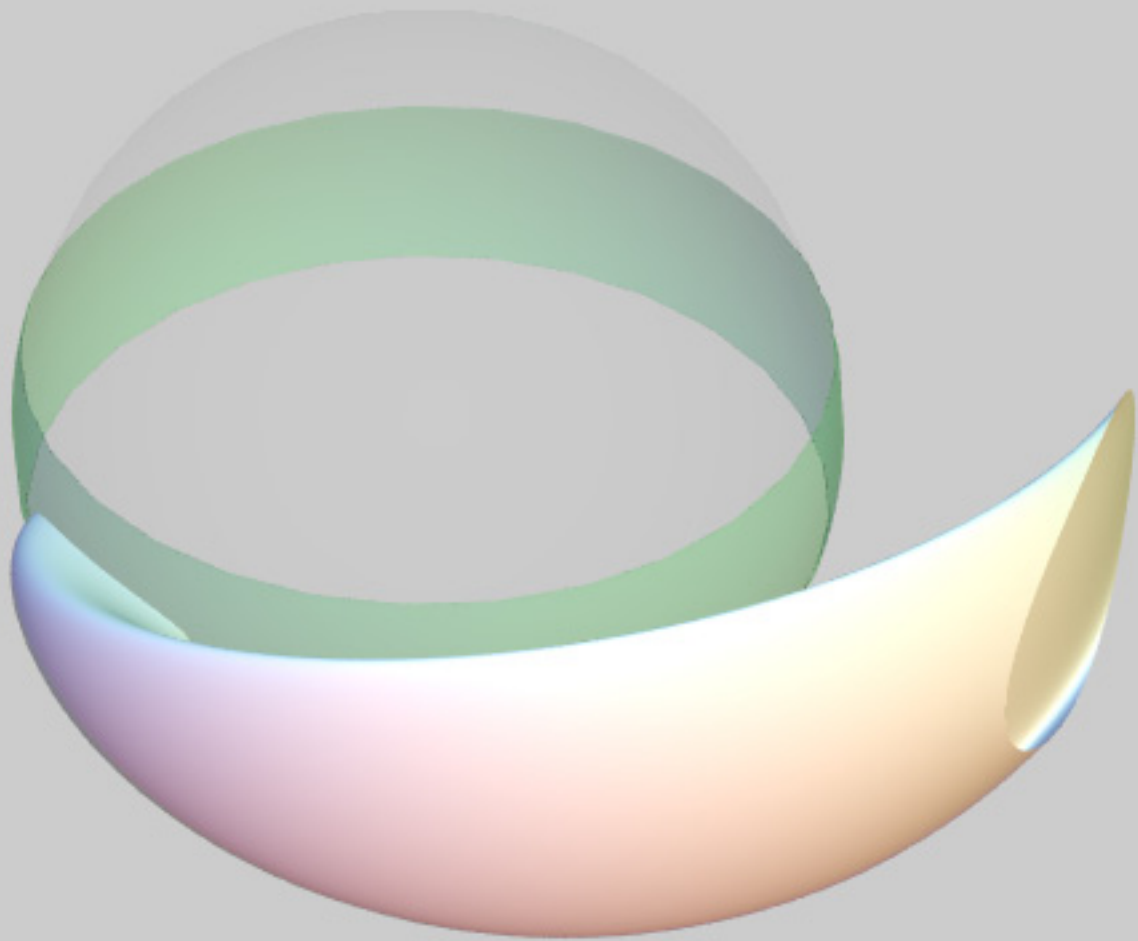


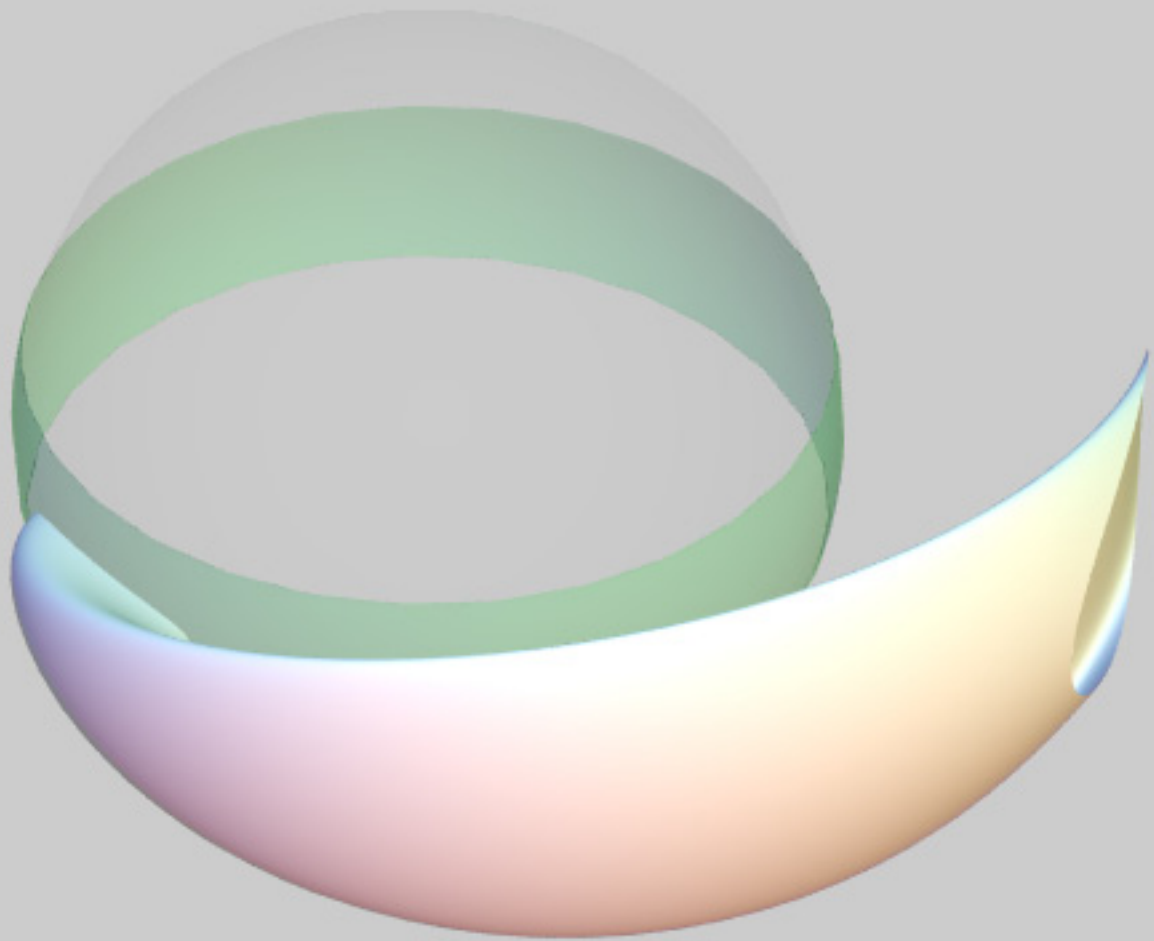


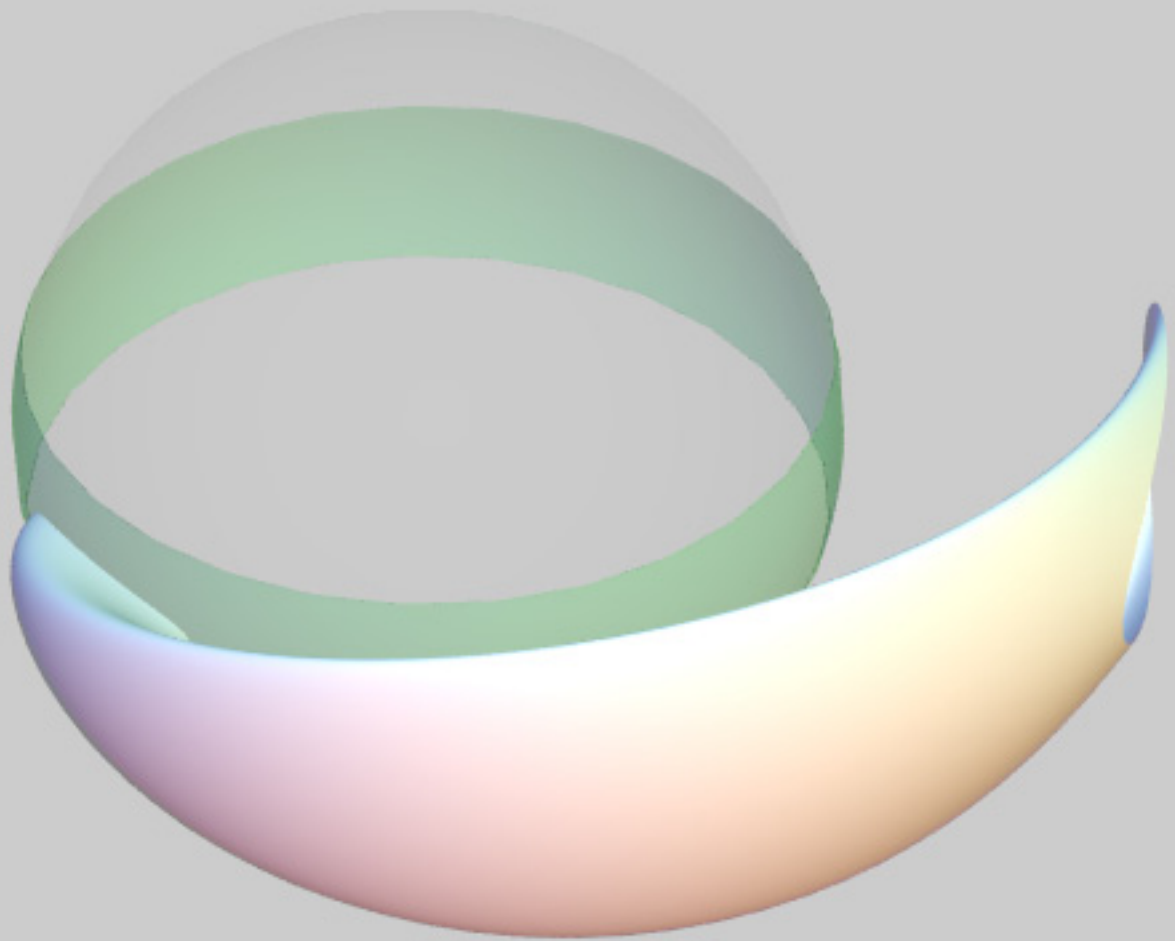


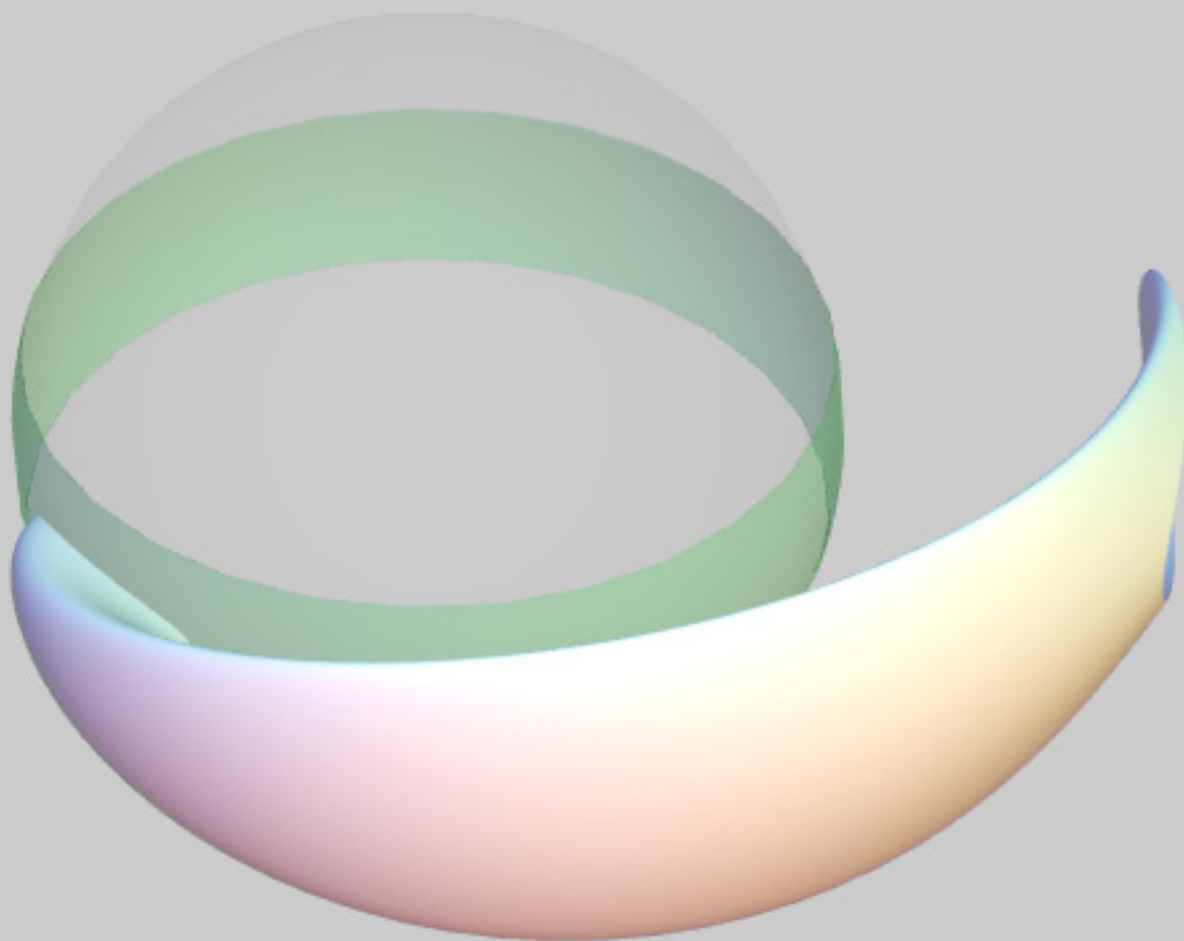


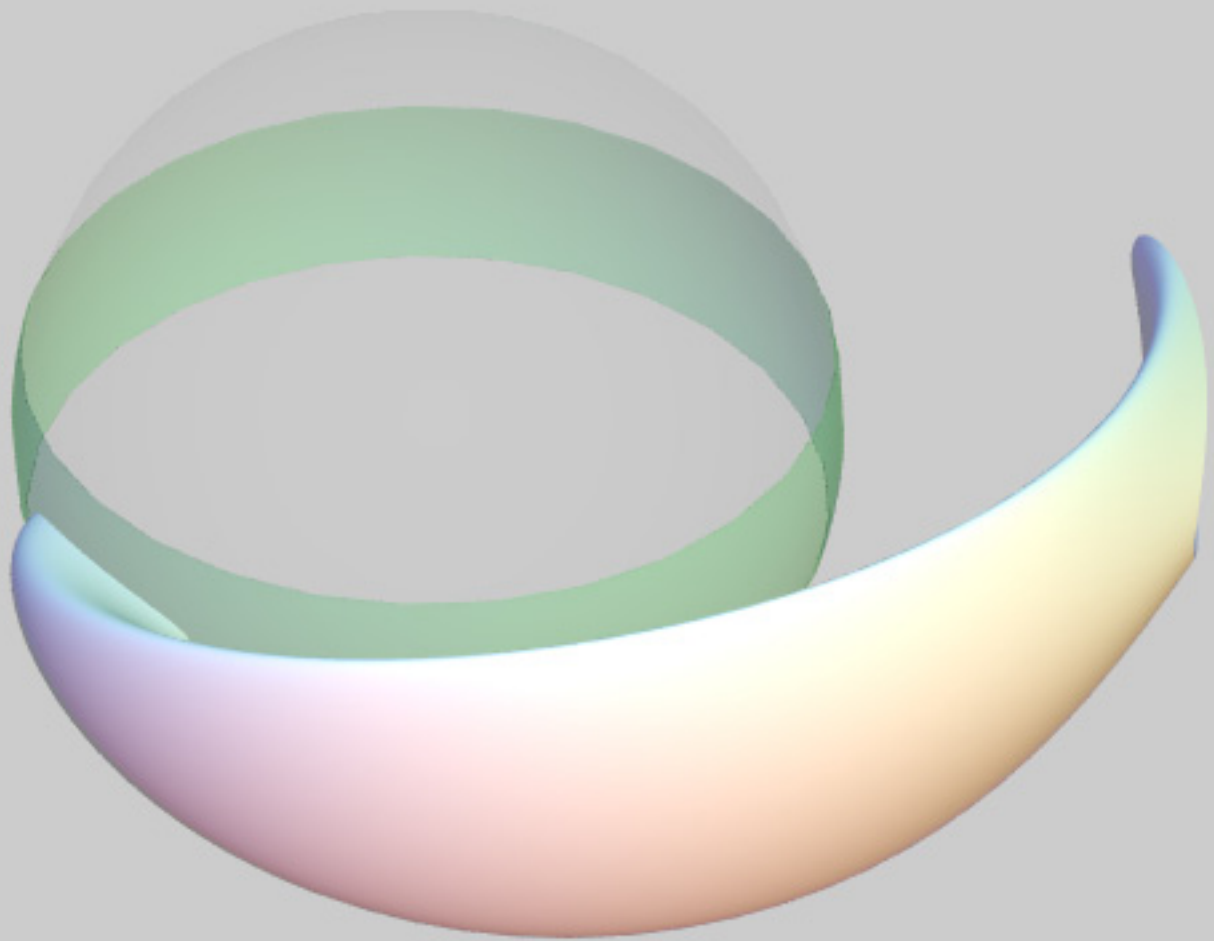


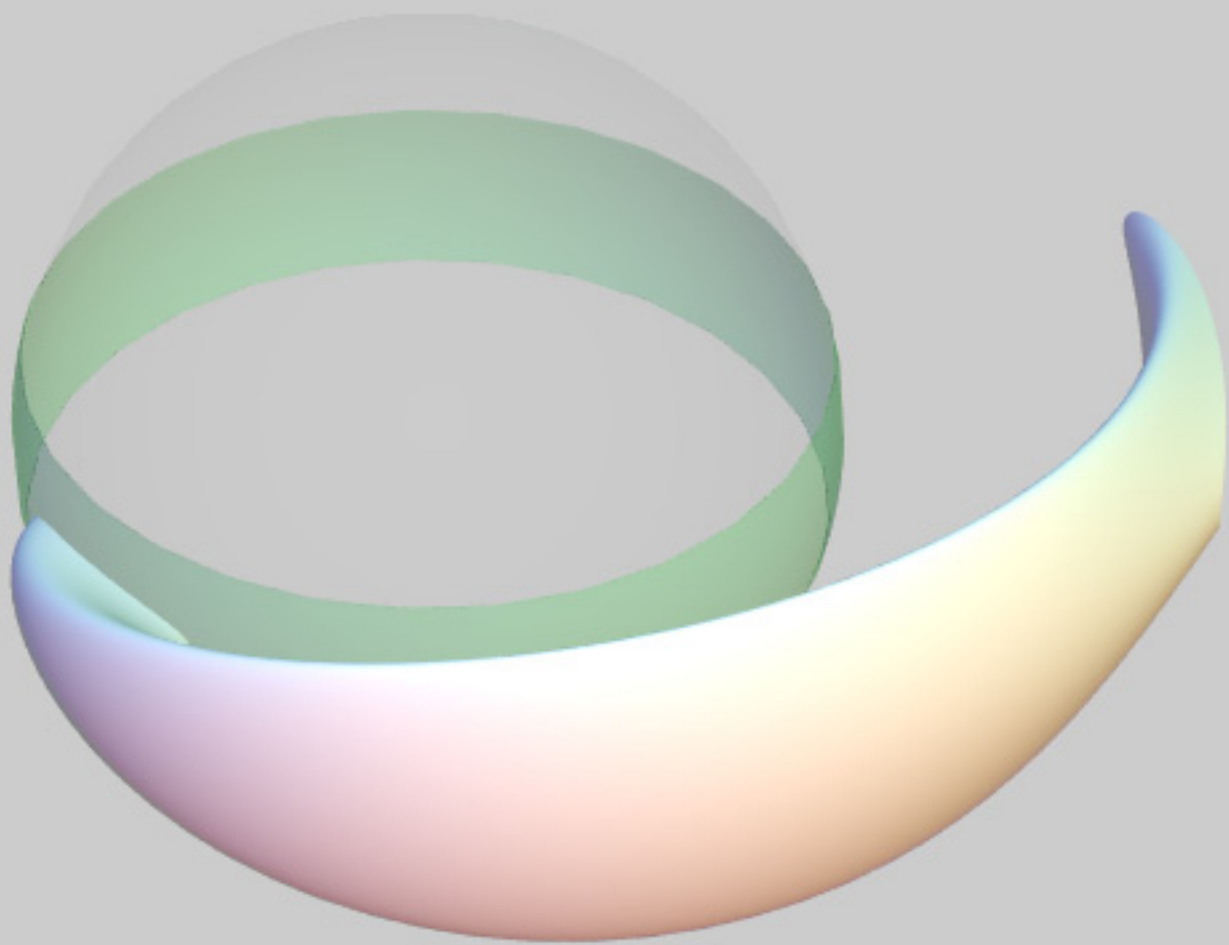


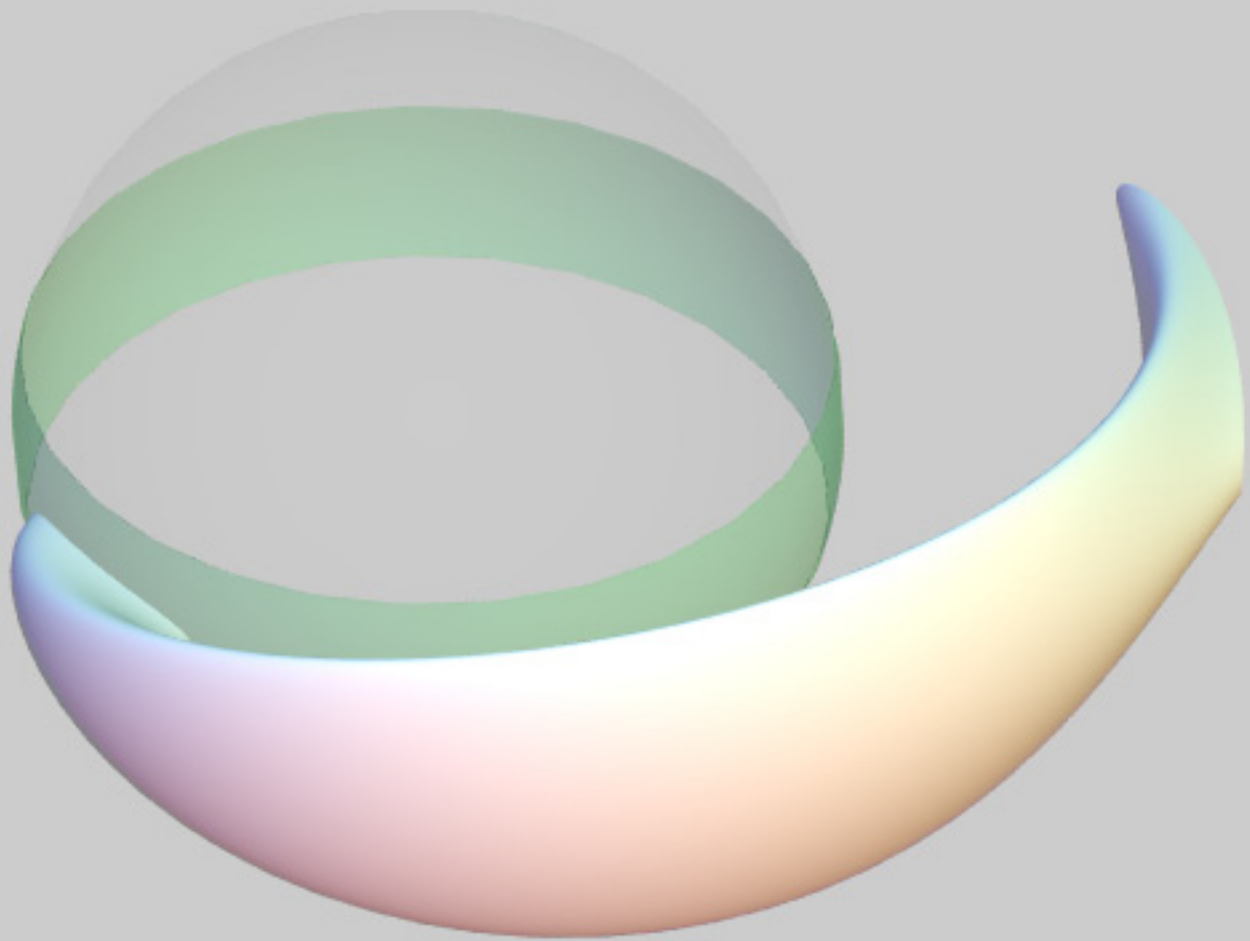


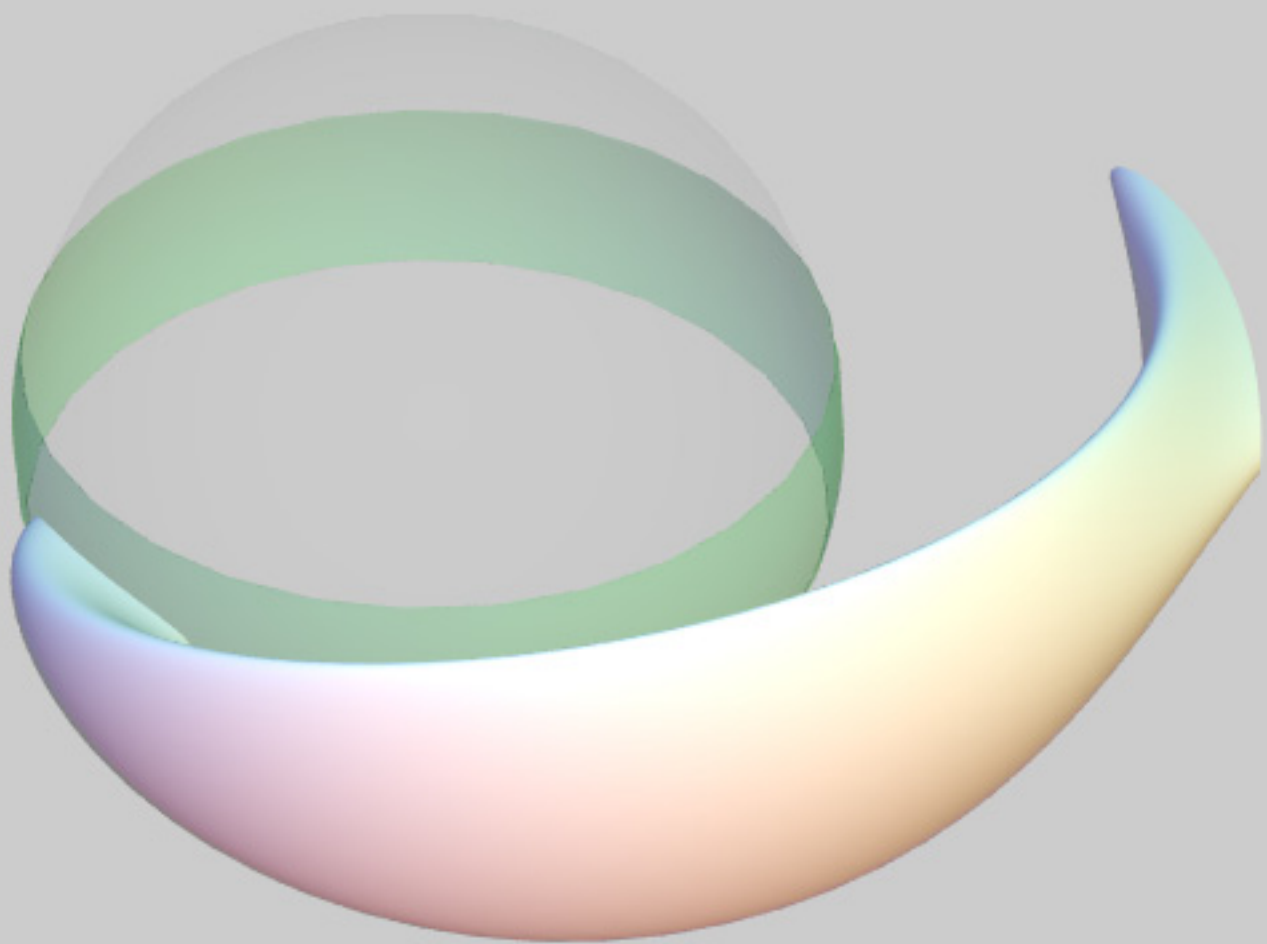


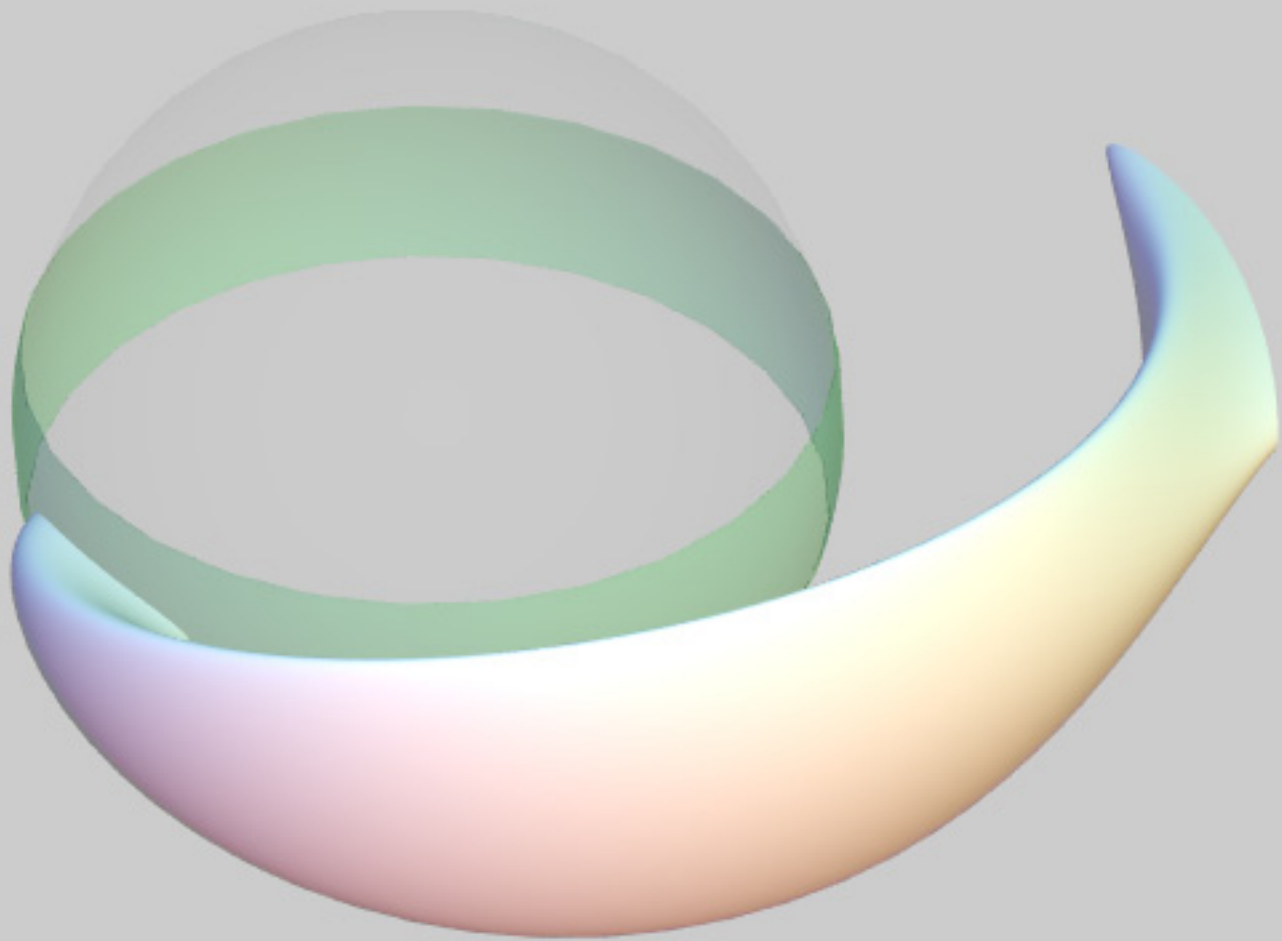


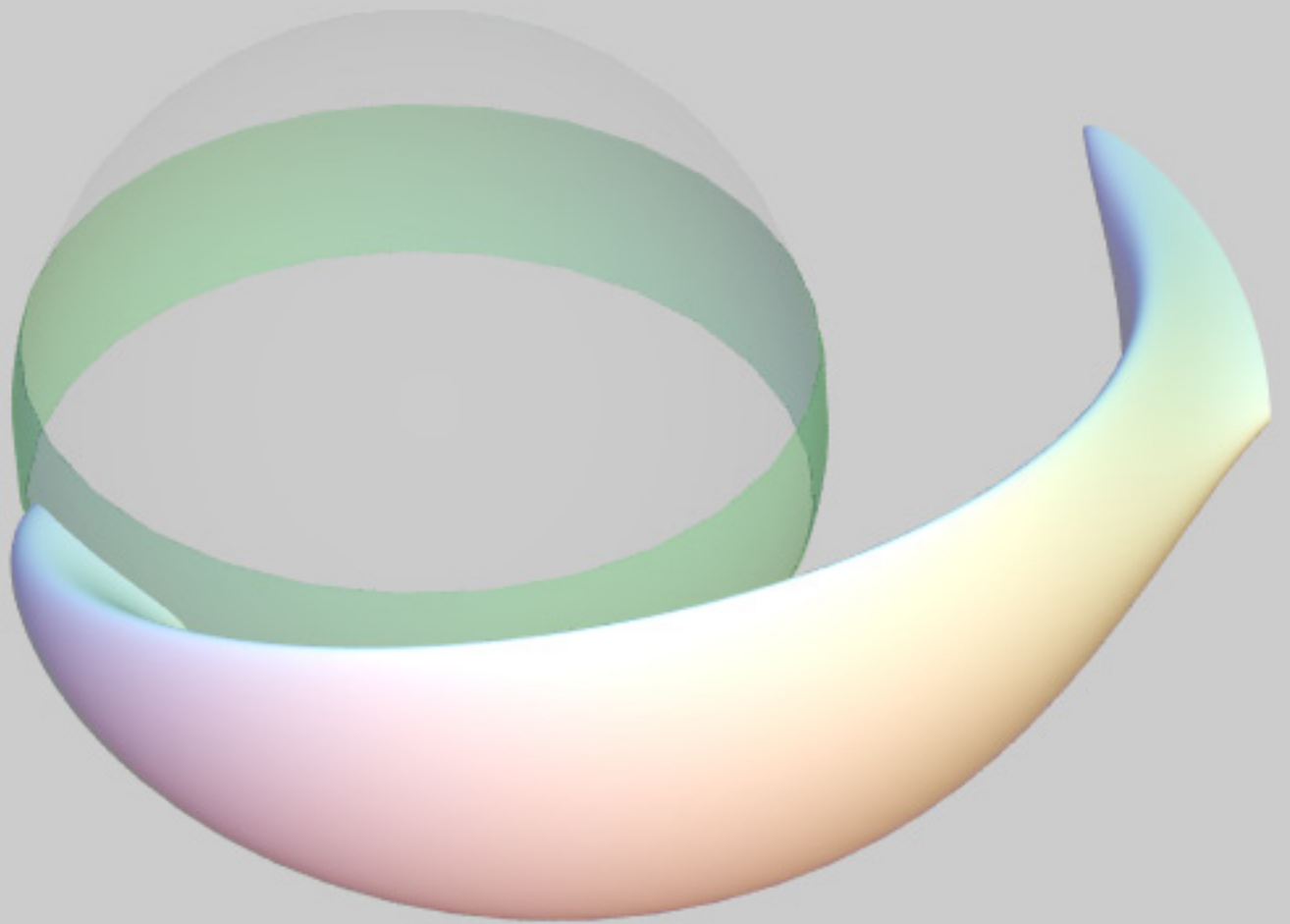


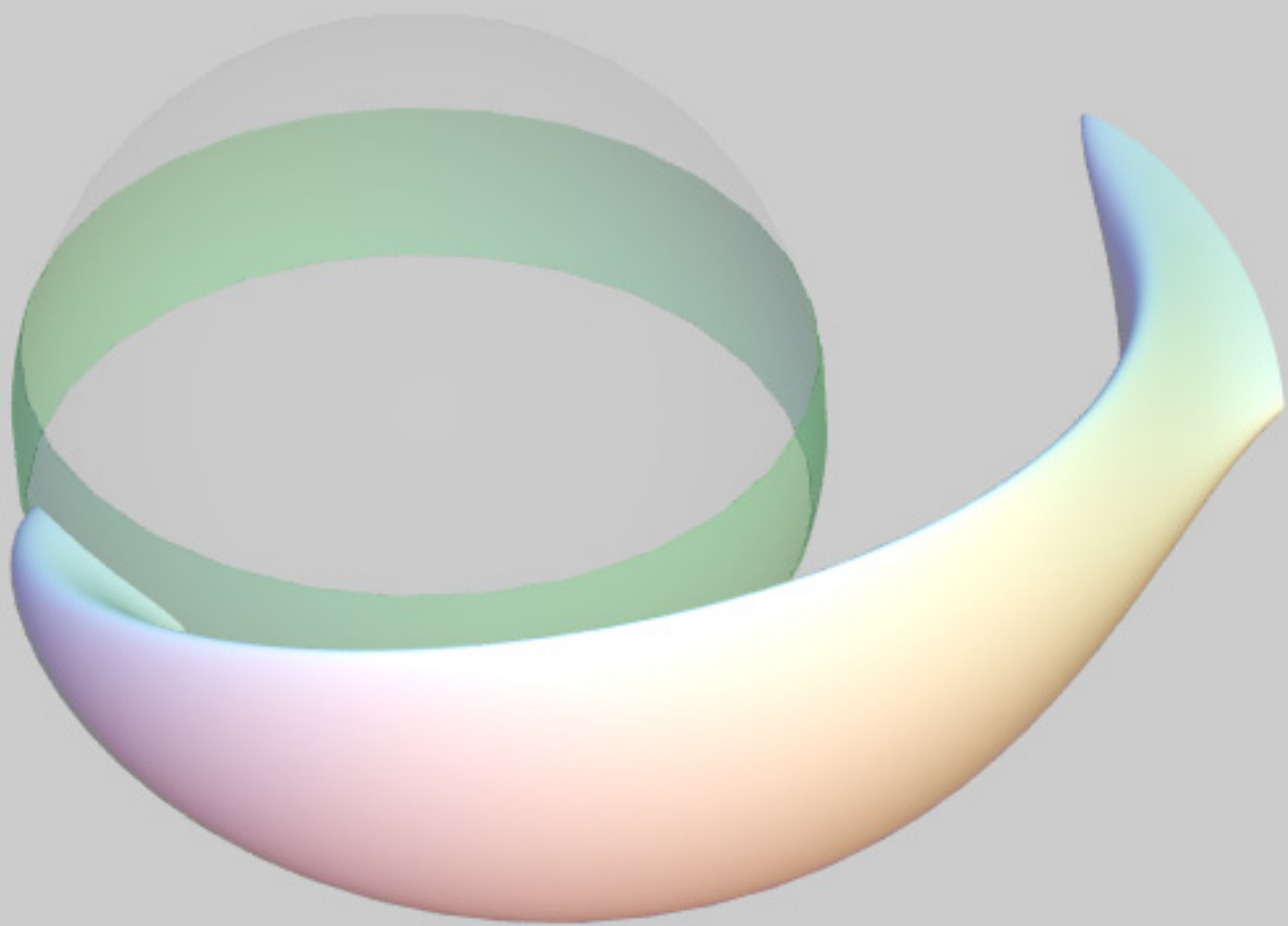


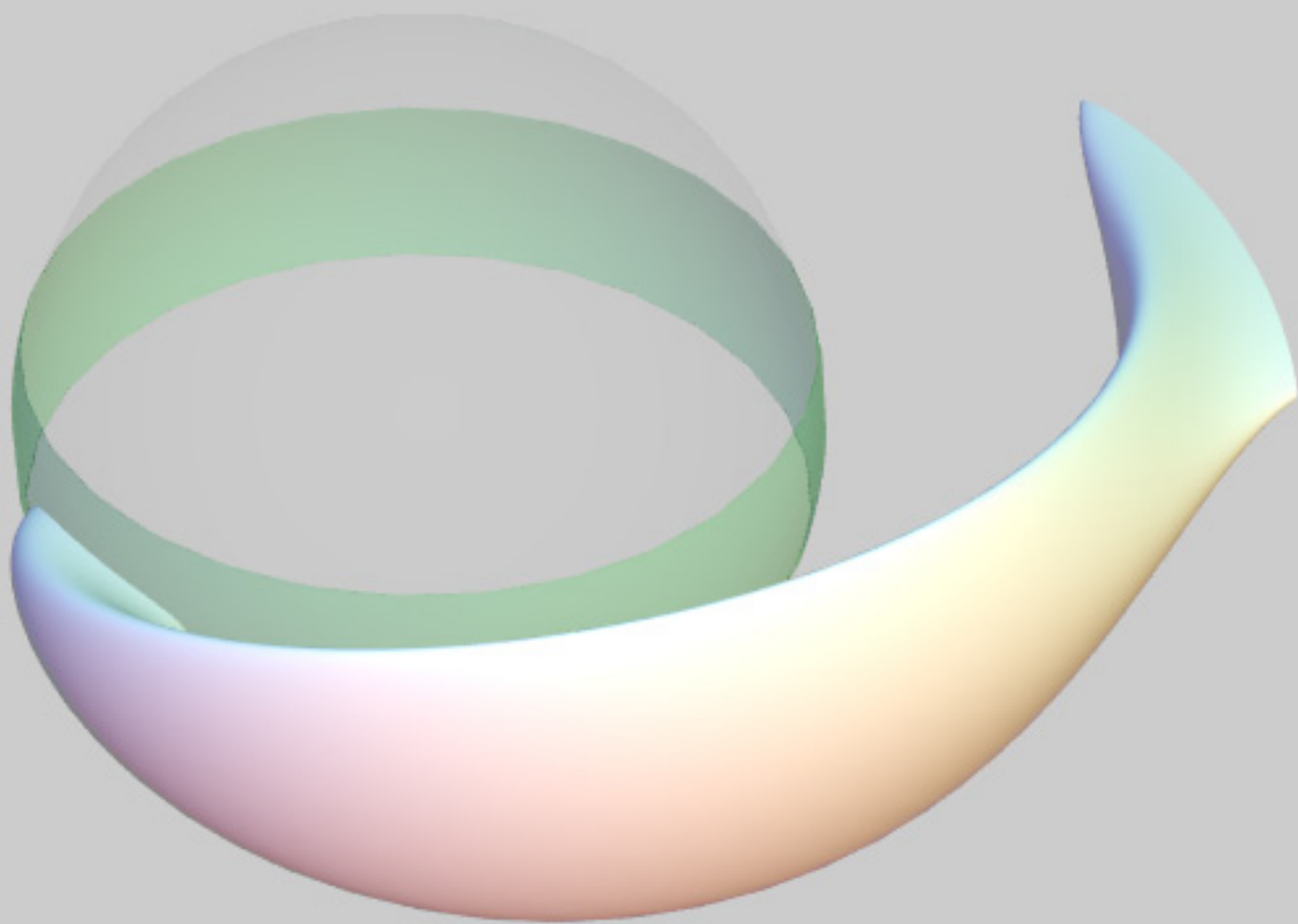


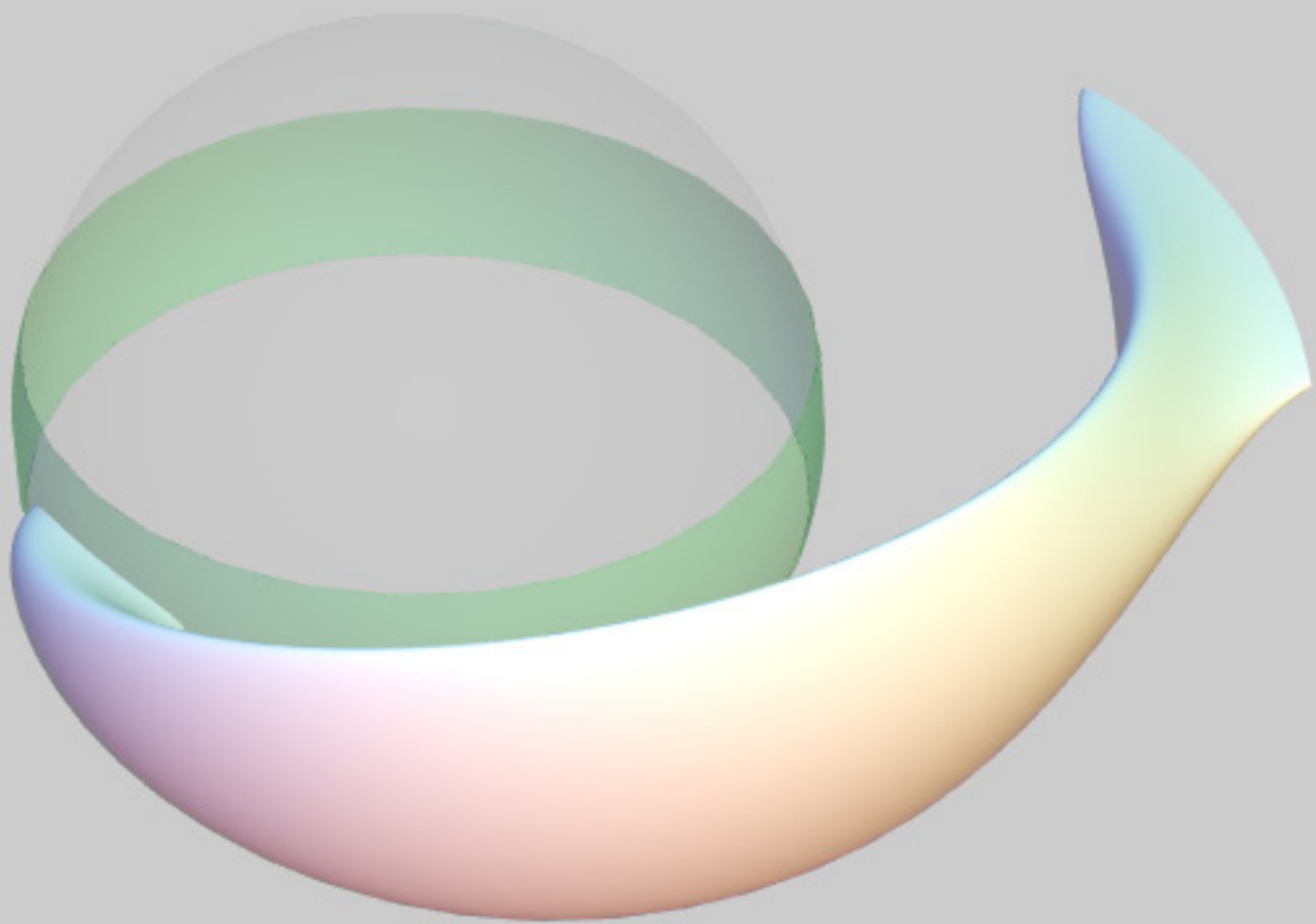


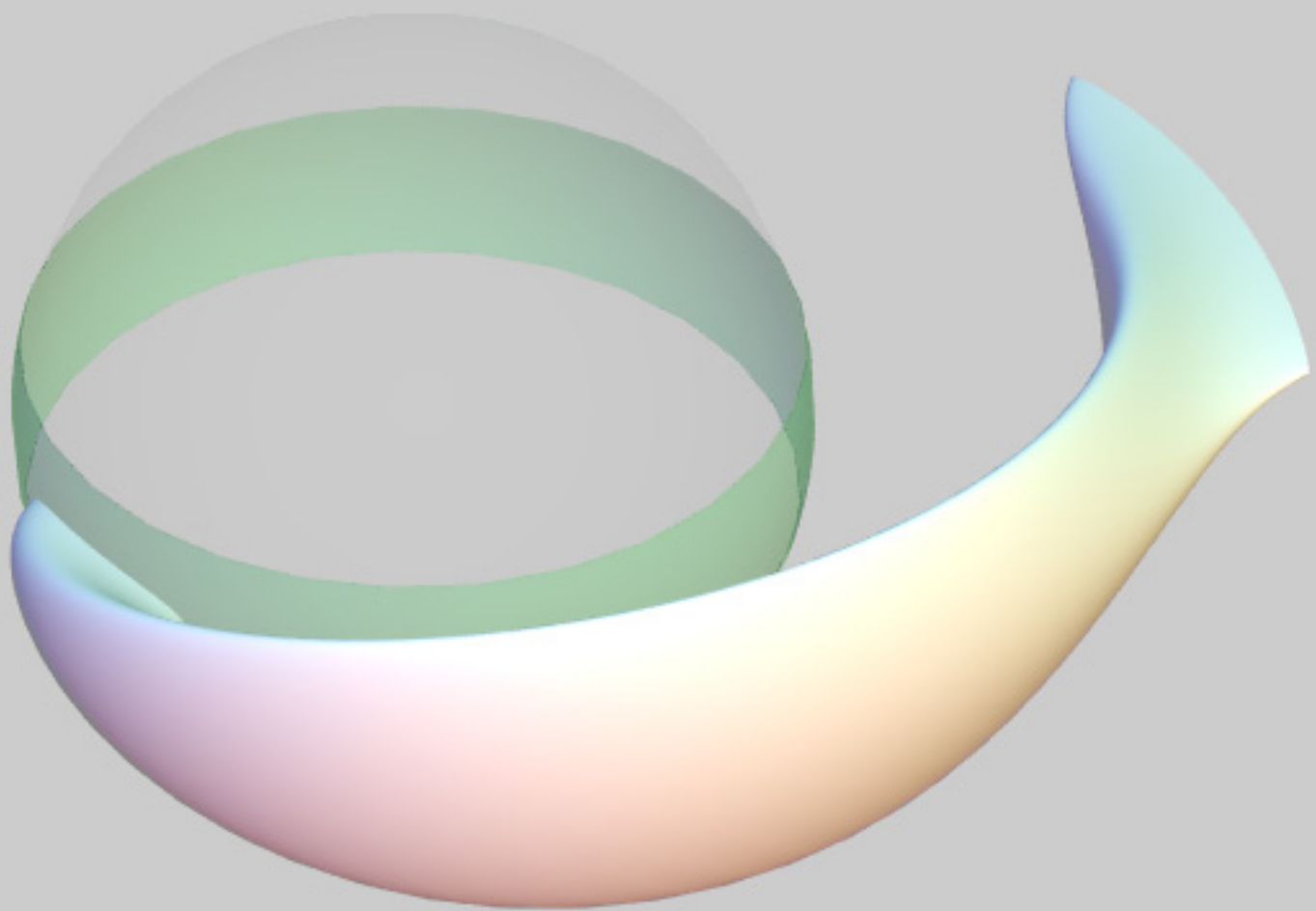


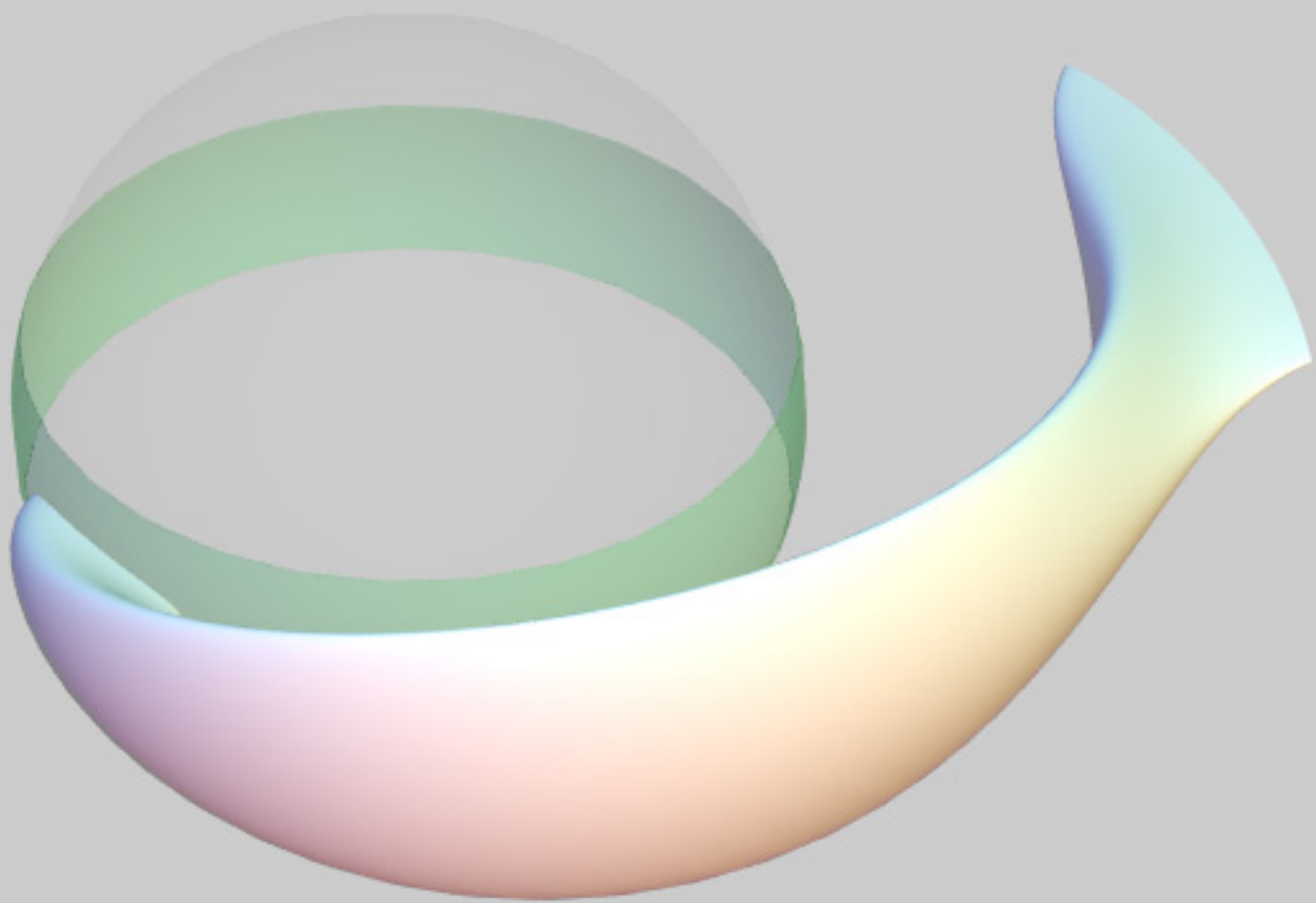


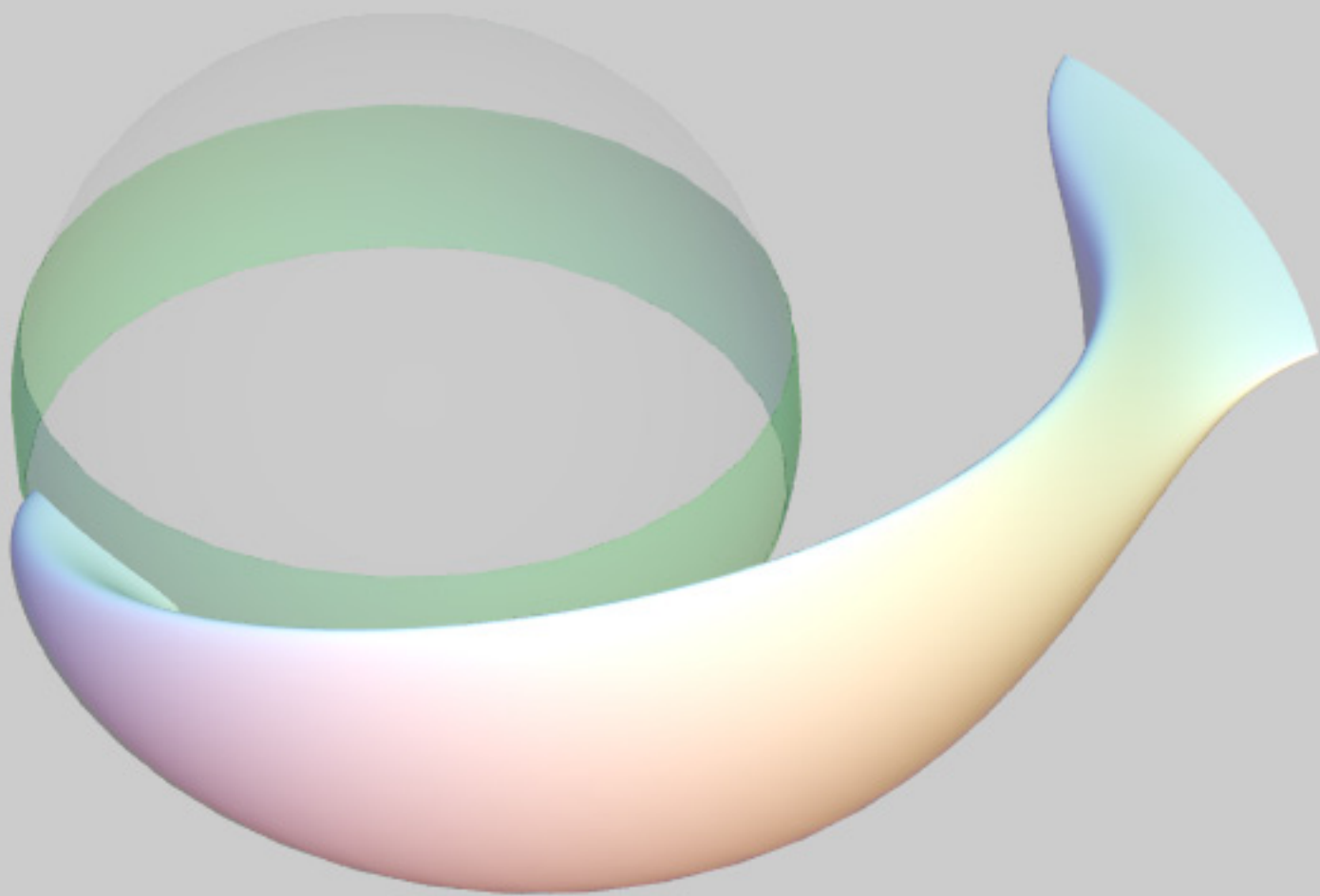


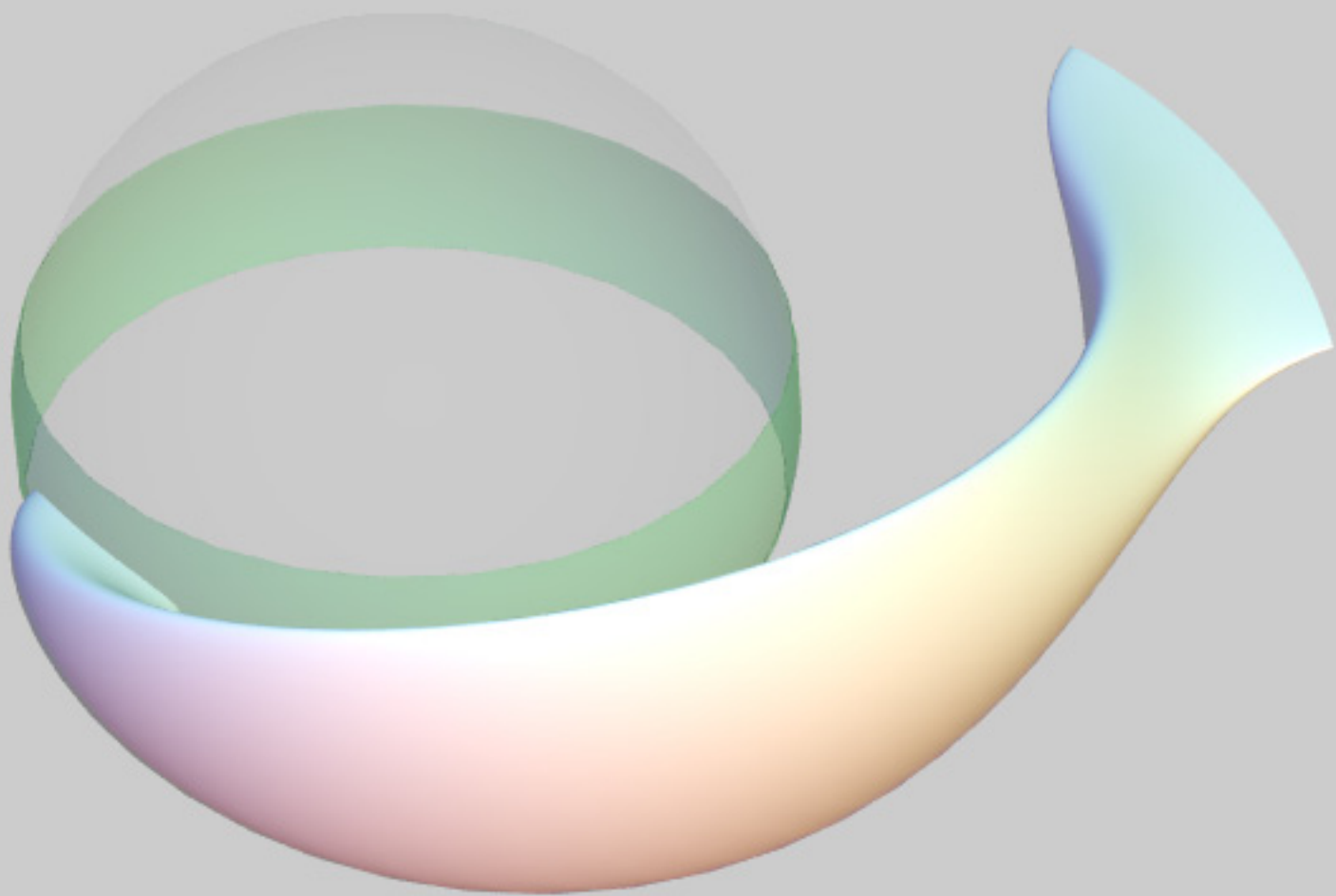


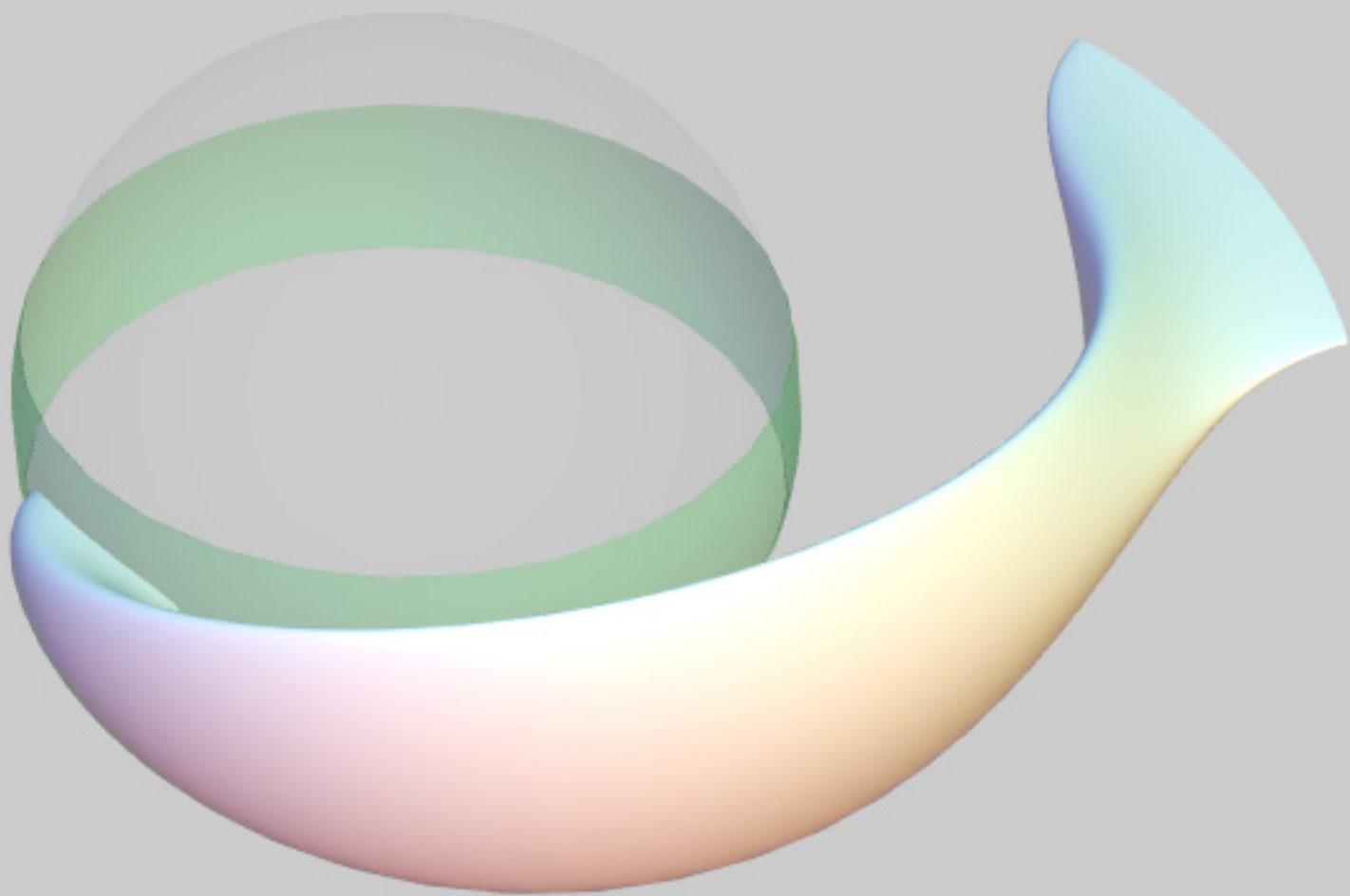


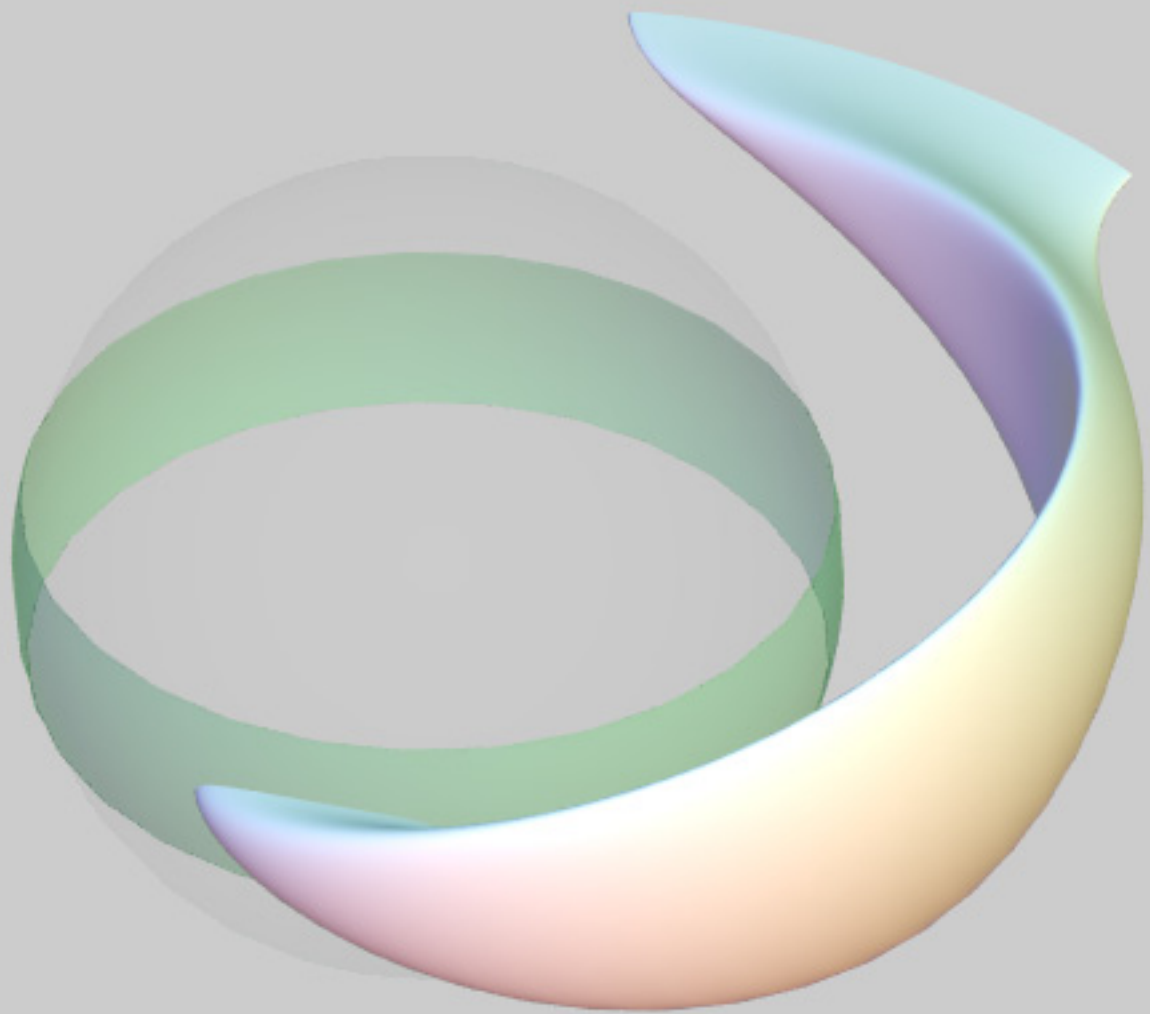


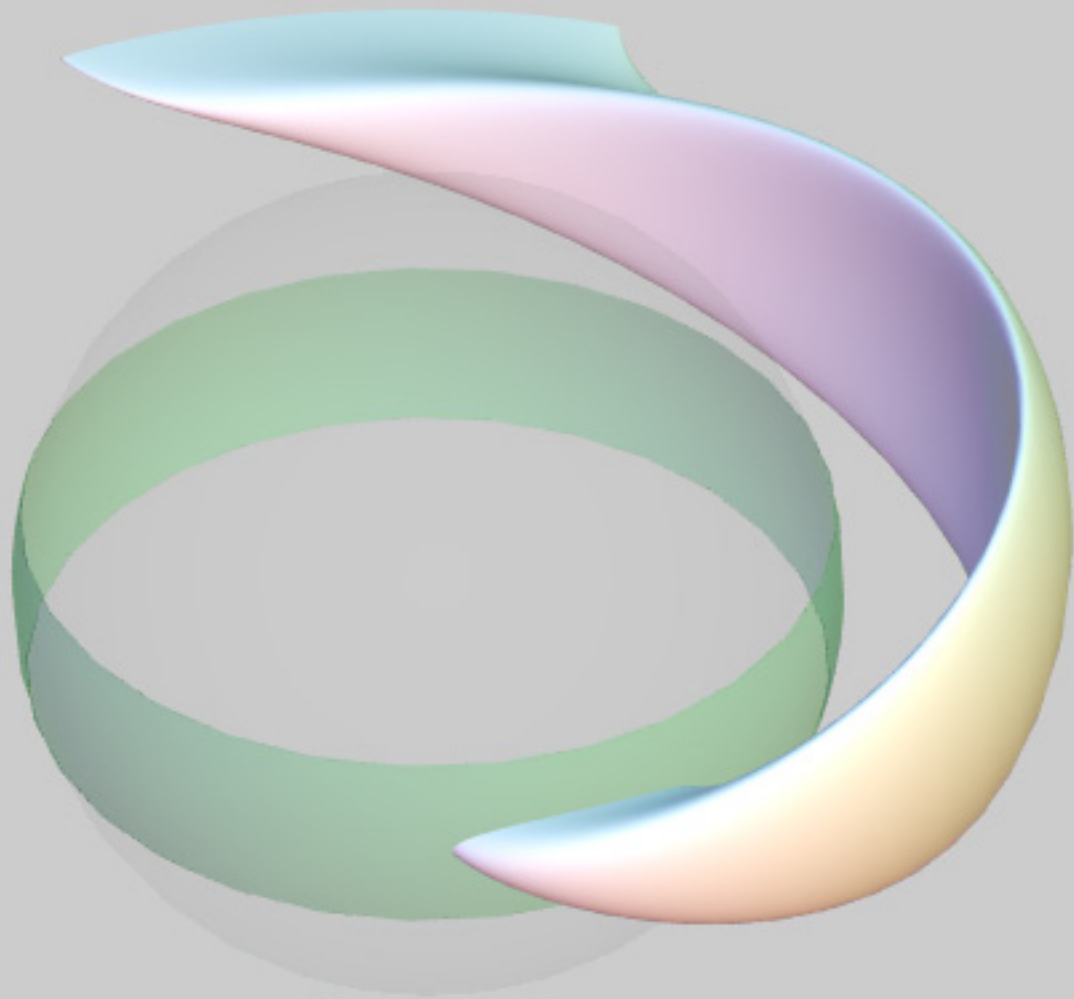


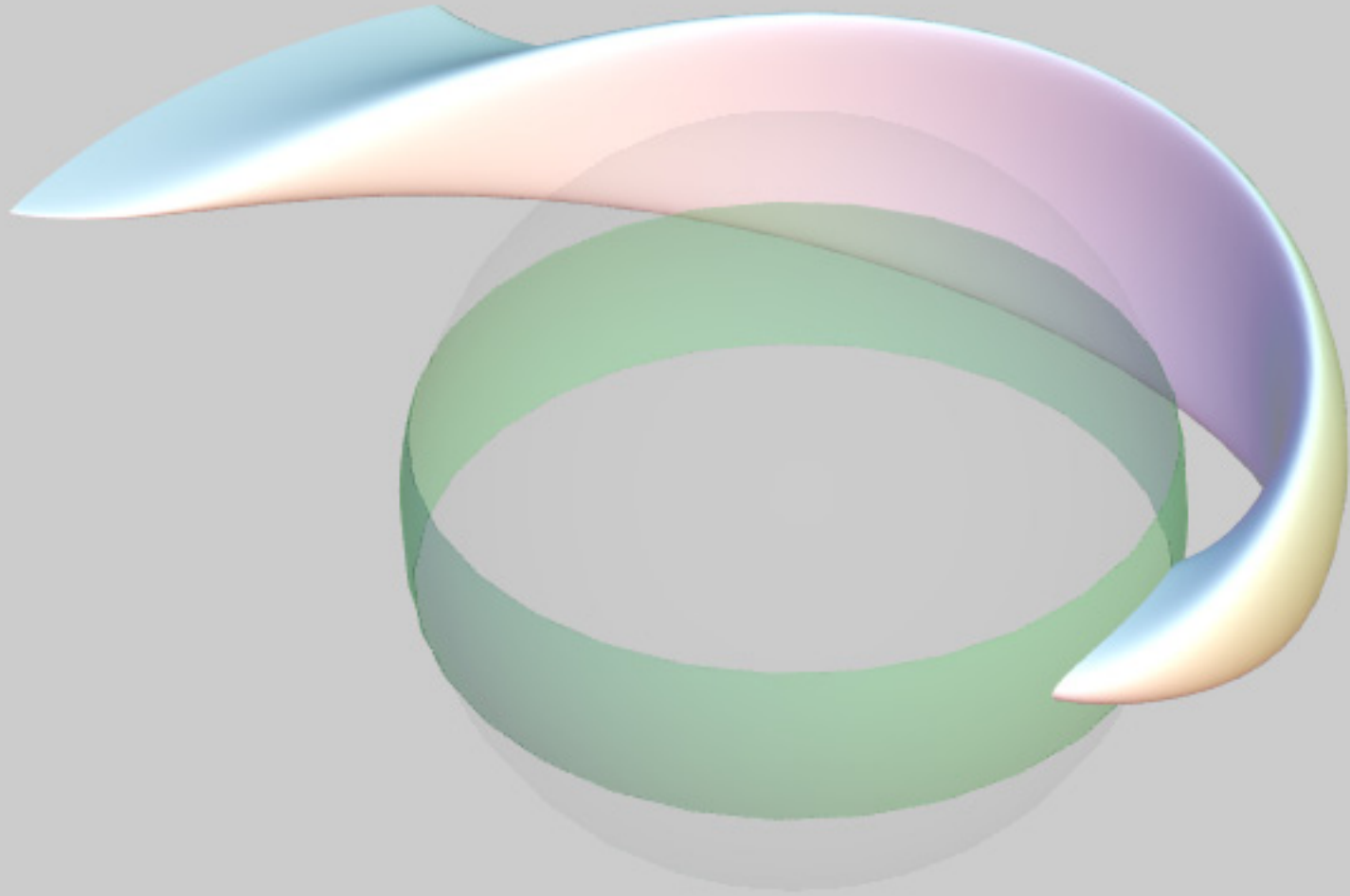


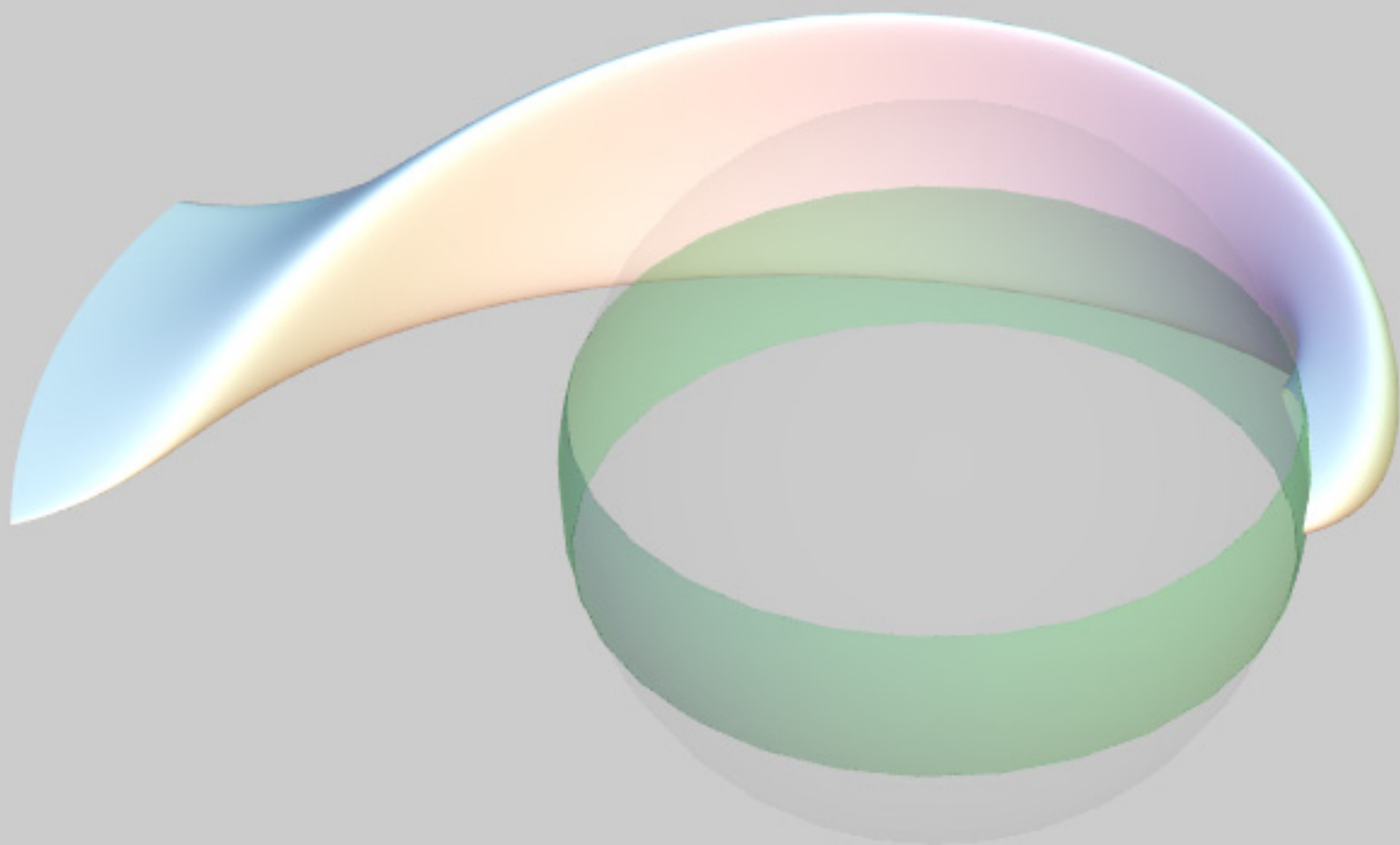


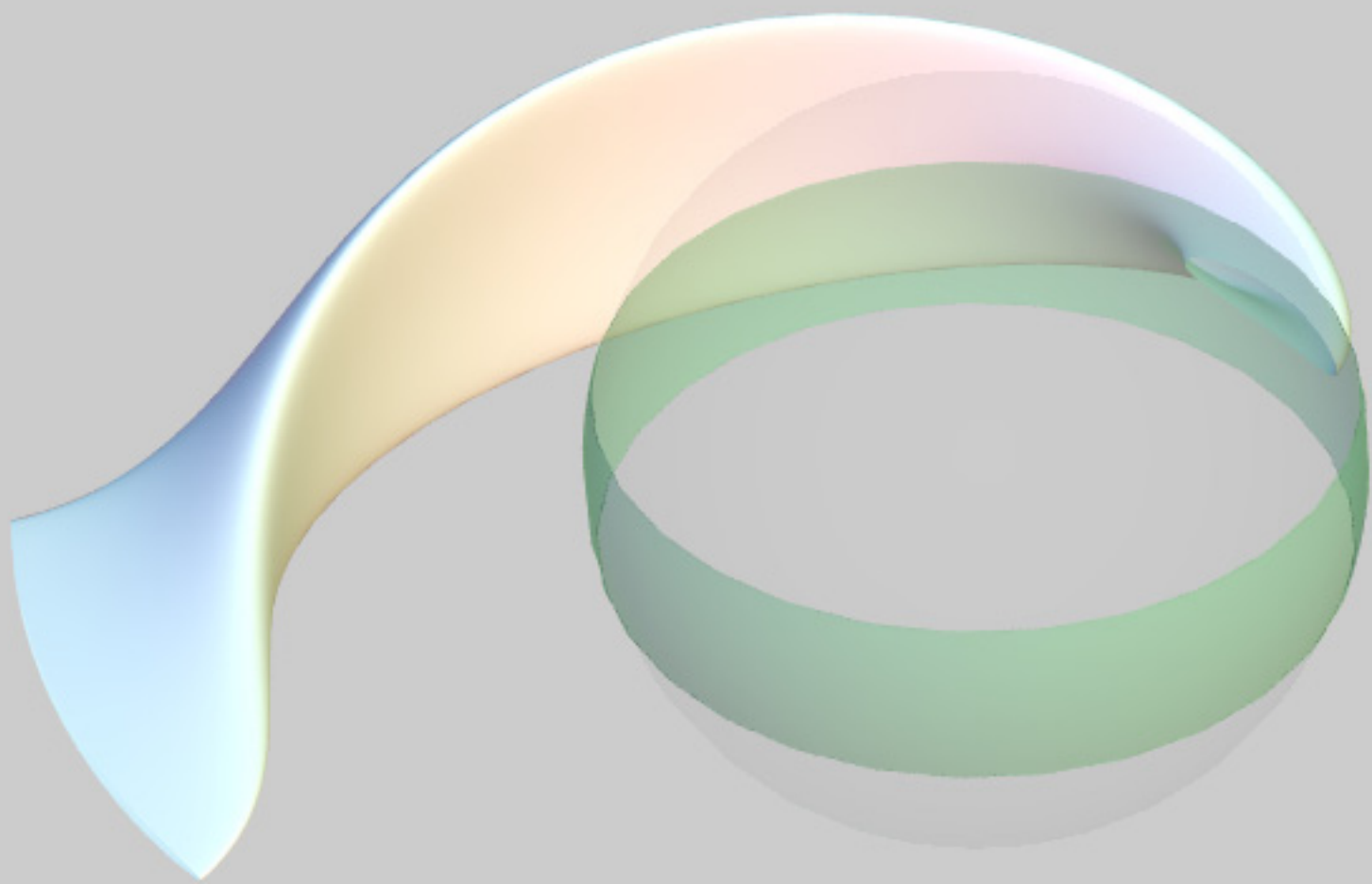


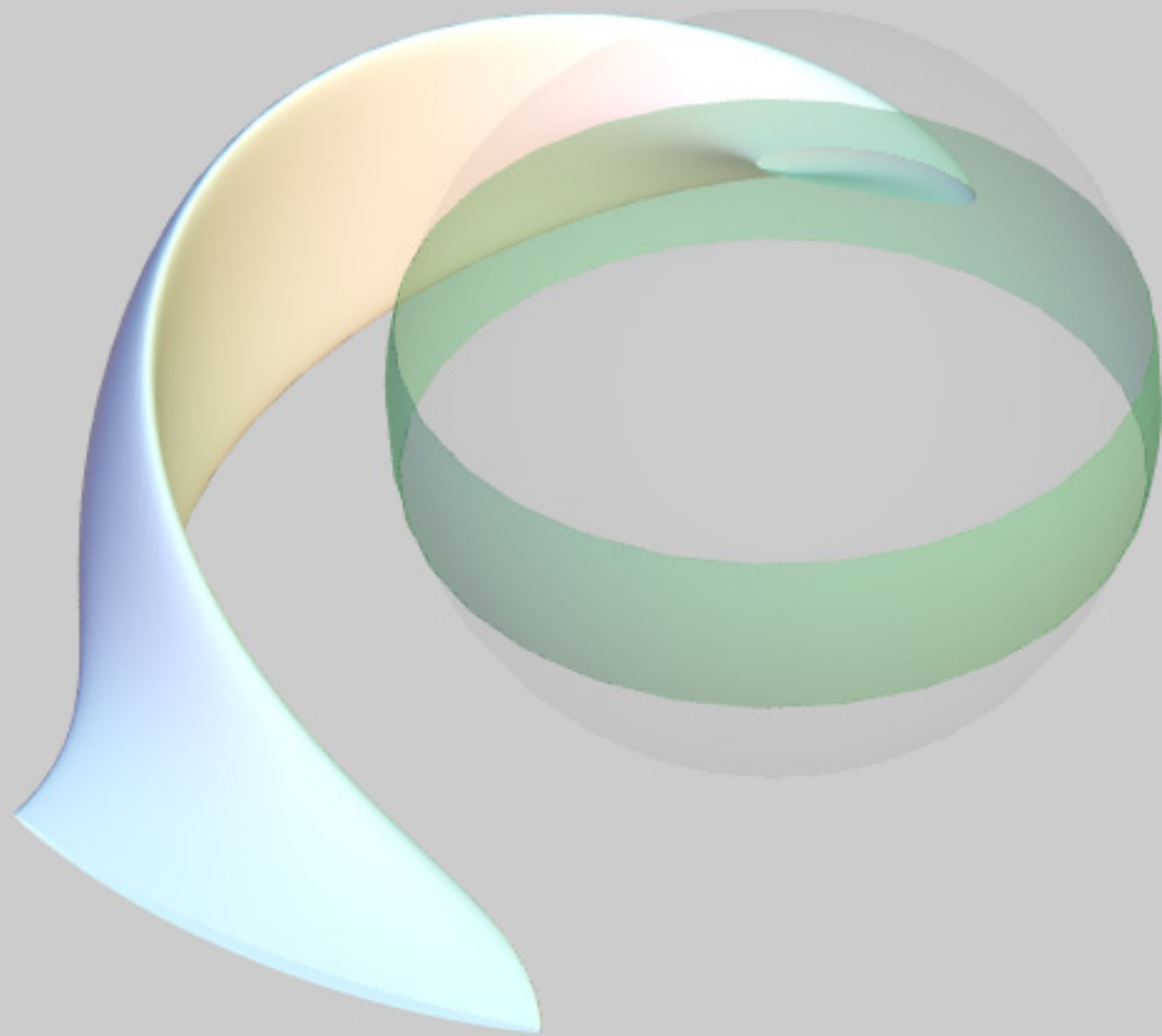


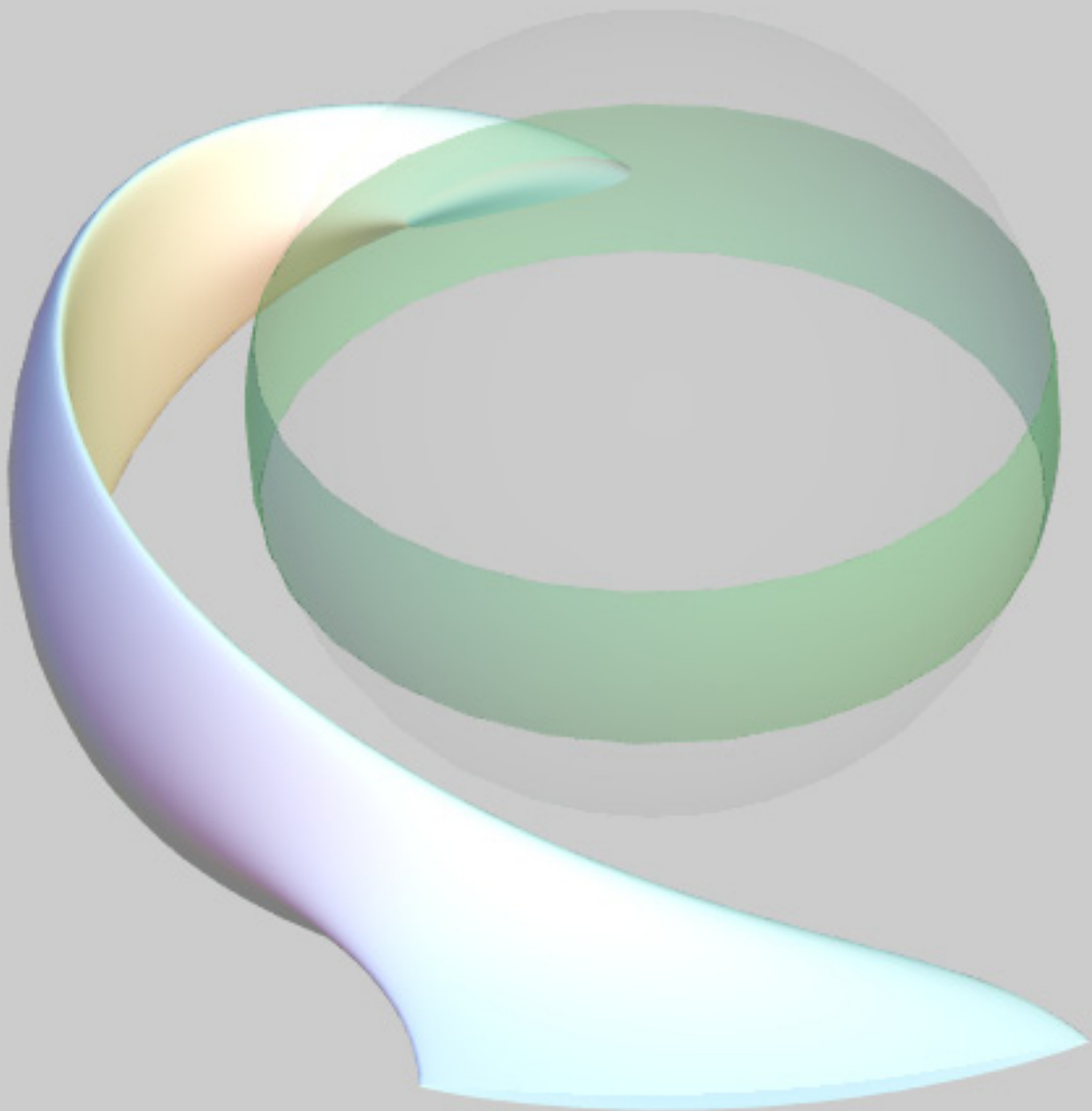


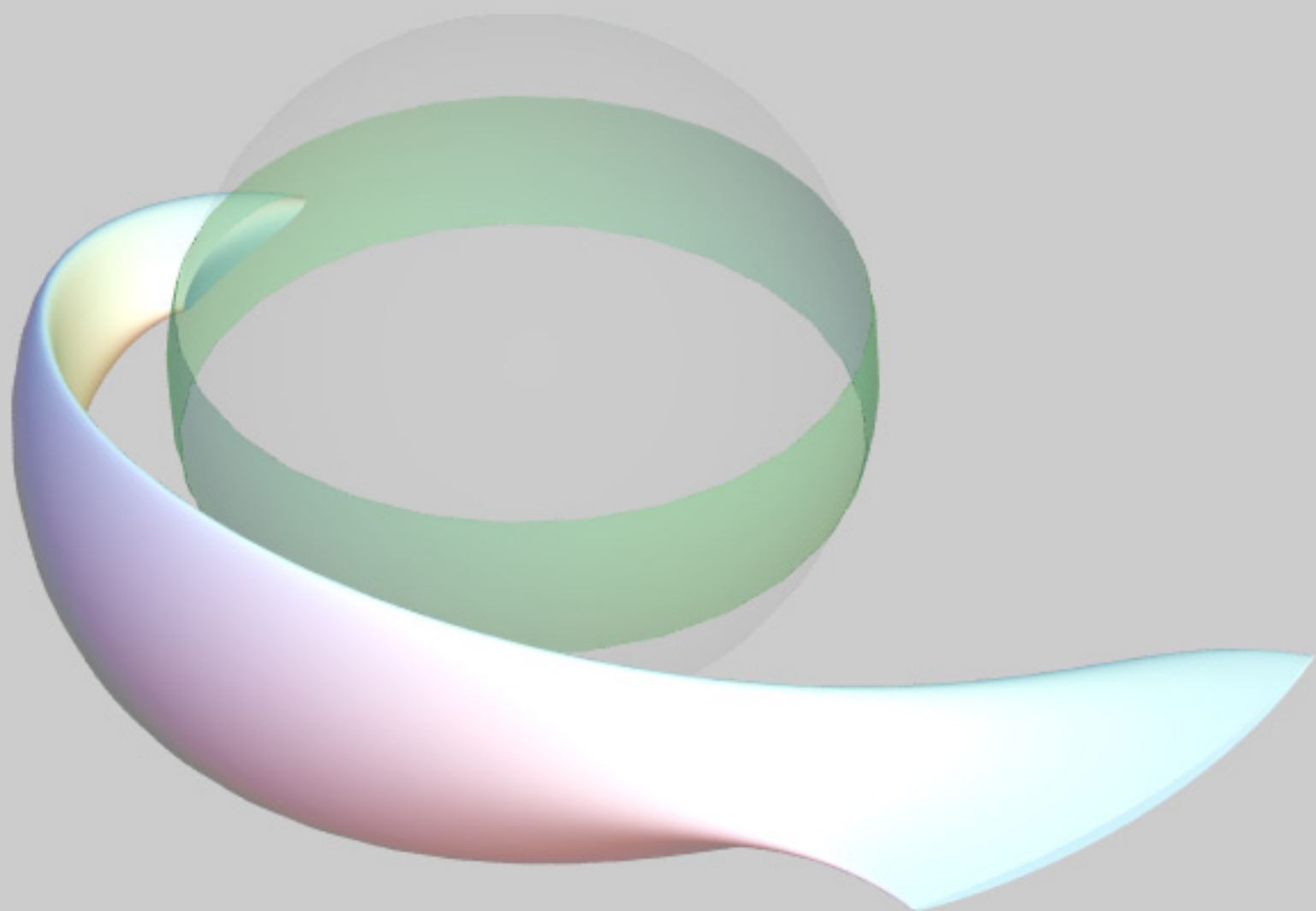


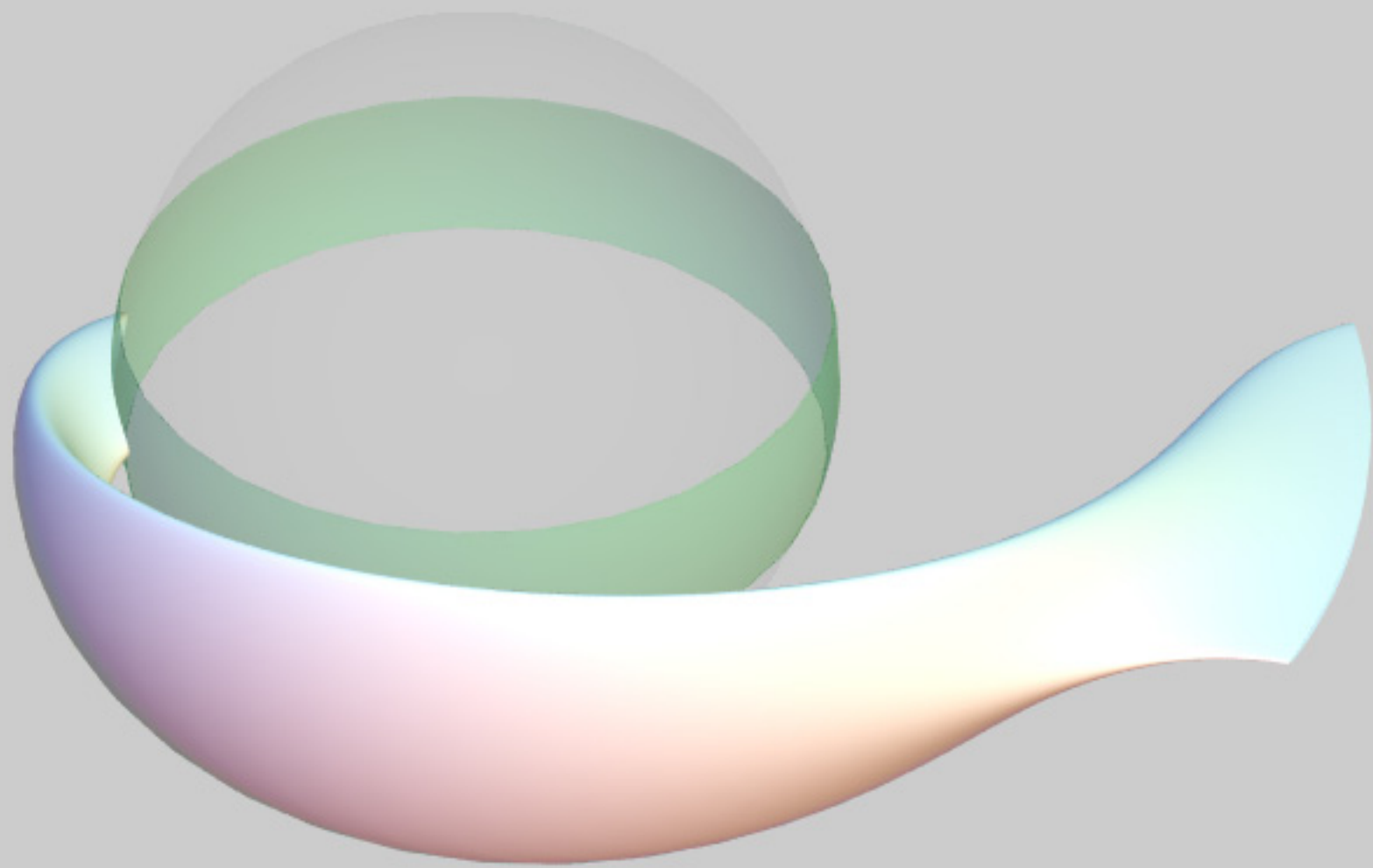


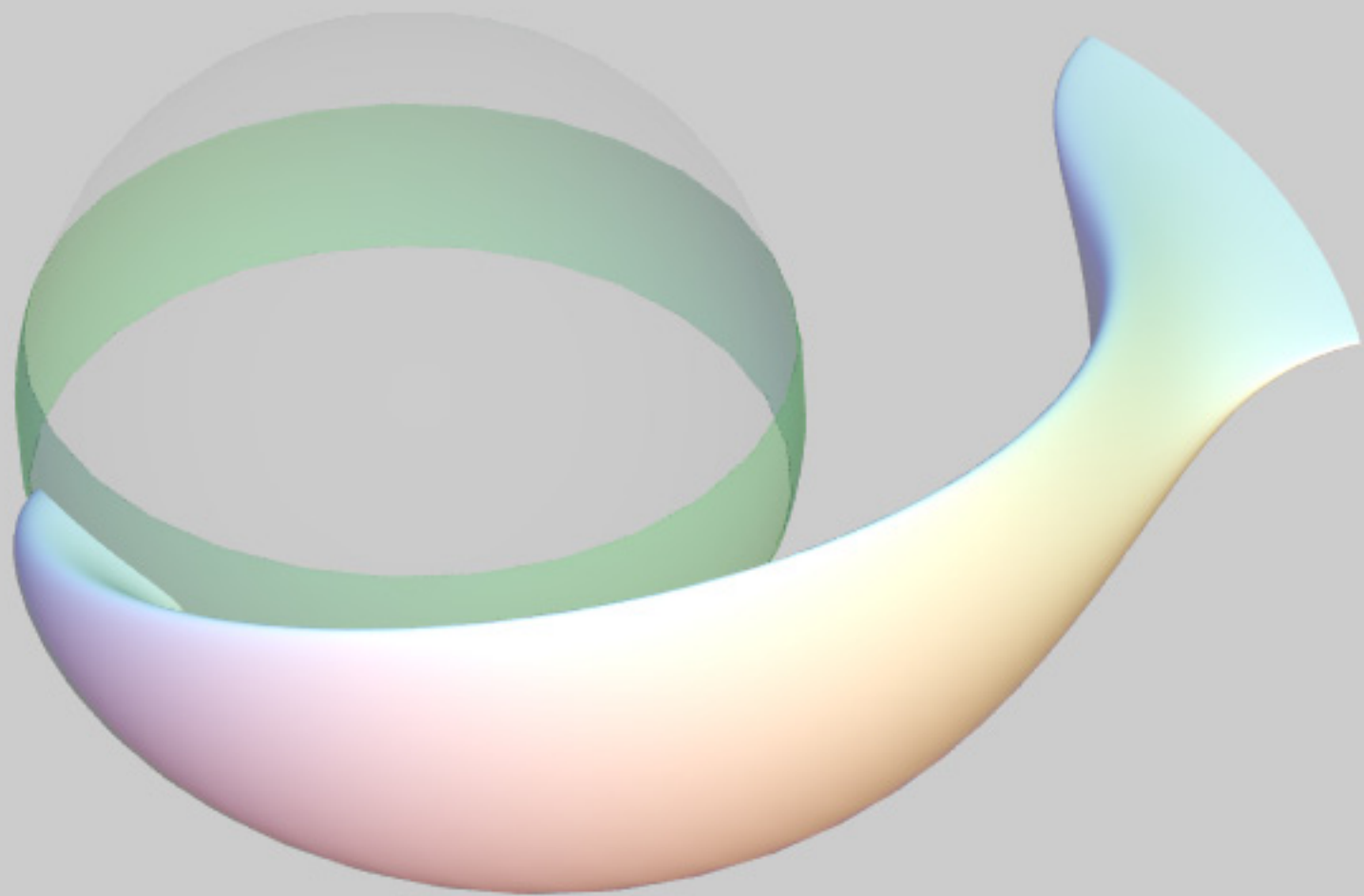


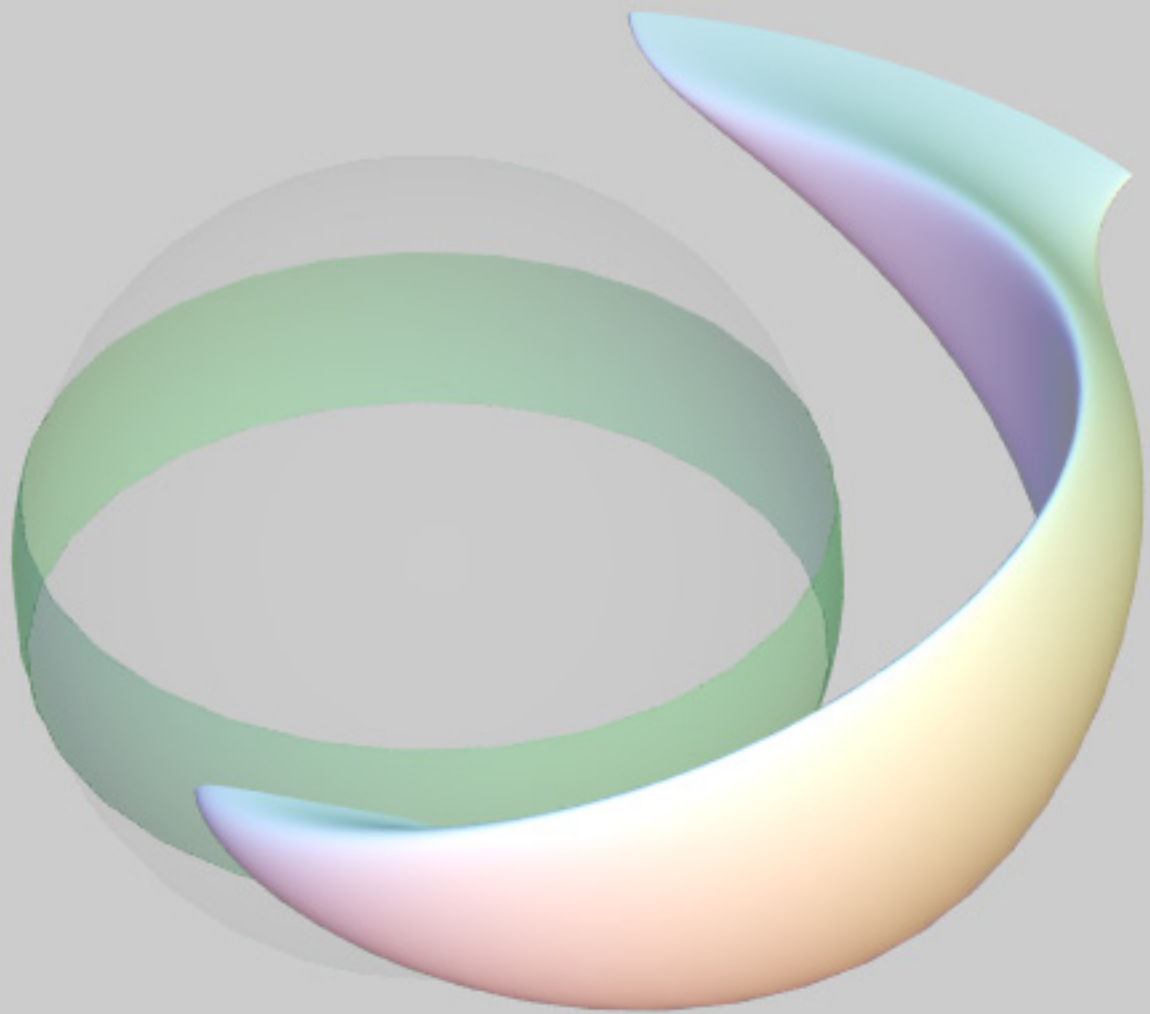


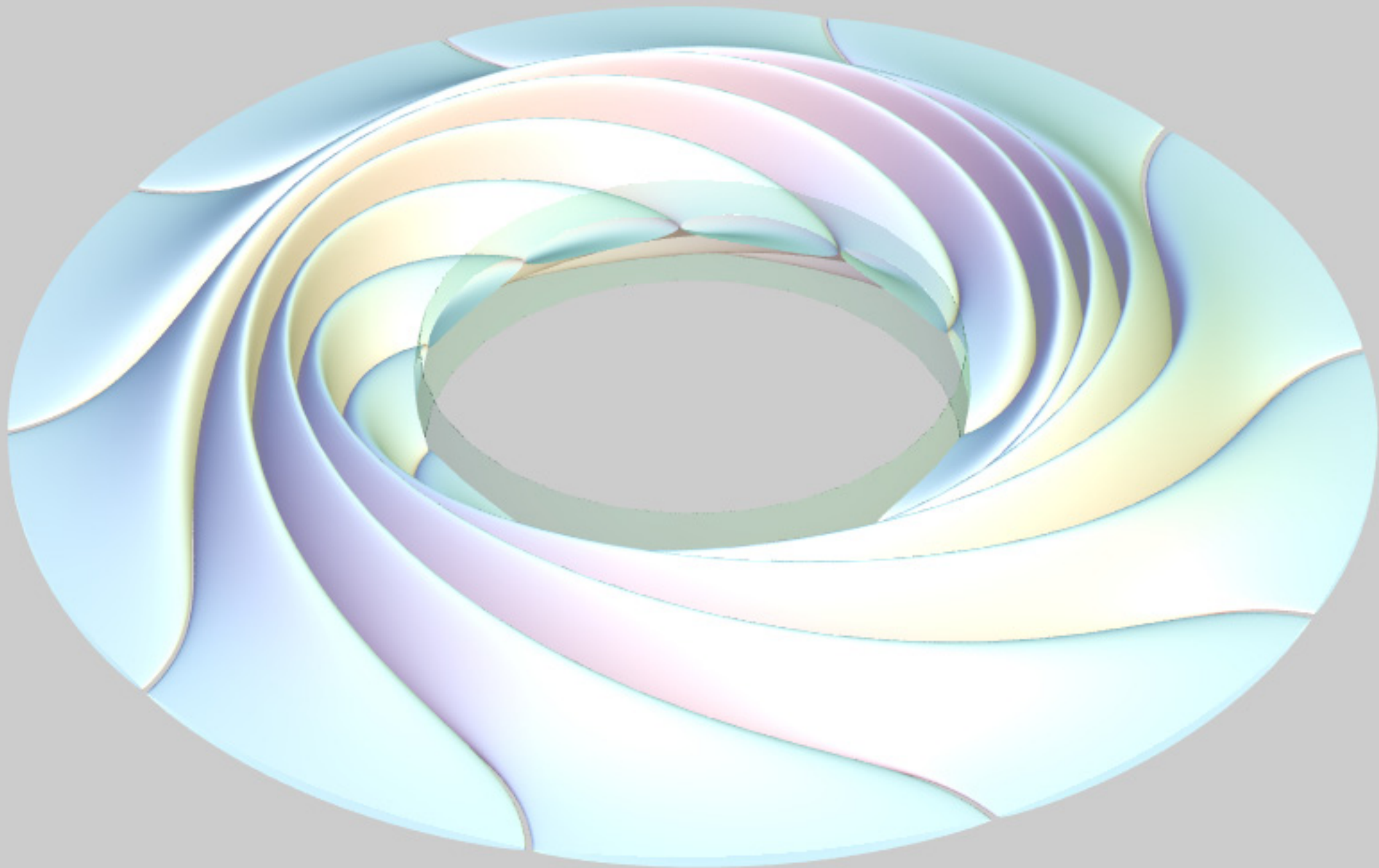




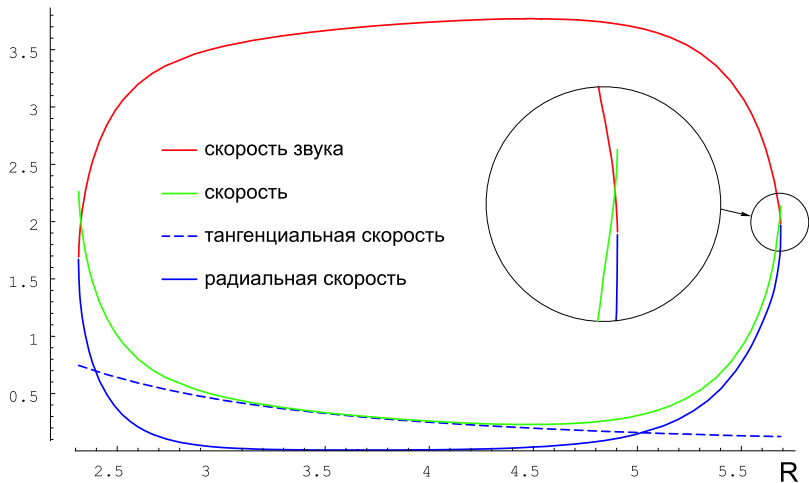








Физические величины для толстого диска



ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА НЕПРЕРЫВНОГО ДВИЖЕНИЯ В СВО

Режим уплотнения в толстый диск:

Интегральные кривые ограничены.

Движения газа определены на конечном интервале по R .
При максимальном R газ заполняет диск конечной толщины.

Режим уплотнения в тонкий диск:

$h \sim R$, когда $R \rightarrow \infty$.

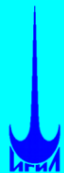
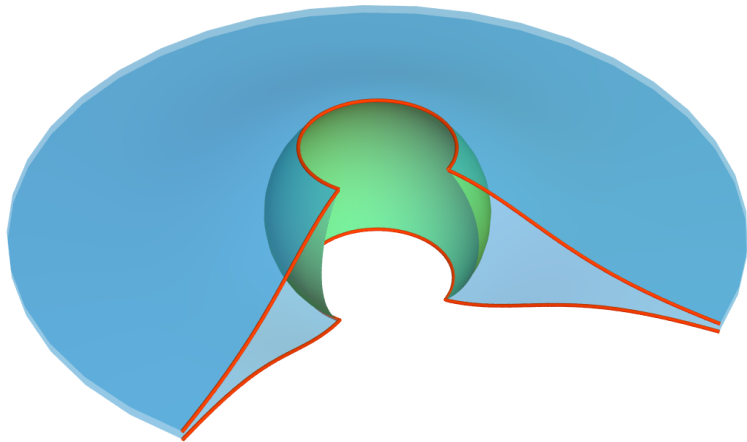
При больших R поток газа уплотняется и вырождается в диск в плоскости экватора, причем $U \sim O(1)$, $c \sim 1/R$.

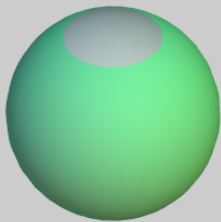
Режим асимптотического конуса:

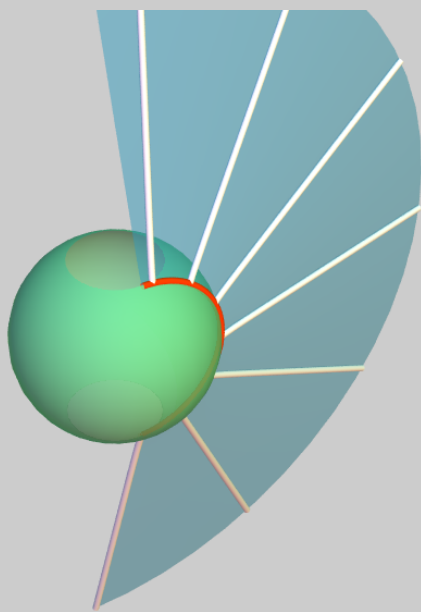
$h \sim O(1)$, когда $R \rightarrow \infty$.

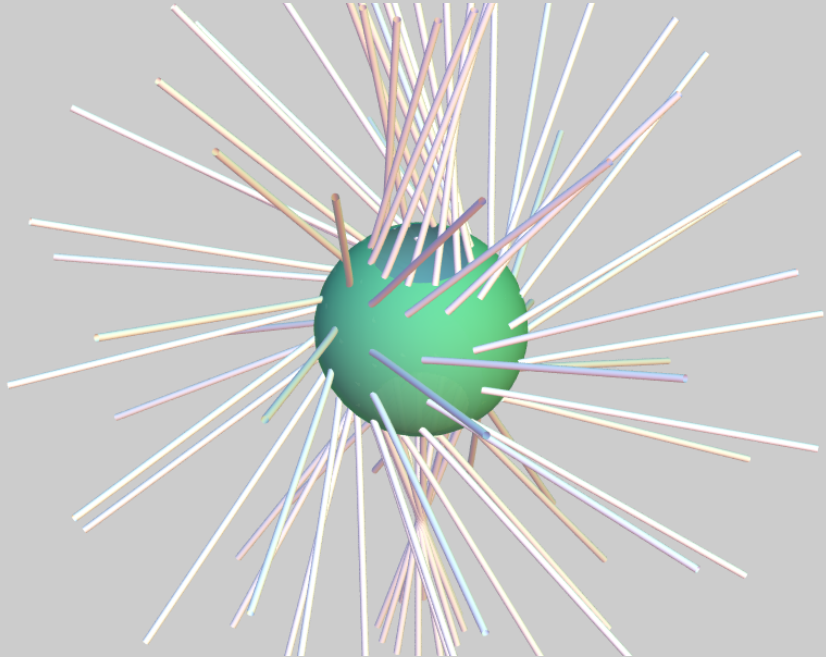
При больших R газ занимает дополнение к конусу с осью Oz , при этом $U \sim O(1)$, $c \sim 1/R^2$

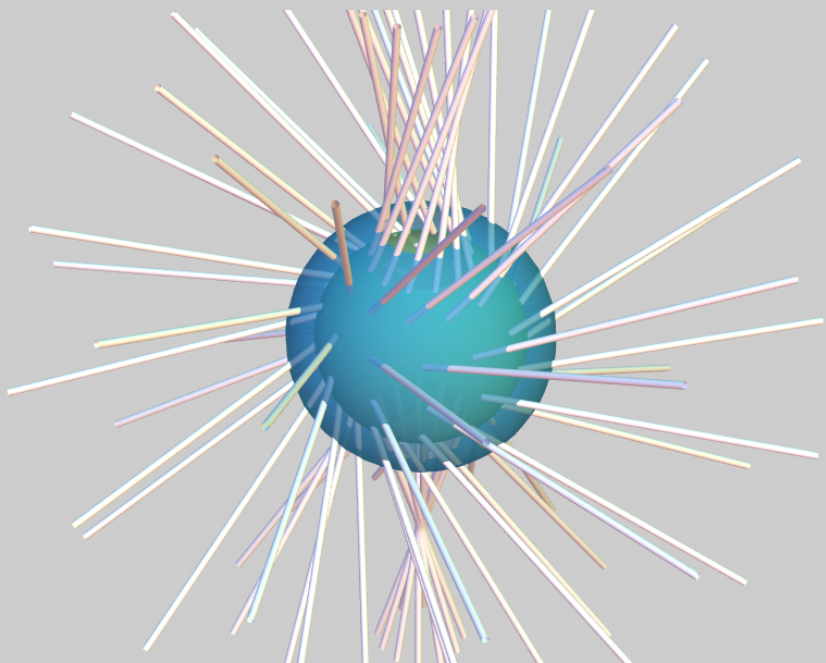
Тонкий диск

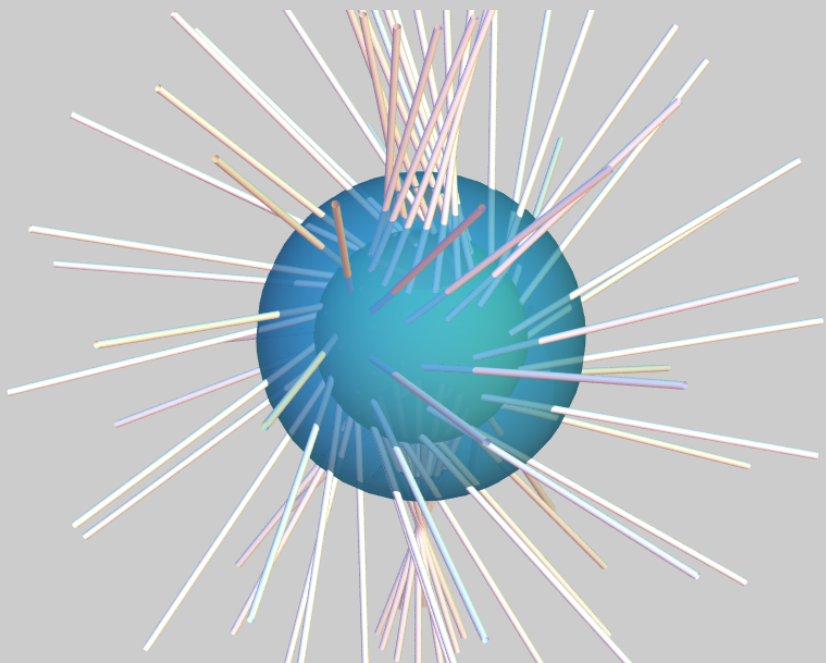


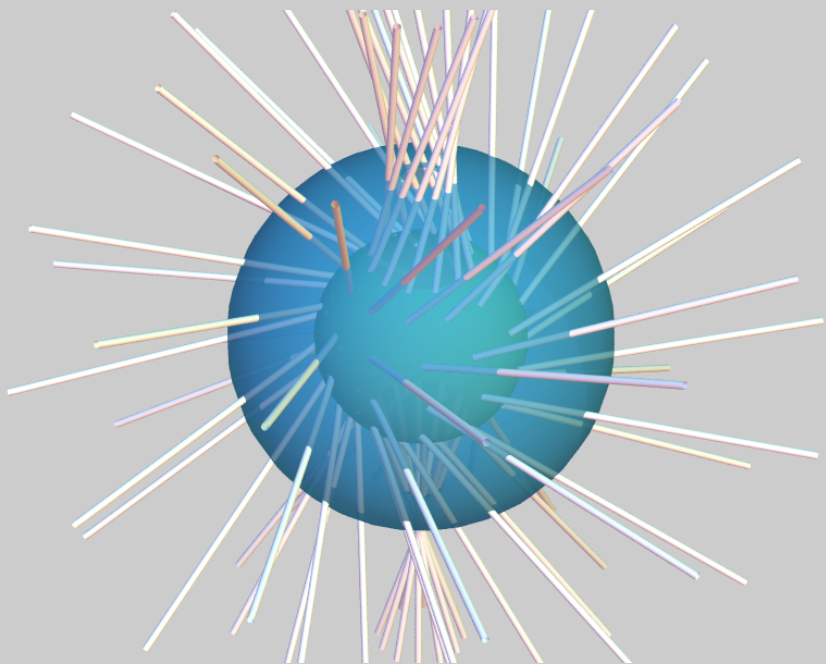


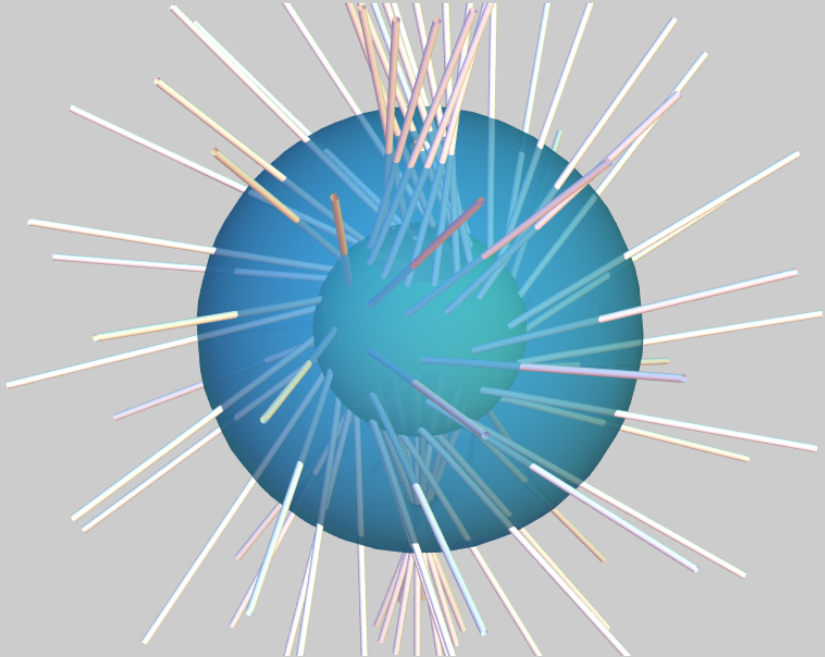


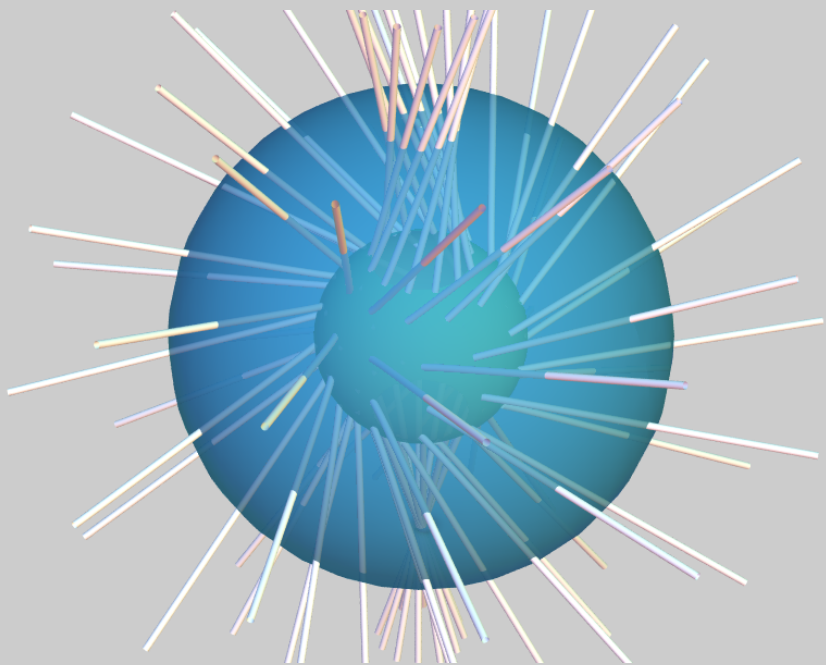


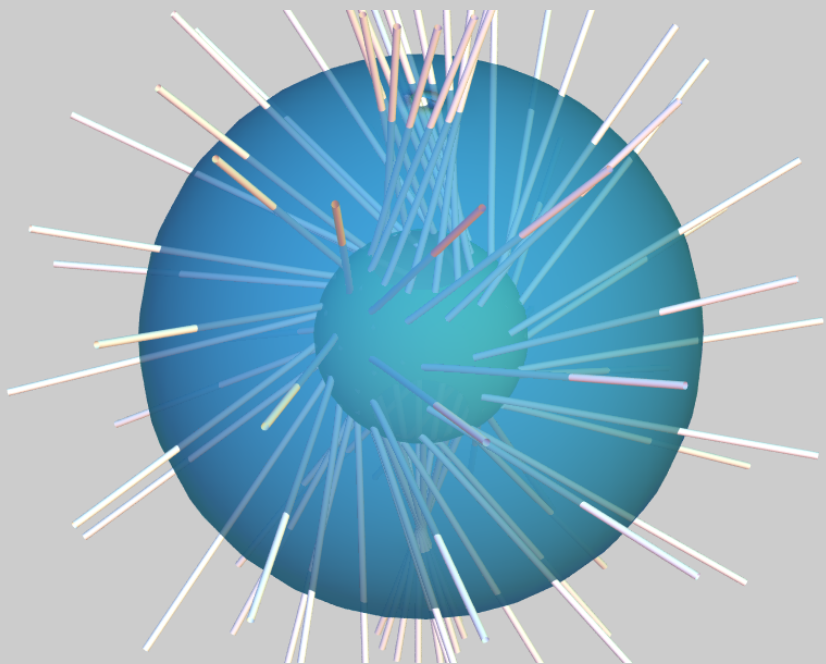


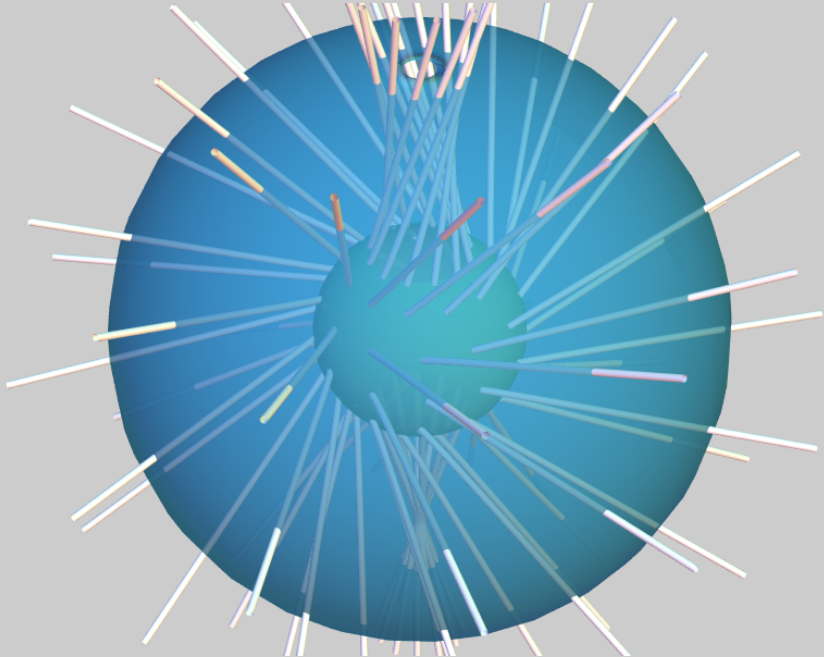


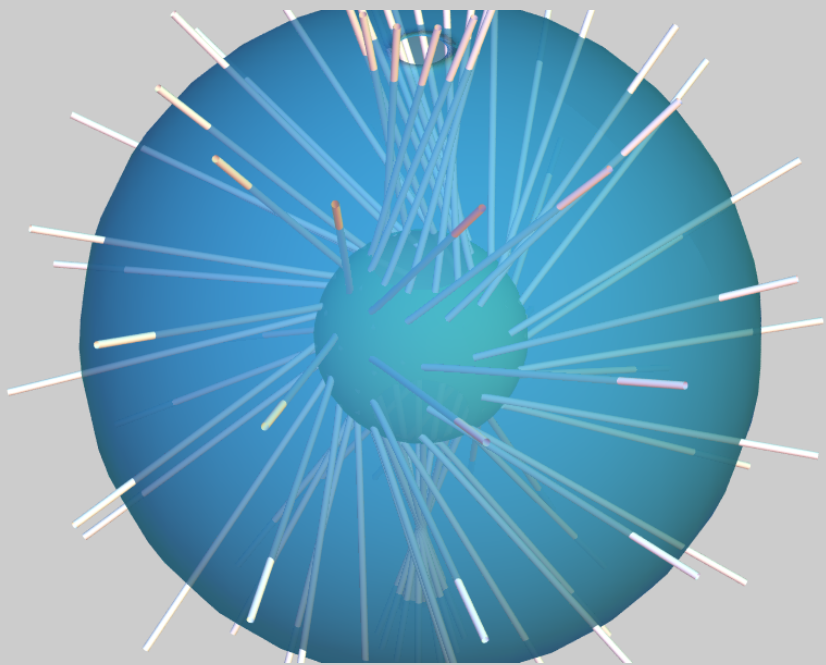








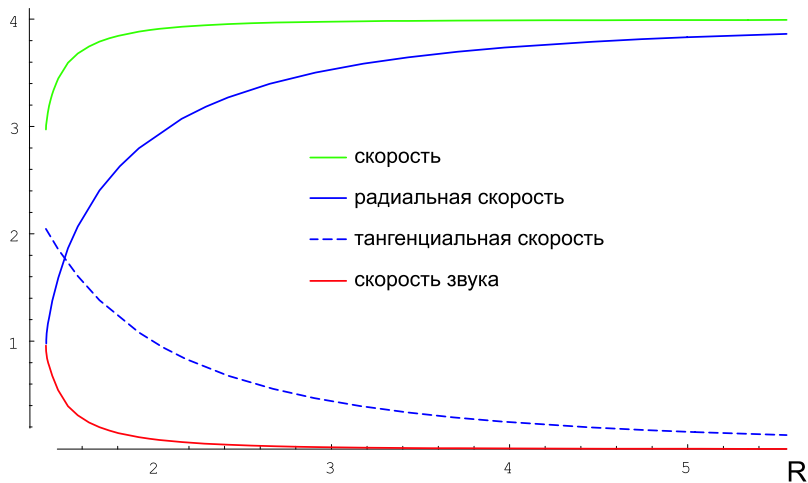


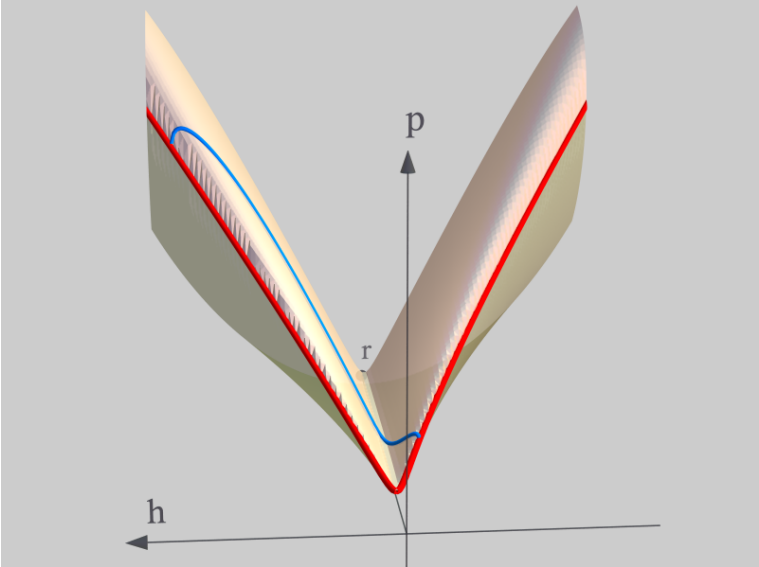


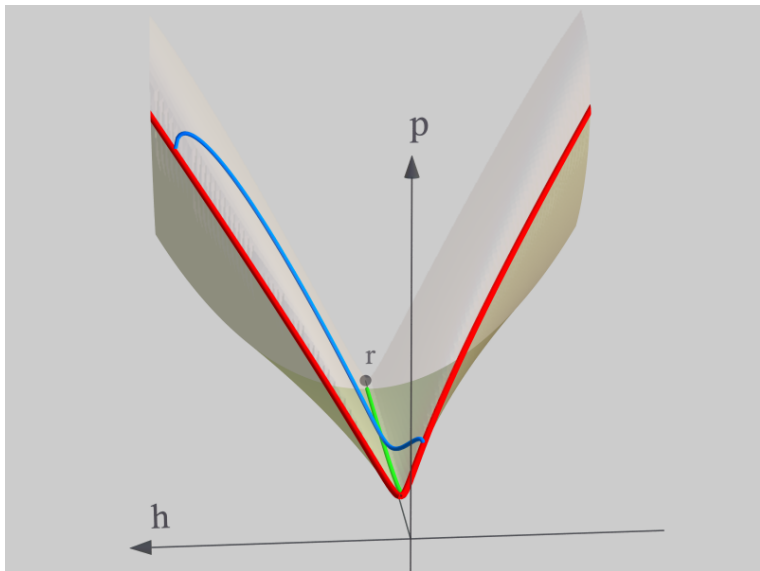
повтор

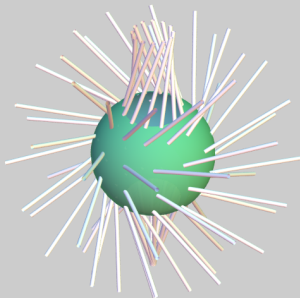
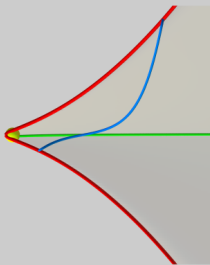
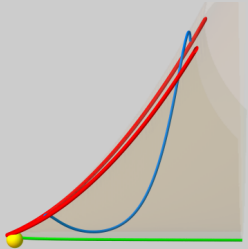
в начало

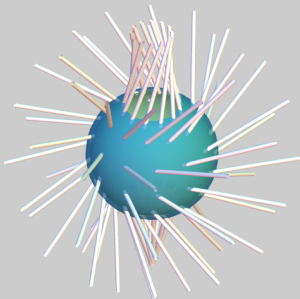
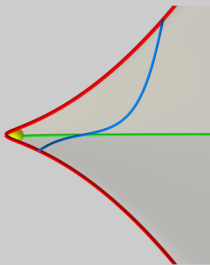
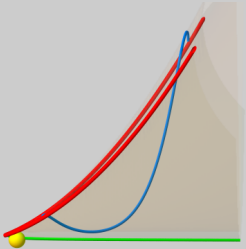
Физические величины для асимптотического конуса

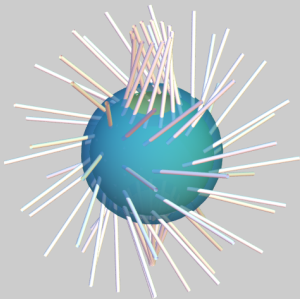
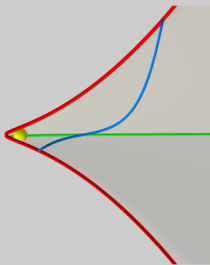
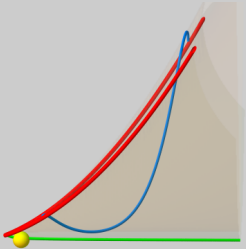


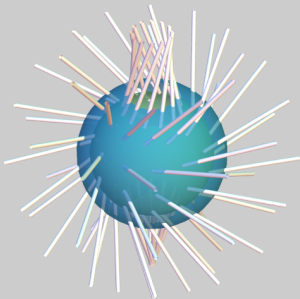
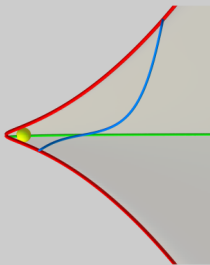
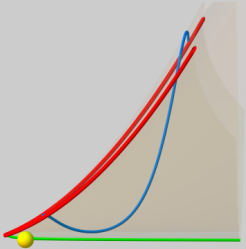


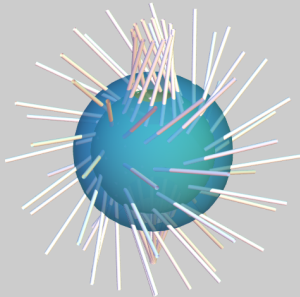
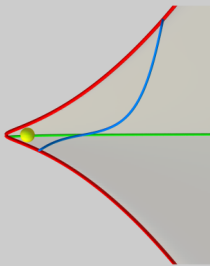


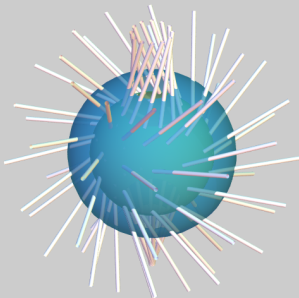
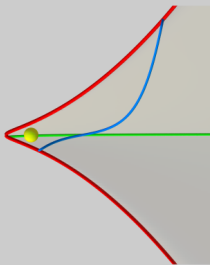
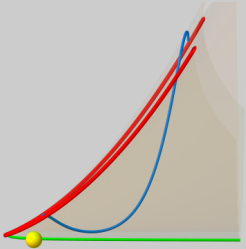


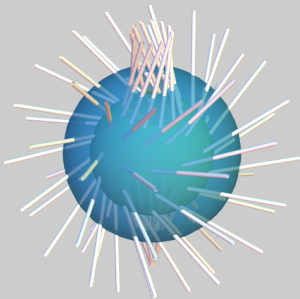
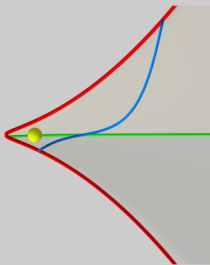
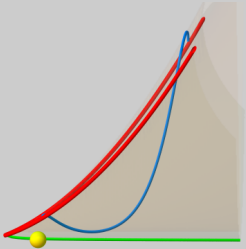


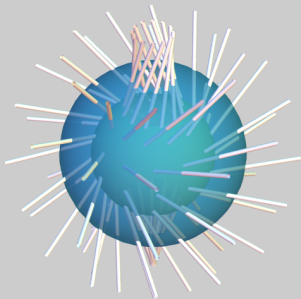
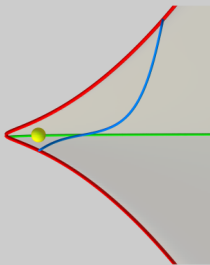
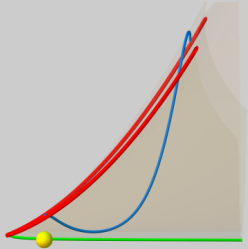


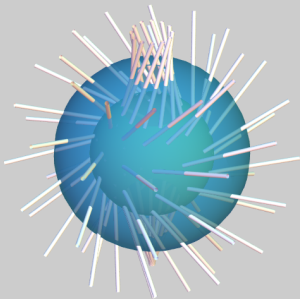
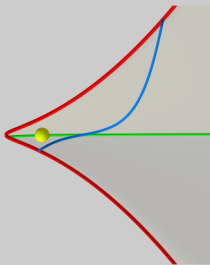
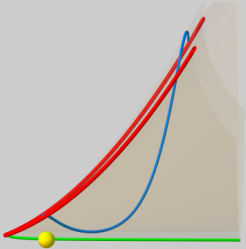


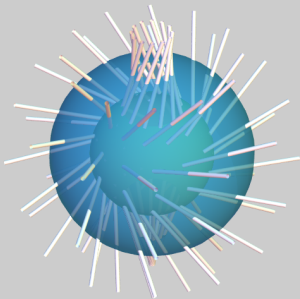
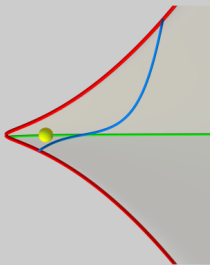
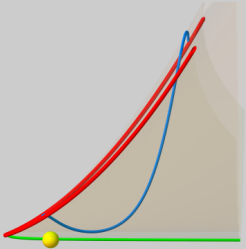


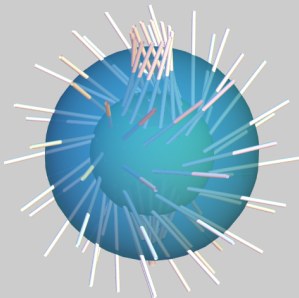
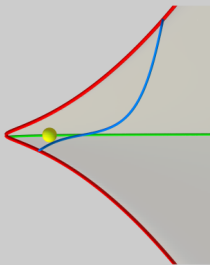
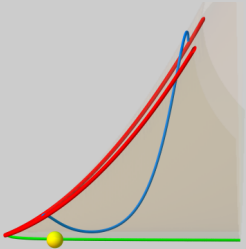


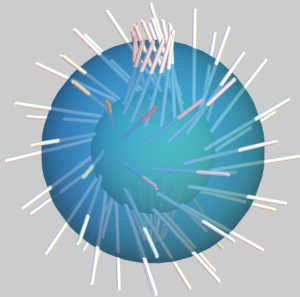
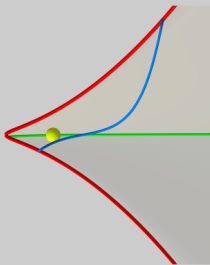
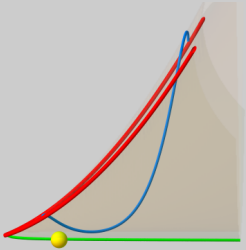


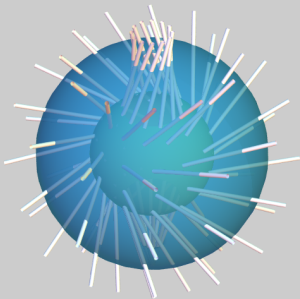
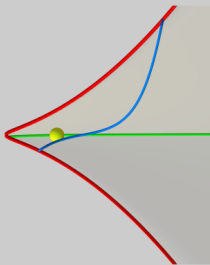


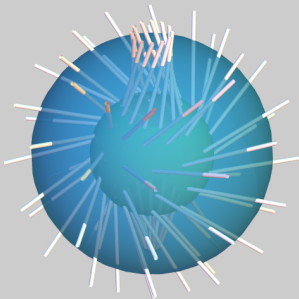
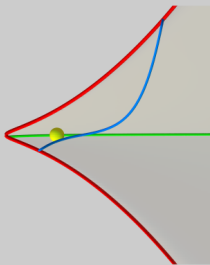
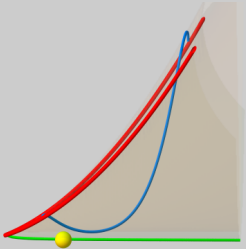


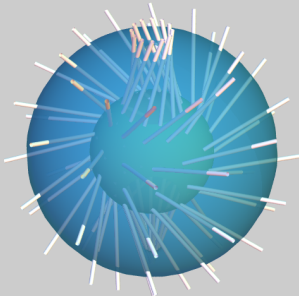
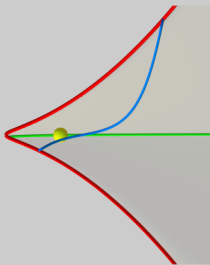
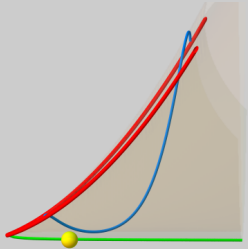


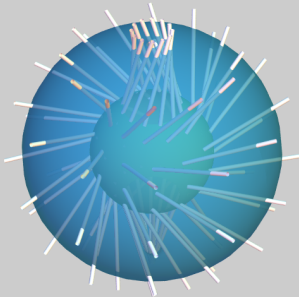
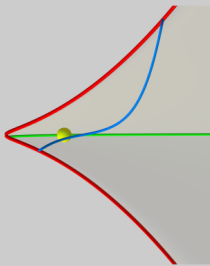


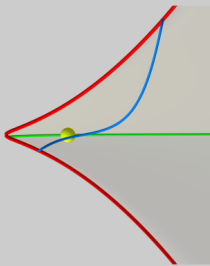
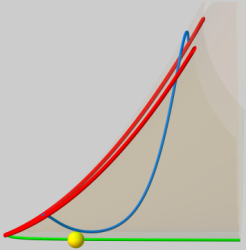


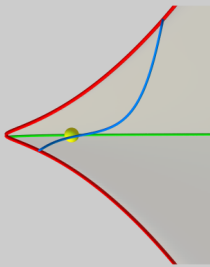
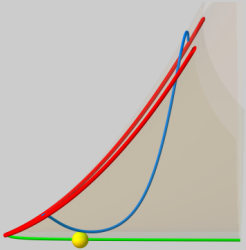


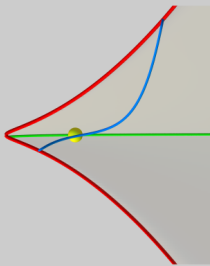
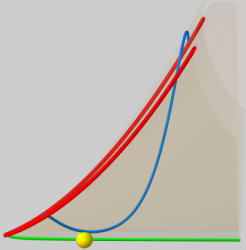


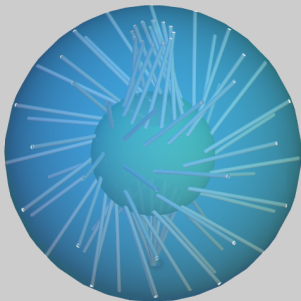
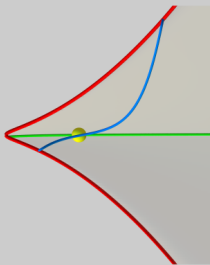
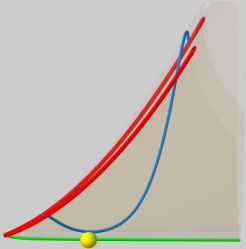






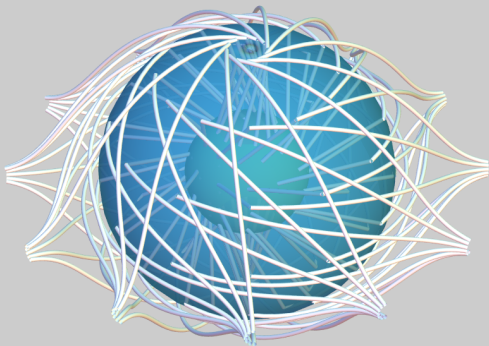
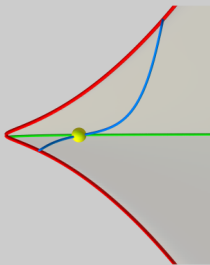


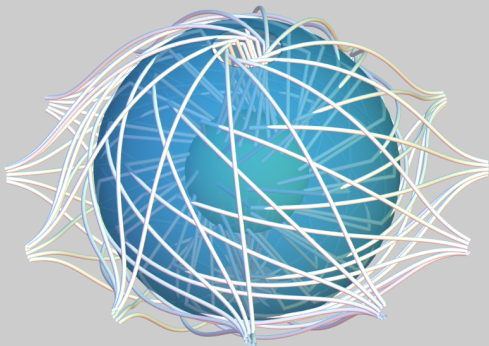
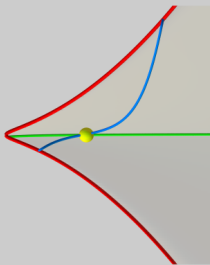
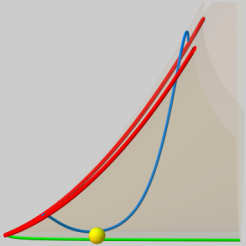


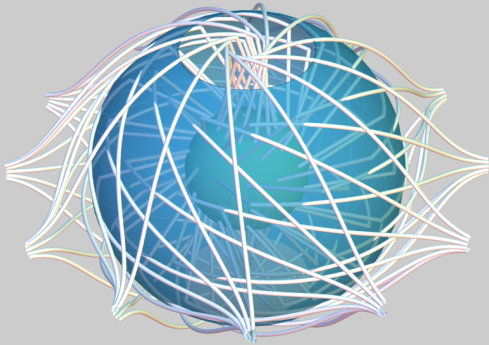
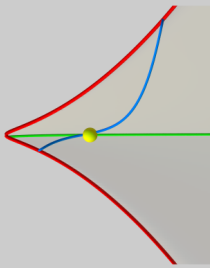
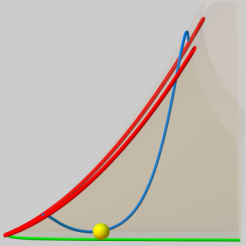


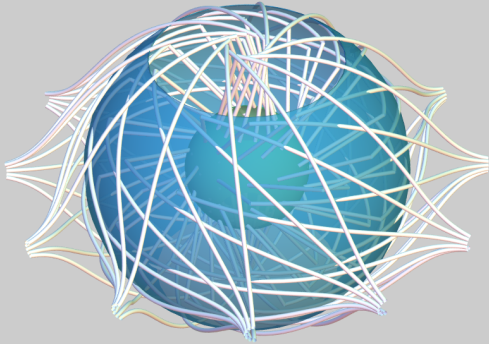
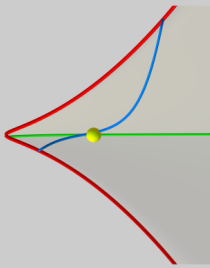
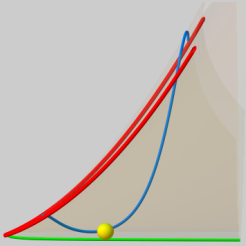
повтор

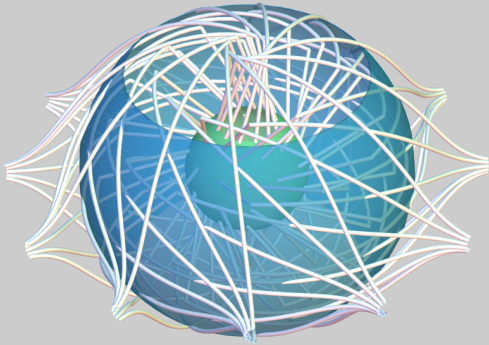
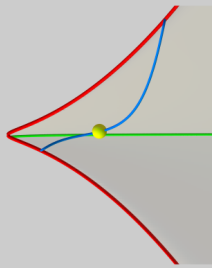
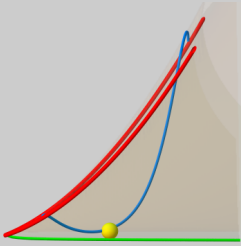
в начало

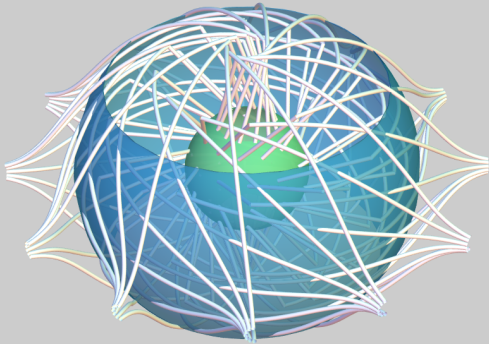
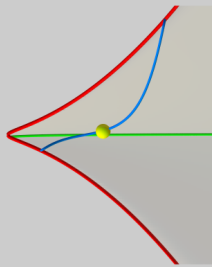
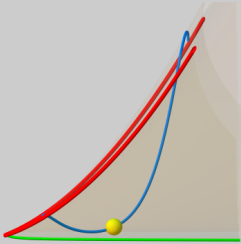


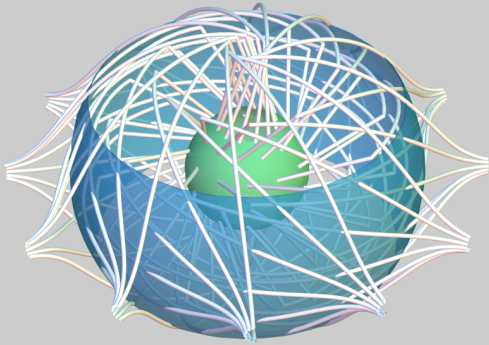
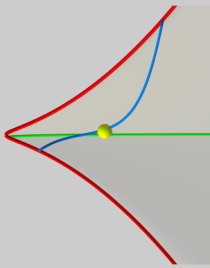


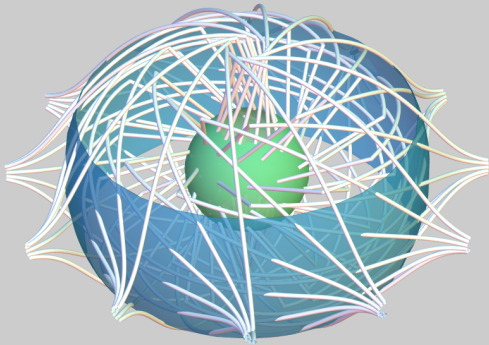
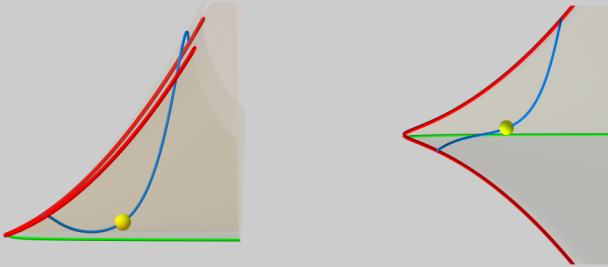


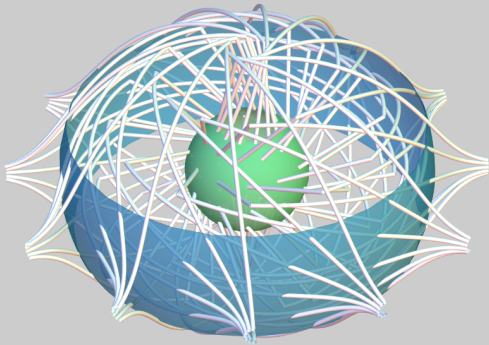
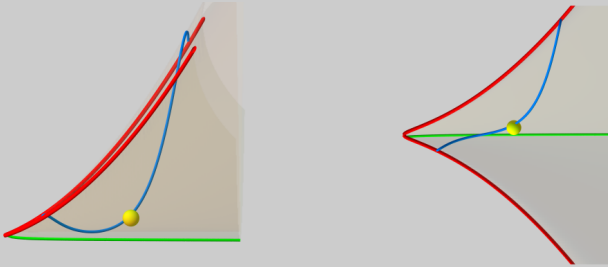


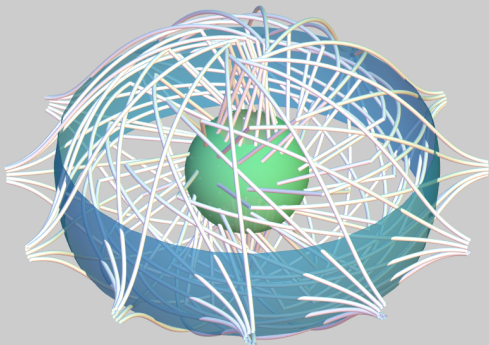
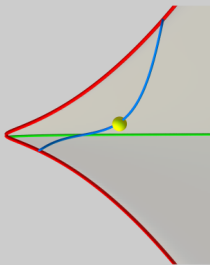
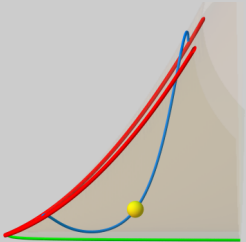


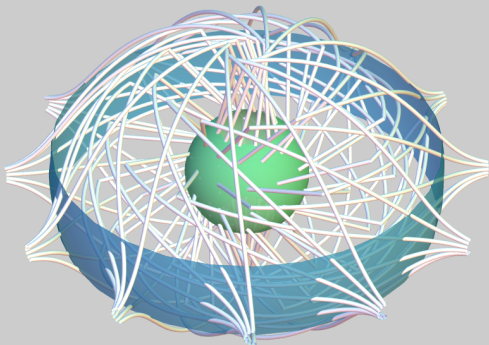
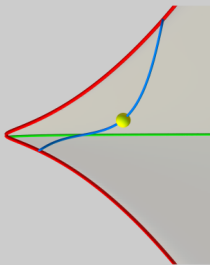


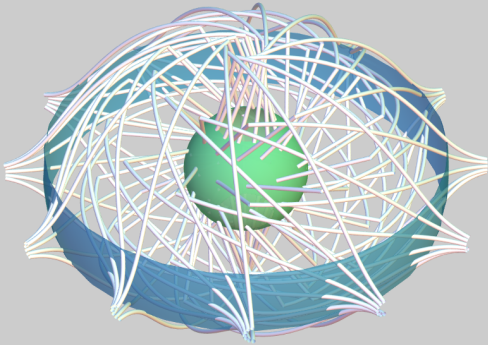
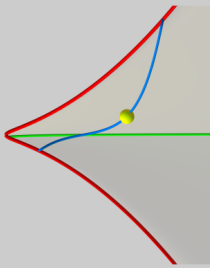
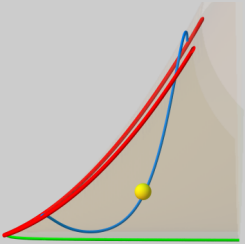


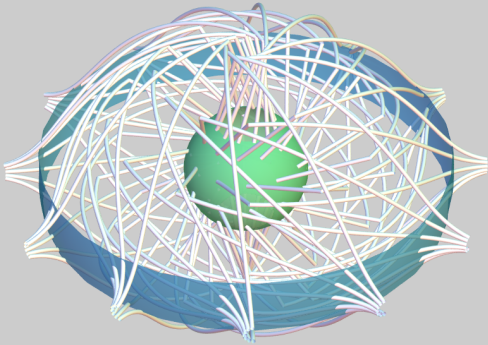
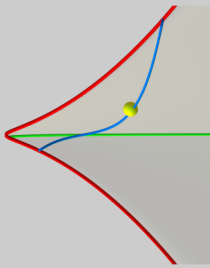
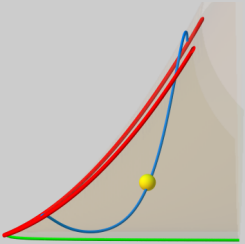


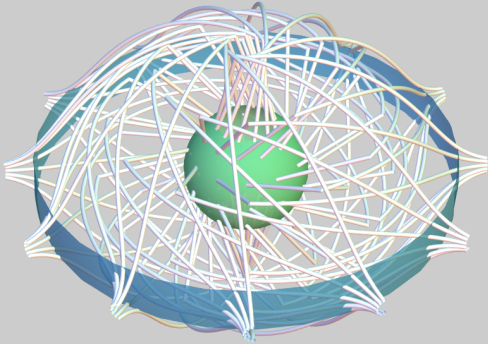
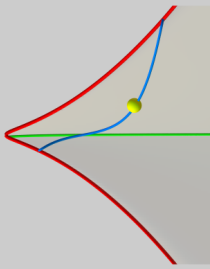
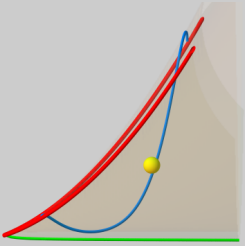


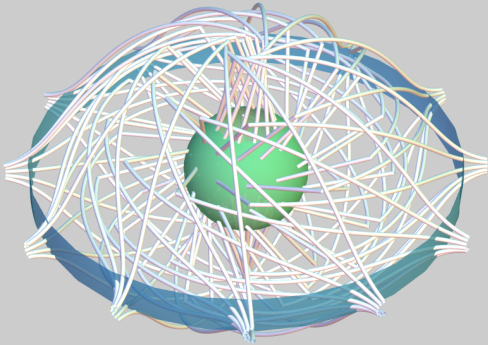
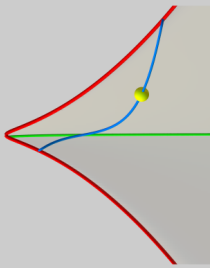
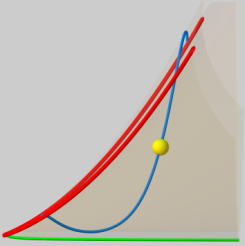


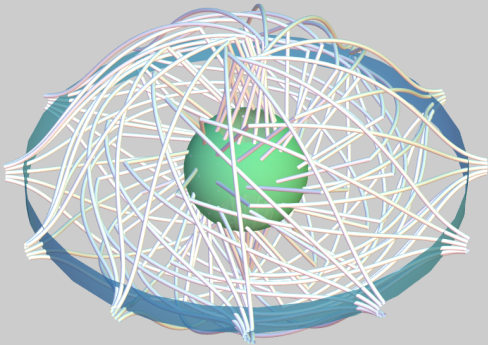
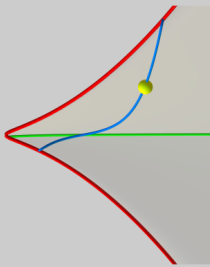
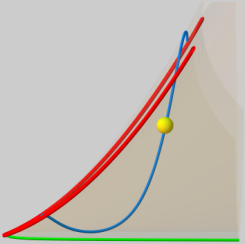


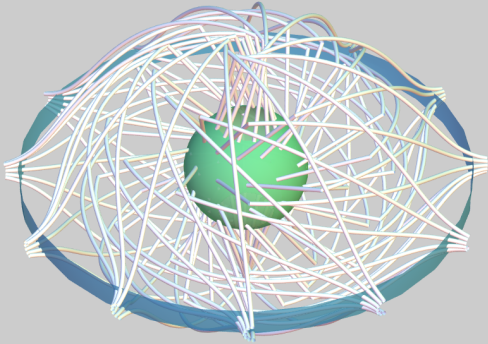
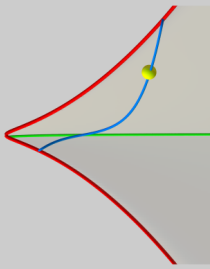
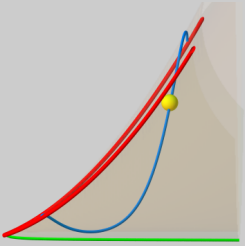


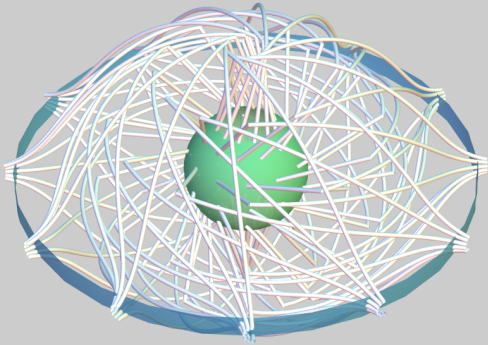
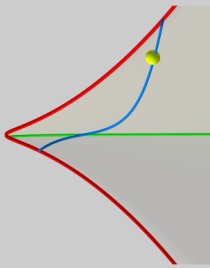
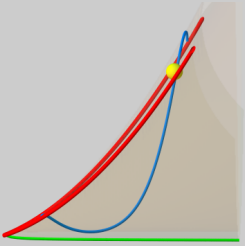


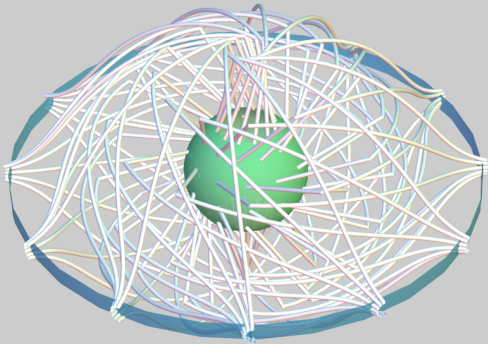
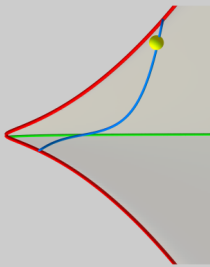


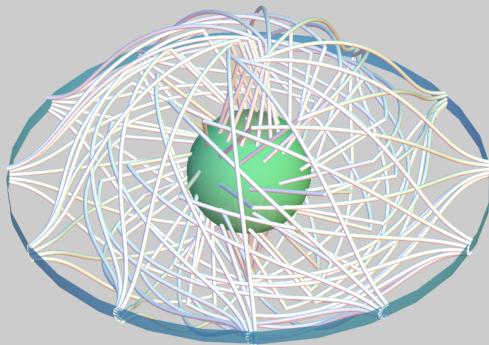
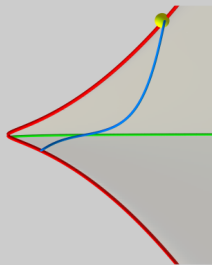
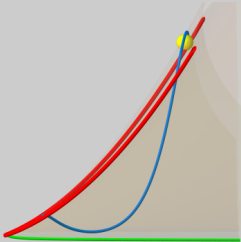








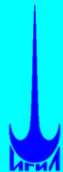




в начало

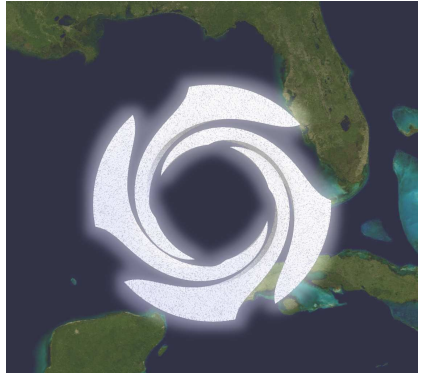
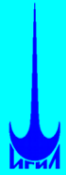
повтор

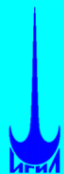
в начало

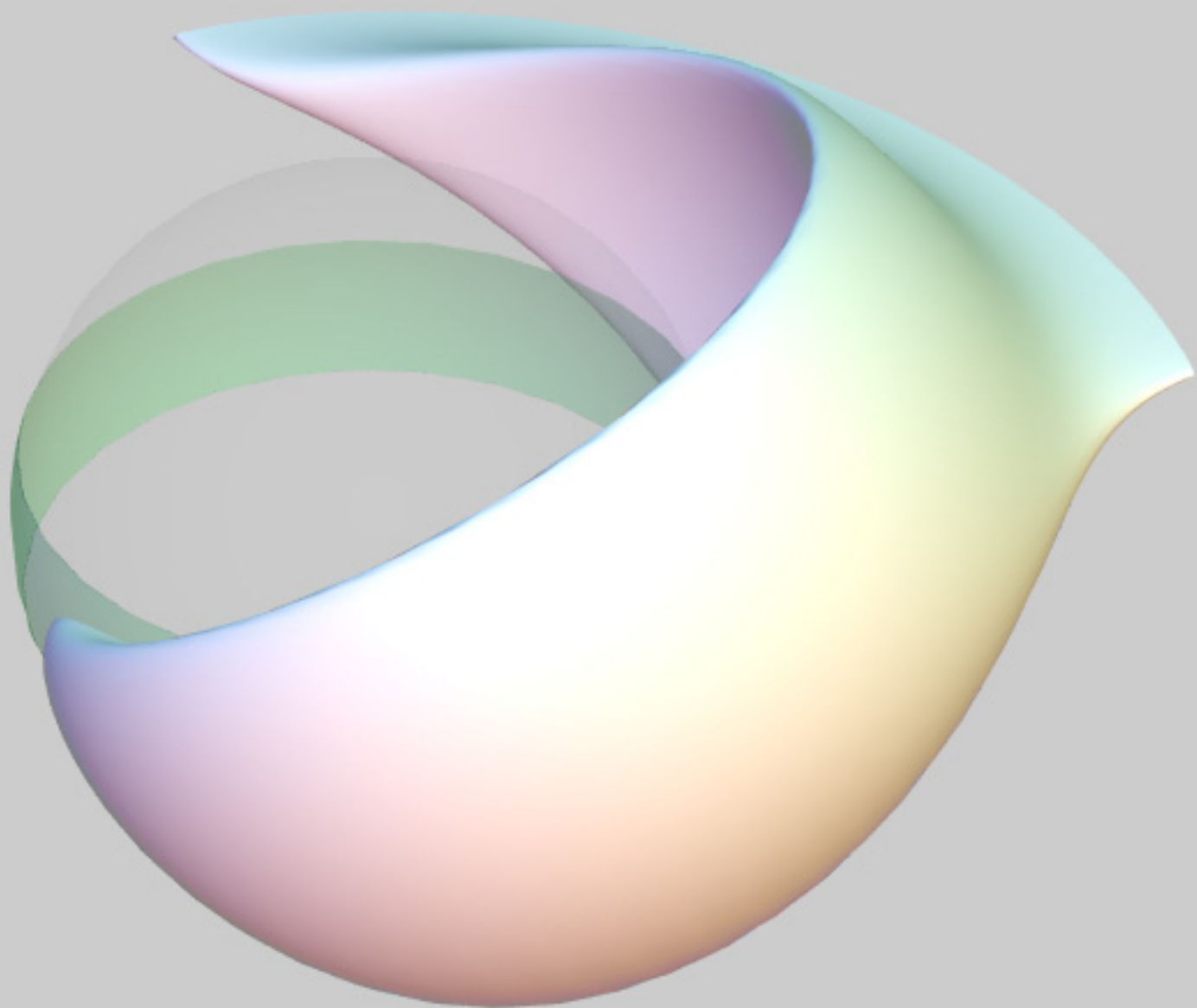


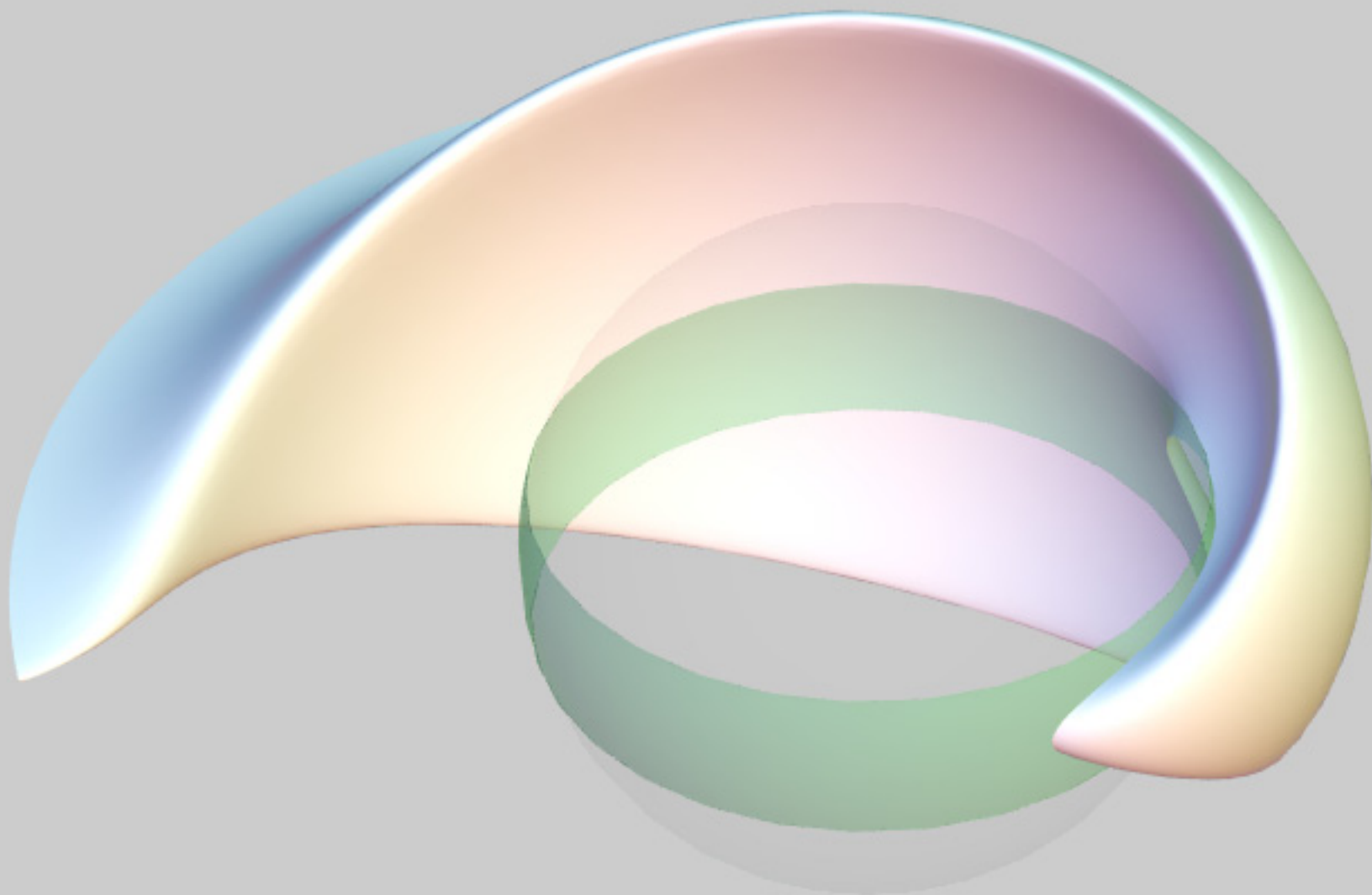
Моделирование развитой стадии тропического урагана вихрем Овсянникова.

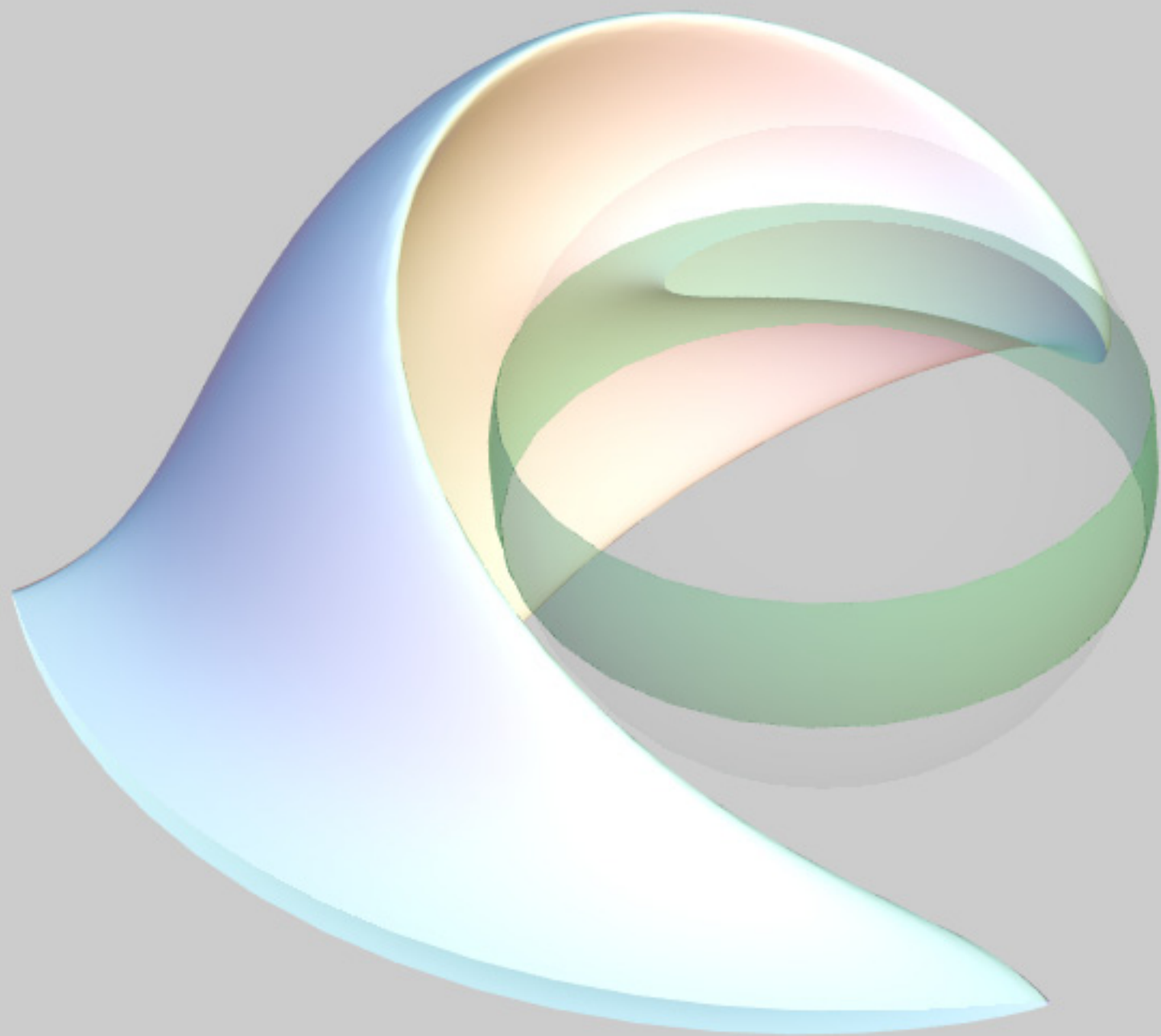
- ▶ Наличие спиральных ветвей
- ▶ Наличие «глаза бури»
- ▶ Качественное совпадение поведения физических величин

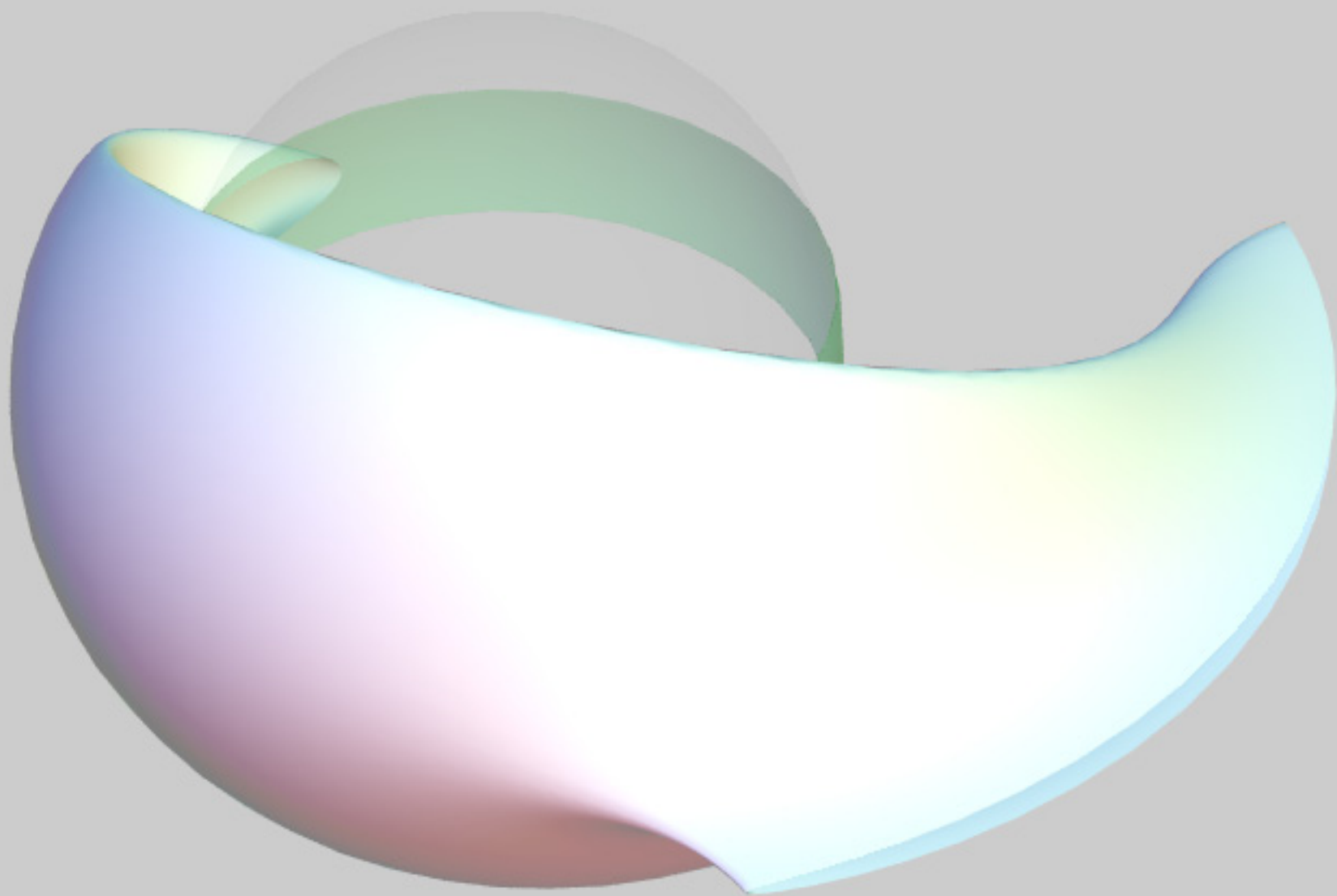


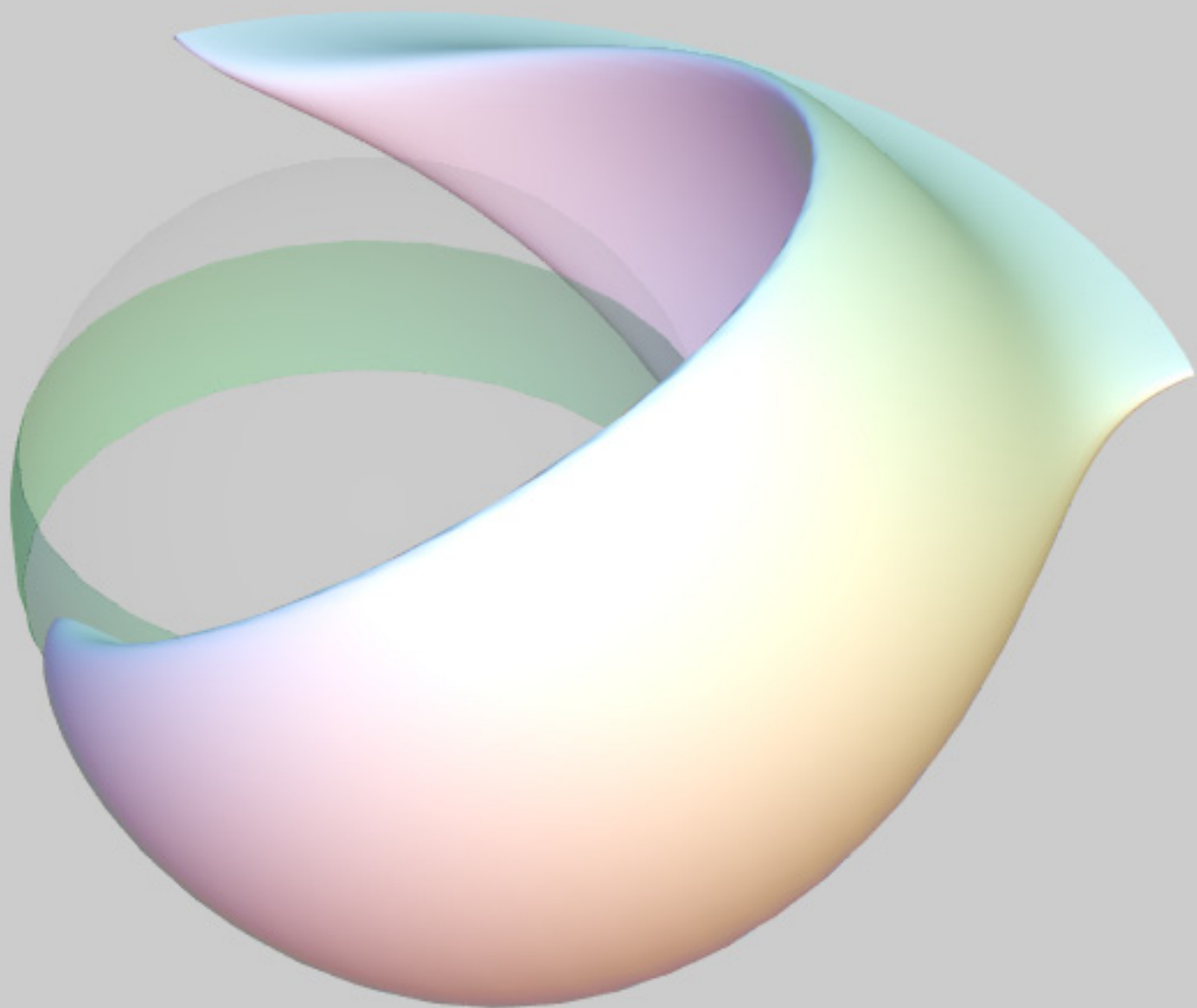


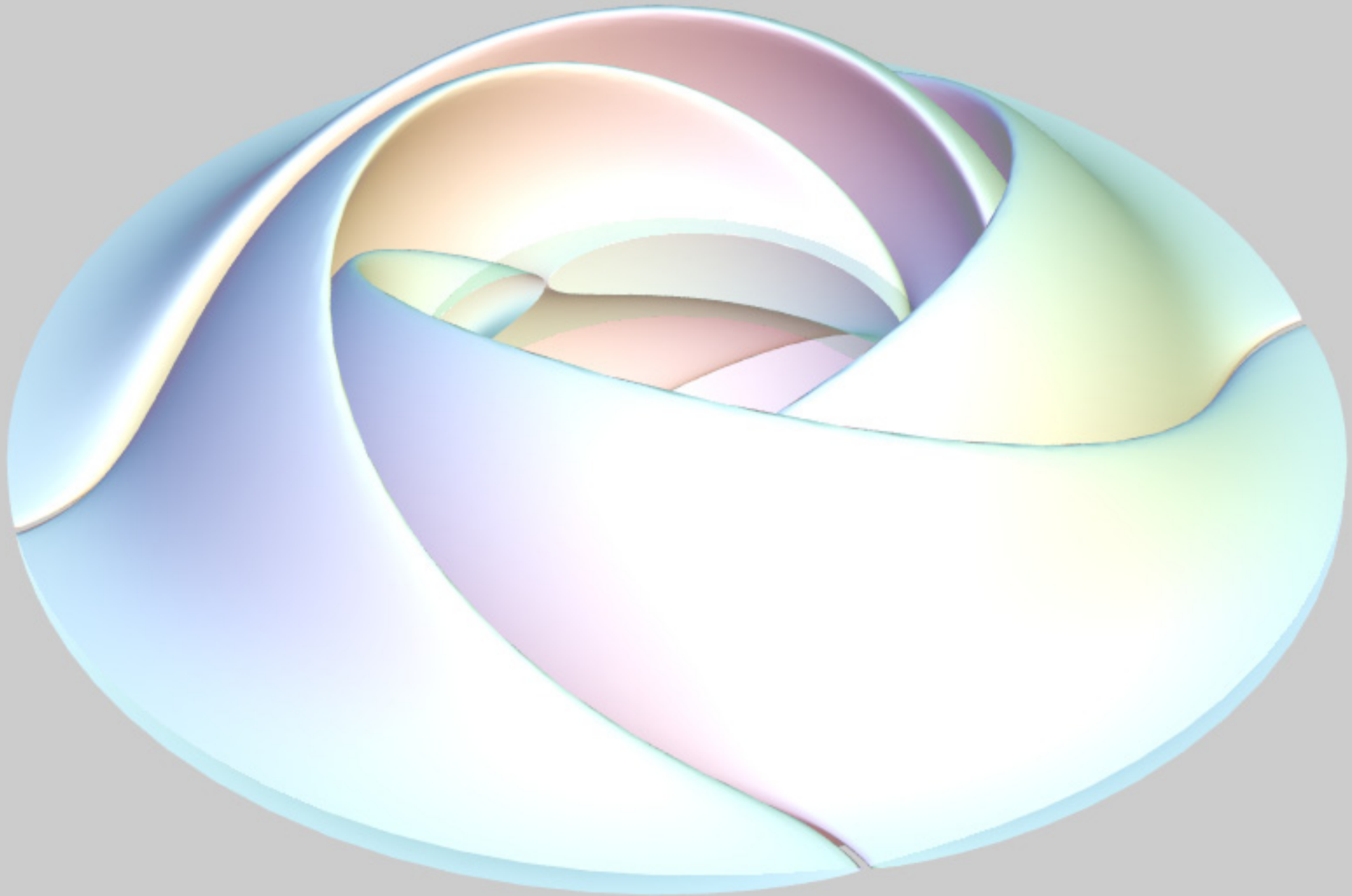


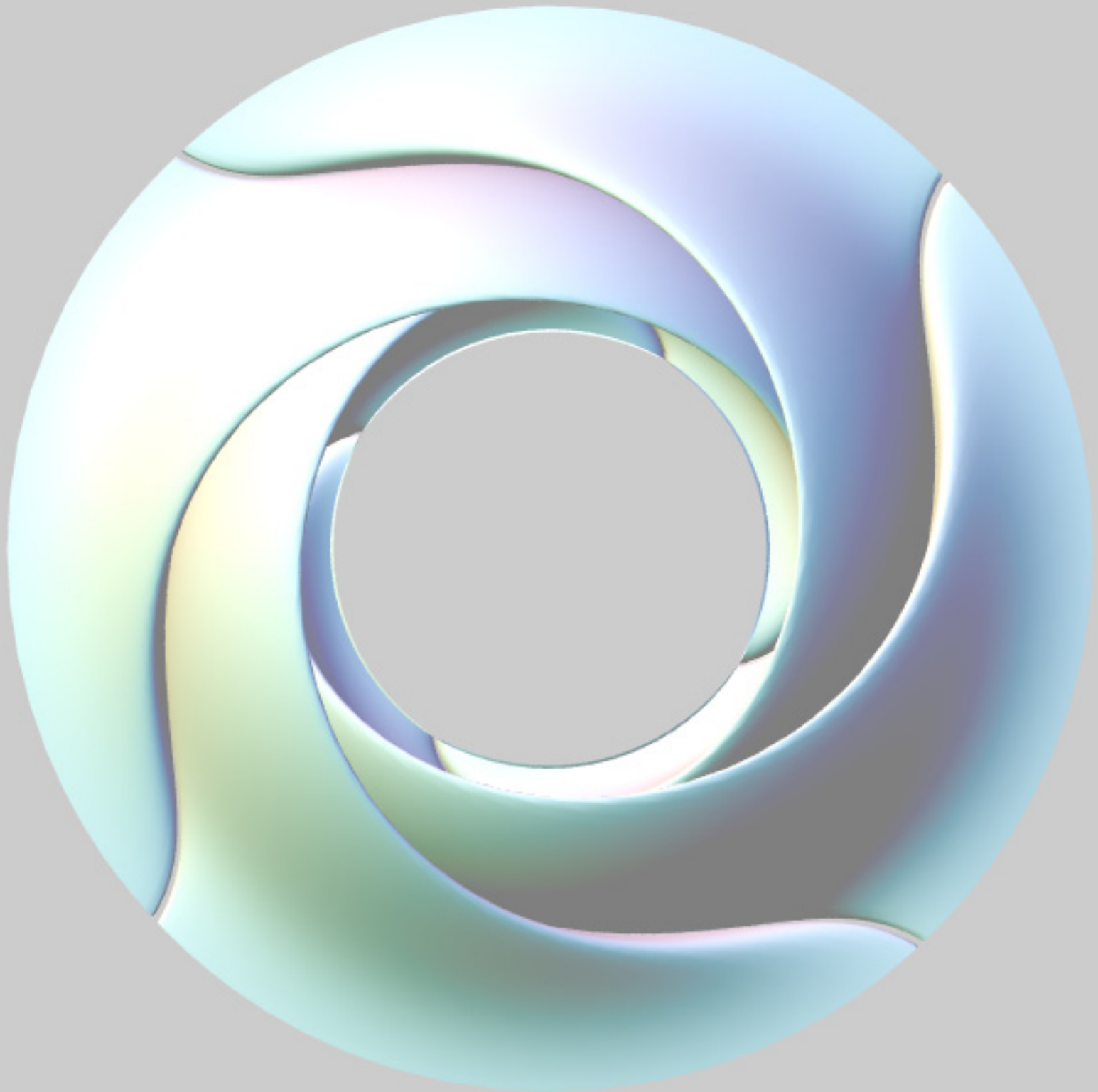




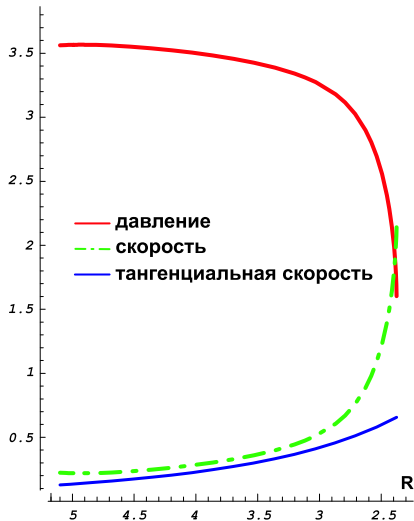
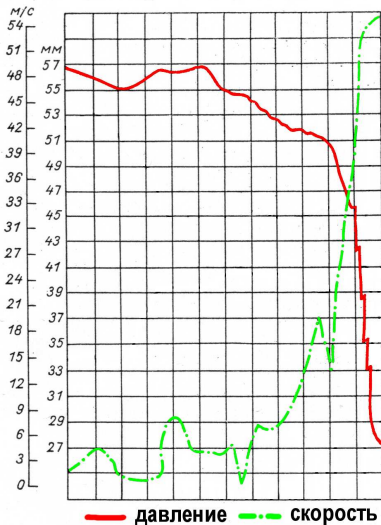








Графики физических величин



Уравнения релятивистской гидродинамики (газовой динамики) сжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{aligned}(\Gamma \rho)_t + \nabla \cdot (\Gamma \rho \vec{u}) &= 0, \\(\Gamma^2 \rho w \vec{u})_t + \nabla \cdot (\Gamma^2 \rho w \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p &= 0, \\(\Gamma^2 \rho w - p)_t + \nabla \cdot (\Gamma^2 \rho w \vec{u}) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1) вектор \vec{u} — скорость газа в лабораторной системе отсчета, ρ, p — плотность и давление, $w = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p/\rho$ — энтальпия, $\Gamma = (1 - |\vec{u}|^2)^{-1/2}$ — фактор Лоренца являются функциями независимых переменных — времени t и пространственных координат $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$.

Выбрана система единиц в которой скорость света $c = 1$, так что для скорости имеем неравенство $|\vec{u}| < 1$.

Уравнения (1) записаны в виде законов сохранения, что удобно для численного моделирования. Для анализа симметричных свойств и построения точного решения “особый вихрь” более удобна другая форма уравнений (1):

Лемма

Уравнения Эйлера релятивистской гидродинамики сжимаемой жидкости могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} bD\vec{u} + p_t\vec{u} + \nabla p &= 0, \\ Da + a\operatorname{div}\vec{u} &= 0, \\ aDd &= p_t. \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) $a = \Gamma\rho$, $b = \Gamma^2\rho w$, $d = b/a = \Gamma w$,
 $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ — полная производная.

Особый вихрь

Определение

Особым вихрем (вихрем Овсянникова) называется решение дифференциальных уравнений, которое является частично инвариантным относительно группы вращений $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x}) \times \mathbb{R}^3(\vec{u})$.

В этом представлении группа $SO(3)$ имеет инварианты $r = |\vec{x}|^{1/2}$, $|\vec{u}|$ и $\vec{x} \cdot \vec{u}$. Поскольку инвариантов, зависящих от трех компонент скорости (u^1, u^2, u^3) только два, то в этом случае можно построить частично инвариантное решение.

Инвариантными независимыми переменными являются время t и радиус-вектор r .

Особый вихрь

Выбор не инвариантной функции менее очевиден.

Л. В. Овсянников предложил в качестве этой функции угол $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$ измеряющий отклонение вектора скорости \vec{u} от меридиана сферы $r = \text{const}$.

Введем сферические координаты (r, θ, ϕ) и (U, V, W) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

так что $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

U, V, W — радиальная, широтная и долготная компоненты скорости.

Особый вихрь

Введем новые координаты для скоростей, в плоскости касательной к сфере $r = \text{const}$, полярные координаты для касательной компоненты $\vec{u}_\tau = (V, W)$ вектора скорости:

$$V = H \cos \omega, \quad W = H \sin \omega, \quad (3)$$

так что $H = \sqrt{V^2 + W^2}$, $\omega = \arctan W/V$.

Определение

Особый вихрь — это решение уравнений (2), в котором реализуется специальная зависимость функций от независимых переменных, а именно

$$\begin{aligned} U &= U(r, t), \quad \Gamma = \Gamma(r, t), \quad H = H(r, t), \\ p &= p(r, t), \quad \rho = \rho(r, t), \quad w = w(r, t), \\ \omega &= \omega(t, r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Особый вихрь

Согласно общей теории группового анализа дифференциальных уравнений следует, что после подстановки представления (4) в (2) получается композиция фактор-системы в виде объединения переопределенной системы дифференциальных уравнений для функции ω и системы уравнений для инвариантных функций U, Γ, H, p, ρ, w .

Лемма (2)

Уравнения особого вихря для релятивистской гидродинамики представляются в виде объединения инвариантной подсистемы

$$\begin{aligned} ad(D_0U - \frac{1}{r}H^2) + p_tU + p_r &= 0, \\ D_0H + \frac{U}{r}H + p_tH &= 0, \\ aD_0d &= p_t, \end{aligned} \quad (5)$$

где $D_0 = \partial_t + U\partial_r$ — инвариантная часть полной производной, и переопределенной подсистемы для функции ω :

$$\begin{aligned} k \sin \theta D_0\omega + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi + \cos \theta \sin \omega &= 0, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= h \sin \theta + \cos \theta \cos \omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$k = r/H, \quad h = k(a^{-1}D_0a + r^{-2}(r^2U)_r). \quad (7)$$

Особый вихрь

Замечательно то, что (6) и (7) в точности совпадает с соответствующими уравнениями для классической газовой динамики. При этом функция h другая, она связана с другими физическими величинами. Этот факт подчеркивает исключительно удачный выбор переменных, сделанный Л. В. Овсянниковым. Следствием этого факта является

Лемма (условие совместности Овсянникова)

Условие совместности переопределенной системы (6) имеет вид

$$kD_0h = h^2 + 1. \quad (8)$$

Уравнение (8) дополняет инвариантную систему (5). Таким образом на особый вихрь для релятивистской газовой динамики переносятся все математические результаты, доказанные для особого вихря в классической газовой динамике.

Интегрирование переопределенной системы (Овсянников)

$$L(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

где L - гладкая произвольная функция своих аргументов

$$D_0\xi = 0, \quad kD_0\tau = 1, \quad h = \operatorname{tg}\tau,$$

$$\eta = \cos\tau \sin\theta \cos\omega - \sin\tau \cos\theta,$$

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\zeta + \phi) = \cos\tau \cos\theta \cos\omega + \sin\tau \sin\theta.$$

Сложная зависимость для $\omega = \omega(t, r, \theta, \phi)$ определяемая неявно.

Стационарный особый вихрь для релятивистской газовой динамики

Рассмотрим стационарный особый вихрь, т.е. решения частично инвариантные относительно группы $\langle \partial_t, SO(3) \rangle$. В представлении (4) и в уравнениях Леммы 2 необходимо исключить зависимость от времени, тогда $D_0 = U \frac{d}{dr}$. В дальнейшем рассмотрим случай одноатомного газа $\gamma = 5/3$, интересного для приложений.

Уравнения (5) частично интегрируются и имеет место следующая лемма

Стационарный особый вихрь для релятивистской газовой динамики

Лемма

Для стационарного особого вихря в релятивистской газовой динамике инвариантная подсистема (5) сводится к обыкновенному неявному дифференциальному уравнению

$$F(R, h, p; m_0, s_0) \equiv q^{3/2} - R^2 p \left(3m_0 + s_0 \frac{p^2}{1+h^2} \right) q + \quad (9) \\ + 3m_0^2 R^4 p^2 q^{1/2} - m_0^3 R^6 p^3 = 0,$$

где $p = dh/dR$; $0 < s_0$, $0 < m_0 < 1$ — постоянные, характеризующие физику задачи, $R > 1$ — нормированное расстояние, $q = q(R, h, p)$ имеет вид

$$q(R, h, p) = R^2(R^2 - 1)p^2 - (1 + h^2)^2. \quad (10)$$

Лемма (продолжение)

Инвариантные функции имеют следующее представление через функцию h и ее производную h_R :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1 + h^2}{R^2 h_R}, \quad a = \frac{\varkappa_0}{a_0} \frac{h_R}{\sqrt{1 + h^2}}, \\
 \Gamma &= \left[1 - \frac{1}{R^2} \left(1 + \left(\frac{1 + h^2}{R h_R} \right)^2 \right) \right]^{-1/2}, \\
 d &= d_0, \quad H = \frac{1}{R}, \quad w = d_0 / \Gamma,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где a_0 , \varkappa_0 , d_0 — постоянные.

Таким образом, отыскание особого вихря для релятивистской газовой динамики сводится к решению уравнения (9) и переопределенной системы (6).

Исследование особых точек уравнения (9)

Неявное уравнение (9) может быть разрешено относительно производной p во всех точках $\mathbb{R}^3(R, h, p)$, кроме точек многообразия

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0. \quad (12)$$

Кривая (12) называется кривой ветвления интегральных кривых. Эта кривая состоит из особых точек уравнения (9), называемых регулярными особыми точками. Кроме того, для уравнения общего положения (9) на этой кривой могут встречаться изолированные нерегулярные особые точки двух типов:

- собранные особые точки
- сложенные особые точки

Исследование особых точек

Сложенные особые точки находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0, \\ F_R(R, h, p) + pF_h(R, h, p) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Собранные особые точки находятся из системы уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0, \quad F_{pp}(R, h, p) = 0. \quad (14)$$

Определение

Проекция кривинантной кривой на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ называется дискриминантной кривой.

Поднятие уравнения до векторного поля

Суть геометрического подхода к исследованию неявных уравнений, предложенного Пуанкаре, состоит в поднятии неявного уравнения $F = 0$ до векторного поля

$$R_\tau = F_p, \quad h_\tau = pF_p, \quad p_\tau = -(F_R + pF_h), \quad (15)$$

в пространстве (R, h, p) , где τ — новый параметр вдоль интегральной кривой. При такой трактовке интегральные кривые уравнения (9) расположены на различных листах поверхности $F = 0$, которые могут проектироваться на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ с наложением друг на друга.

При этом решение определено на интервале для которого интегральная кривая не доходит до дискриминантной кривой.

Поднятие уравнения до векторного поля

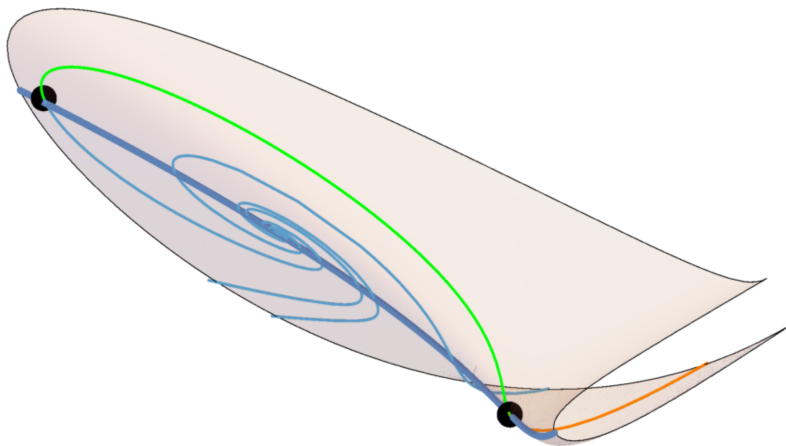


Рис. 1: Поверхность $F = 0$ и интегральные кривые системы уравнений (15).

Символьные и численные вычисления

Исследование особых точек уравнения (9) связано с большими вычислительными трудностями. Решение систем уравнений (13) и (14), определяемое результатами соответствующих многочленов, может быть получено при помощи систем символьных и численных вычислений.

Даже при использовании таких систем время расчета является большим (до сотен часов на Intel Core i7-4770 CPU @ 3.40 GHz, 32.0 GB RAM).

В дальнейшем все утверждения обоснованы при помощи символьных и численных вычислений.

Дискриминантная кривая

Дискриминантная кривая определяется следующей системой уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0. \quad (16)$$

Для решения этой и подобных систем мы используем следующую технику. Поскольку уравнения системы (16) являются полиномами по p , можно исключить p с помощью построения результата этих двух полиномов. Пусть

$$R_{12}(R, h) = \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_2). \quad (17)$$

Далее, на (R, h) -плоскости, алгебраическое уравнение $R_{12}(R, h) = 0$ численно решается относительно h .

Здесь и далее мы работаем с F^2 , т.е. $F := F^2$.

Дискриминантная кривая

Таким образом, для заданных m_0 , s_0 и R , можно вычислить дискриминантную кривую. В результате численных расчетов получено следующее утверждение

Утверждение (о дискриминантной кривой)

Дискриминантная кривая состоит из одной или двух компонент

Дискриминантная кривая всегда имеет “основную” компоненту, но для достаточно малых s_0 ($s_0 \approx 10^{-2}$ и меньше) возникает “дополнительная” компонента (Рис. 2).

Компоненты дискриминантной кривой

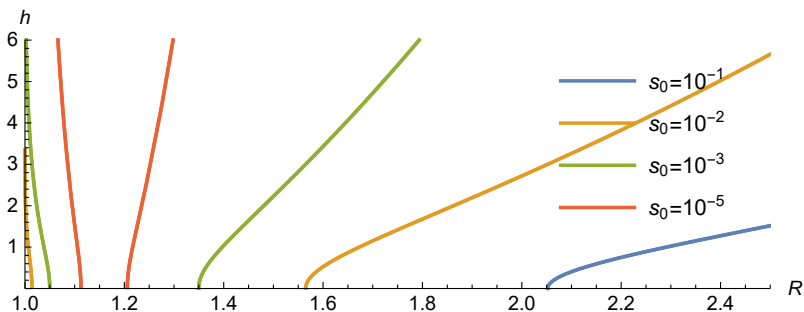


Рис. 2: Дискриминантная кривая для фиксированного $m_0 = 0.5$ и $s_0 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}$.

Сложенные особые точки

Сложенные особые точки находятся из системы уравнений (13). Для решения этой системы применяется та же техника, что и для нахождения дискриминантной кривой (16). Обозначим $\Phi_1 = F$, $\Phi_2 = F_p$, $\Phi_3 = F_R + pF_h$.

Тогда для решения системы необходимо вычислить следующие результаты

$$\begin{aligned} R_{12}(R, h) &= \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_2), \\ R_{13}(R, h) &= \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_3). \end{aligned} \tag{18}$$

Пересечение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$ дает множество сложенных особых точек. После упрощения полином R_{12} имеет степень 60 по R и 180 по h , полином R_{13} — 64 по R и 170 по h .

Сложенные особые точки

В результате численных расчетов получен следующий результат

Утверждение (о существовании и единственности сложной особой точки)

Для любых значений параметров s_0 и m_0 существует единственная особая точка.

На Рис. 3 изображено стандартное взаиморасположение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$.

Сложенные особые точки

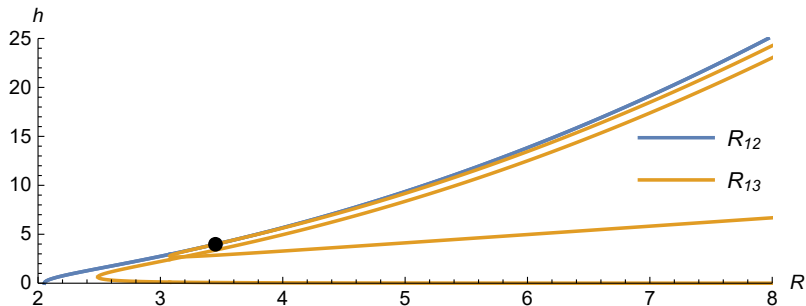


Рис. 3: Сложенная особая точка для $m_0 = 0.5$ и $s_0 = 0.1$.

Для нахождения $R_{12}(R, h)$ необходимо вычислить определитель порядка 19 ($11! = 39.916.800$ ненулевых слагаемых), для нахождения $R_{13}(R, h)$ — определитель порядка 20 ($15! = 1.307.674.368.000$ ненулевых слагаемых).

Интегральные кривые

Утверждение (о типе сложной особой точки)

Для любых параметров $s_0 > 0$ и $0 < t_0 < 1$ сложная особая точка является сложным фокусом.

Интегральные кривые

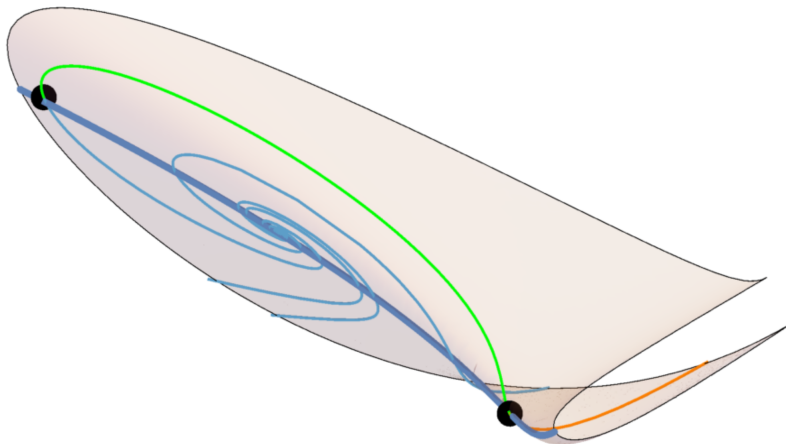


Рис. 4: Поведение интегральных кривых вблизи сложной особой точки, две ветви решения; $m_0 = 0.5$, $s_0 = 1$.

Интегральные кривые

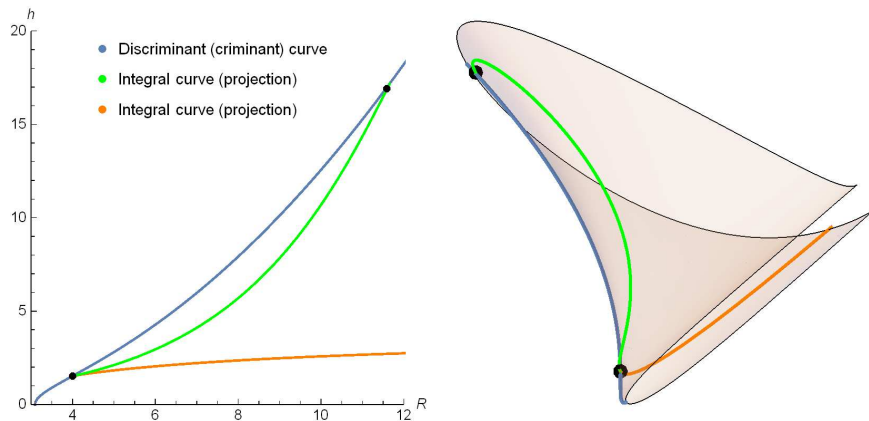


Рис. 5: Две ветви решения; $m_0 = 0.5, s_0 = 1$.

Изменение U вдоль интегральной кривой

Изменение U вдоль интегральной кривой

Изменение N вдоль интегральной кривой

Изменение N вдоль интегральной кривой

Изменение Γ вдоль интегральной кривой

Изменение Γ вдоль интегральной кривой

Изменение w вдоль интегральной кривой

Изменение w вдоль интегральной кривой















Изменение плотности вдоль интегральной кривой

Изменение плотности вдоль интегральной кривой

Изменение давления вдоль интегральной кривой

Изменение давления вдоль интегральной кривой

Литература

-  Landau L D, Lifshitz E M 1959 *Fluid Mechanics, Course in theoretical physics Vol. 6* (Pergamon press)
-  LeFloch P G, Ukai S A 2008 *ArXiv*
-  Godunov S K 2012 *J. Comput. Math. Math. Phys.* 52 5 916-929
-  Gourgoulhon E 2006 An introduction to relativistic hydrodynamics, Stellar Fluid Dynamics and Numerical Simulations *EAS Publ. Ser.* 21 43-79
-  Ovsyannikov L V 1995 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 36 3 45-52
-  Ovsyannikov L V 1982 *Group analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press)
-  Borshch M S, Zhdanov V I 2007 *SIGMA* 3 116
-  Alexa C, Vrinceanu D 1996 *ArXiv*
-  Perucho M, Marti J M, Hanasz M 2005 *ArXiv*
-  Cherevko A A, Chupakhin A P 2005 *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS Preprint N 1*
-  Golovin S V 2005 *J. Phys. A Math. Gen* 38 4501-4516
-  Arnold V I 2006 *Ordinary differential equations Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*
-  Remizov A O 2006 *Contemp. Math. Fundam. Direct.* 19 131-170
-  Davydov A A 1985 *Funct. Anal. Appl.* 19 2 1-10

Спасибо за внимание!