Алгебры с сильной гомотопией и их приложения в физике высоких энергий

А. А. Шарапов

физический факультет ТГУ

План

1. Зачем физику сильногомотопические алгебры?
2. A_∞- и L_∞-алгебры: основные понятия и утверждения
3. Некоторые примеры A_∞- и L_∞-алгебр в математике
   - Рациональная теория гомотопий Квиллена–Салливана
   - Деформационное квантование Концевича
4. Задача деформации A_∞-алгебр

Физическая мотивировка

Проблема взаимодействия элементарных частиц высших спинов

6-ая проблема Гильберта (современная формулировка):

Какая математическая структура лежит в основе фундаментальных взаимодействий?

Все элементарные частицы классифицируются массой и спином:

- $s = 0$ – скалярное поле (просто; нет калибровочных симметрий)
- $s = 1$ – поля Янга-Миллса (связности в векторных расслоениях)
- $s = 2$ – гравитация Эйнштейна (риманова геометрия)
- $s > 2$ – ???

Свободные волновые уравнения известны для частиц всех спинов!

Супергравитация и теория струн

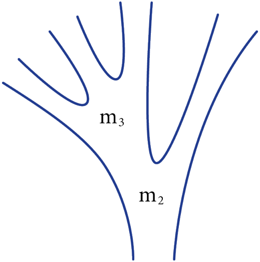
Частицы высших спинов по-видимому необходимы для построения последовательной квантовой гравитации.

Супергравитация с $\mathcal{N} > 8$?

Полевая теория струн:

$$Q\Phi = m_2(\Phi, \Phi) + m_3(\Phi, \Phi, \Phi) + m_4(\Phi, \Phi, \Phi, \Phi) + \cdots$$

- Φ – струнное поле
- Q – БРСТ-оператор ($Q^2 = 0$)
- m_k – струнные амплитуды рассеяния в древесном приближении



A_∞- и L_∞-алгебры в полевой теории струн

Условие интегрируемости уравнений полевой теории струн

$$Q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k+l=n} \pm m_k(\dots, m_l(\dots), \dots) = 0\,, \quad n = 3, 4, \dots,$$

приводит к определению (минимальной) A_∞-алгебры с операциями умножения

$$m_k(a_1, a_2, \dots, a_k)\,, \qquad k = 2, 3, \dots$$

Потребовав дополнительно, чтобы m_k были антисимметричны, получим (минимальную) L_∞-алгебру.

$$A_\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\text{открытая струна})\,, \qquad L_\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\text{замкнутая струна})$$

[E. Witten, B. Zwiebach, M. Gaberdiel, H. Kajiura & J. Stasheff, ...]

Гравитация с высшими спинами

Супергравитация < ВС гравитация < Теория струн

- Φ – дифференциальные формы со значениями в алгебре
- $Q = d$ – внешний дифференциал на формах

Уравнения движения [М. Васильев, 1988]:

$$d\Phi = m_2(\Phi, \Phi) + m_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \cdots$$

$m_2(a, b)$ – ассоциативное умножение (алгебра высших спинов).

Задача: по заданному m_2 найти все высшие вершины взаимодействия m_k, удовлетворяющие условию интегрируемости.

Деформационная интерпретация:

$$m = m_2 + \lambda m_3 + \lambda^2 m_4 + \cdots ,$$

λ – параметр деформации (константа взаимодействия).

Градуированные пространства и их гомоморфизмы

Пусть

- $V = \bigoplus_l V^l$ – $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство над k;
- $T(V) = \bigoplus_n V^{\otimes n}$ – тензорная алгебра V.

В пространстве

$$\mathrm{Hom}(T(V), V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^p(T(V), V)$$

полилинейных отображений из V в V определено $\circ$-произведение:

$$\forall \quad f \in \mathrm{Hom}(T^n(V), V)\,, \quad g \in \mathrm{Hom}^p(T^m(V), V)\,, \quad v_i \in V\,,$$

$$(f \circ g)(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_{m+n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{p \sum_{j=1}^{i} |v_j|} f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes g(v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_{i+m}) \otimes \cdots \otimes v_{m+n-1})$$

Скобка Герштенхабера и A_∞-алгебры

Скобка Герштенхабера

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$$

вводит в $\mathrm{Hom}(T(V), V)$ структуру градуированной супералгебры Ли.

- Анти-симметричность: $[f,g] = -(-1)^{|f||g|}[g,f]$,
- тождество Якоби:

$$[[f,g],h] = [f,[g,h]] - (-1)^{|f||g|}[g,[f,h]]\,.$$

A_∞-структура на V задается $m \in \mathrm{Hom}^1(T(V), V)$, удовлетворяющим

$$[m,m] = 2m \circ m = 0\,.$$

Пара (V, m) называется A_∞-алгеброй [J. Stasheff, 1963].

Отцы – основатели

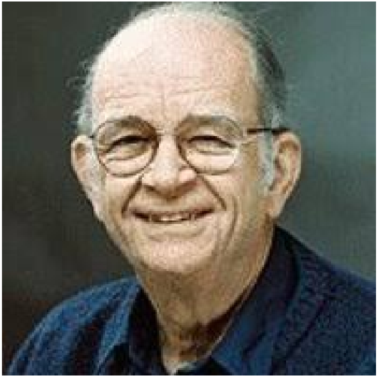


Рис.: Мюррэй Герштенхабер и Джим Сташев

Частные случаи A_∞-алгебр

Тождества Сташева для компонентных отображений:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\,, \qquad m_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,,$$

$$m \circ m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k+l=n} m_k \circ m_l = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $m = m_1 \Rightarrow (V, d)$ – комплекс с дифференциалом $d = m_1$:

$$\cdots \longrightarrow V_{-1} \xrightarrow{d} V_0 \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} V_2 \longrightarrow \cdots$$

  Если $H(V, d) = 0$, то (V, m_1) – линейно стягиваемая A_∞-алгебра.

- $m = m_2 \Rightarrow A = (V, \cdot\,)$ – град. ассоциативная алгебра:

$$u \cdot v = (-1)^{|u|-1} m_2(u, v)\,,$$

$$m_2 \circ m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)\,.$$

Частные случаи A_∞-алгебр

Тождества Сташева для компонентных отображений:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\,, \qquad m_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,,$$

$$m \circ m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k+l=n} m_k \circ m_l = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $m = m_1 \Rightarrow (V, d)$ – комплекс с дифференциалом $d = m_1$:

$$\cdots \longrightarrow V_{-1} \xrightarrow{d} V_0 \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} V_2 \longrightarrow \cdots$$

  Если $H(V, d) = 0$, то (V, m_1) – линейно стягиваемая A_∞-алгебра.

- $m = m_2 \Rightarrow A = (V, \cdot\,)$ – град. ассоциативная алгебра:

$$u \cdot v = (-1)^{|u|-1} m_2(u, v)\,,$$

$$m_2 \circ m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)\,.$$

Частные случаи A_∞-алгебр

Тождества Сташева для компонентных отображений:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\,, \qquad m_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,,$$

$$m \circ m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k+l=n} m_k \circ m_l = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $m = m_1 \Rightarrow (V, d)$ – комплекс с дифференциалом $d = m_1$:

$$\cdots \longrightarrow V_{-1} \xrightarrow{d} V_0 \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} V_2 \longrightarrow \cdots$$

  Если $H(V, d) = 0$, то (V, m_1) – линейно стягиваемая A_∞-алгебра.
- $m = m_2 \Rightarrow A = (V, \cdot\,)$ – град. ассоциативная алгебра:

$$u \cdot v = (-1)^{|u|-1} m_2(u, v)\,,$$

$$m_2 \circ m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)\,.$$

Частные случаи A_∞-алгебр

- $m = m_1 + m_2 \quad \Rightarrow \quad A = (V, d, \cdot\,)$ – дифф. град. алгебра,

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + (-1)^{|u|-1} u \cdot dv\,.$$

- $m = m_2 + m_3 + \cdots$ – минимальная A_∞-структура;

В общем случае $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \cdots$
$d = m_1 : V \to V$ задает комплекс и дифференцирует произведение $m_2 : V \otimes V \to V$ по правилу Лейбница, но условие ассоциативности умножения выполняется лишь с точностью до гомотопии:

$$(u \cdot v) \cdot w - u \cdot (v \cdot w) = dm_3(u, v, w) +$$

$$+ m_3(du, v, w) + (-1)^{|u|} m_3(u, dv, w) + (-1)^{|u|+|v|} m_3(u, v, dw)\,.$$

m_2 индуцирует ассоциативное произведение в когомологиях d.

Частные случаи A_∞-алгебр

- $m = m_1 + m_2 \quad \Rightarrow \quad A = (V, d, \cdot\,)$ – дифф. град. алгебра,

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + (-1)^{|u|-1} u \cdot dv\,.$$

- $m = m_2 + m_3 + \cdots$ – минимальная A_∞-структура;

В общем случае $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \cdots$
$d = m_1 : V \to V$ задает комплекс и дифференцирует произведение $m_2 : V \otimes V \to V$ по правилу Лейбница, но условие ассоциативности умножения выполняется лишь с точностью до гомотопии:

$$(u \cdot v) \cdot w - u \cdot (v \cdot w) = dm_3(u, v, w) +$$
$$+ m_3(du, v, w) + (-1)^{|u|} m_3(u, dv, w) + (-1)^{|u|+|v|} m_3(u, v, dw)\,.$$

m_2 индуцирует ассоциативное произведение в когомологиях d.

L_∞-алгебры

- $V = \bigoplus_l V^l$ – $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство над k;
- $\Lambda(V) = \bigoplus_n \Lambda^n V$ – внешняя алгебра пространства V.

L_∞-алгебра на V задается набором полилинейных отображений:

$$l_n : \Lambda^n V \to V\,, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{k+m-1=n,} \sum_{\sigma \in S_n} \pm l_k(l_m(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}), v_{\sigma(m+1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = 0.$$

В частности, $l_1 l_1 = 0$ и

$$l_2(l_2(u,v),w) \pm l_2(l_2(w,u),v) \pm l_2(l_2(v,w),u) =$$
$$= l_1 l_3(u,v,w) \pm l_3(l_1(u),v,w) \pm l_3(u,l_1(v),w) \pm l_3(u,v,l_1(w)).$$

Связь между A_∞ и L_∞: $\quad l_n(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = m_n(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$

Категория A_∞-алгебр

Морфизмом $(V,m) \xrightarrow{f} (W,\tilde{m})$ двух A_∞-алгебр называется такой гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}^0(T(V),W)$, $f = f_1 + f_2 + \cdots$, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{m}_p(f,\dots,f) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{l} \pm f_l(\dots,\underbrace{m}_{q},\dots)\,.$$

В частности, $f_1 : V \to W$ – цепное преобразование:

$$\tilde{m}_1 f_1 = f_1 m_1 \quad \Rightarrow \quad f_1^* : H(V,m_1) \to H(W,\tilde{m}_1)\,.$$

f – квази-изоморфизм, если f_1^* – изоморфизм;
$(V,m) \sim (W,\tilde{m})$ – квази-изоморфные A_∞-алгебры.

Любой представитель класса квази-изоморфных алгебр называется его моделью.

Структурные теоремы

- Каждая A_∞-алгебра изоморфна прямой сумме линейно стягиваемой и минимальной:

$$V = V_{\text{л.ст}} \oplus V_{\text{мин}}\,, \qquad m = m_{\text{л.ст}} + m_{\text{мин}}\,.$$

- Каждая A_∞-алгебра имеет минимальную модель, т.е.

$$(V, m) \sim (H(V, m_1), \tilde{m}) \qquad \tilde{m} = \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + \cdots$$

- Каждый квази-изоморфизм $f : V \to W$ имеет квази-обратный $g : W \to V$, т. е. $(gf)^* = \mathrm{id} : H(V) \to H(W)$.

- *Каждая A_∞-алгебра квази-изоморфна свободной дифференциальной градуированной алгебре $A = (T(V), \otimes, d)$* (анти-минимальная модель).

Структурные теоремы

- Каждая A_∞-алгебра изоморфна прямой сумме линейно стягиваемой и минимальной:

$$V = V_{\text{л.ст}} \oplus V_{\text{мин}}\,, \qquad m = m_{\text{л.ст}} + m_{\text{мин}}\,.$$

- Каждая A_∞-алгебра имеет минимальную модель, т.е.

$$(V, m) \sim (H(V, m_1), \tilde{m}) \qquad \tilde{m} = \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + \cdots$$

- Каждый квази-изоморфизм $f : V \to W$ имеет квази-обратный $g : W \to V$, т. е. $(gf)^* = \mathrm{id} : H(V) \to H(W)$.

- *Каждая A_∞-алгебра квази-изоморфна свободной дифференциальной градуированной алгебре $A = (T(V), \otimes, d)$* (анти-минимальная модель).

Структурные теоремы

- Каждая A_∞-алгебра изоморфна прямой сумме линейно стягиваемой и минимальной:

$$V = V_{\text{л.ст}} \oplus V_{\text{мин}}\,, \qquad m = m_{\text{л.ст}} + m_{\text{мин}}\,.$$

- Каждая A_∞-алгебра имеет минимальную модель, т.е.

$$(V, m) \sim (H(V, m_1), \tilde{m}) \qquad \tilde{m} = \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + \cdots$$

- Каждый квази-изоморфизм $f : V \to W$ имеет квази-обратный $g : W \to V$, т. е. $(gf)^* = \mathrm{id} : H(V) \to H(W)$.

- *Каждая A_∞-алгебра квази-изоморфна свободной дифференциальной градуированной алгебре $A = (T(V), \otimes, d)$* (анти-минимальная модель).

Структурные теоремы

- Каждая A_∞-алгебра изоморфна прямой сумме линейно стягиваемой и минимальной:

$$V = V_{\text{л.ст}} \oplus V_{\text{мин}}\,, \qquad m = m_{\text{л.ст}} + m_{\text{мин}}\,.$$

- Каждая A_∞-алгебра имеет минимальную модель, т.е.

$$(V, m) \sim (H(V, m_1), \tilde{m}) \qquad \tilde{m} = \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + \cdots$$

- Каждый квази-изоморфизм $f : V \to W$ имеет квази-обратный $g : W \to V$, т. е. $(gf)^* = \mathrm{id} : H(V) \to H(W)$.

- *Каждая A_∞-алгебра квази-изоморфна свободной дифференциальной градуированной алгебре $A = (T(V), \otimes, d)$* (анти-минимальная модель).

(Анти-)минимальная модель комплекса де Рама

$(\Omega(M), d)$ – комплекс де Рама гладкого многообразия M:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

Минимальная модель д.г. алгебры $(\Omega^\bullet(M), \wedge, d)$ наделяет группы когомологий де Рама $H(M)$ минимальной A_∞-структурой m:

- $m_2([\alpha], [\beta]) = (-1)^{|\alpha|-1}[\alpha \wedge \beta]$;
- $m_3([\alpha], [\beta], [\gamma]) = \langle [\alpha], [\beta], [\gamma] \rangle$ – тройное произведение Масси;
- $\cdots$

[DGMS]: $\forall$ компактное кэлерово многообразие M формально, т.е.

$$(\Omega^\bullet(M), \wedge, d) \sim (H^\bullet(M), m_2)\,.$$

Соответствующая анти-минимальная модель $(A^\bullet, \cdot, d)$ дает информацию о гомотопических группах M [D. Sullivan, 1973]:

$$\dim \pi_n(M) \otimes \mathbb{Q} = \dim A^n_{\text{indec}} \qquad (H^1(M) = 0)\,.$$

Д.г. алгебра Ли полидифференциальных операторов

Рассмотрим $\mathrm{Hom}(T(V),V)=\bigoplus_n \mathrm{Hom}^n(T(V),V)$ как градуированную супералгебру Ли относительно скобки Герштенхабера.

Если $V=V_{-1}$ – ассоциативная алгебра с умножением $m: V\otimes V\to V$, тогда для $\forall f\in \mathrm{Hom}(T(V),V)$ положим

$$\delta f=[m,f]\,,\qquad |m|=1\,,\qquad \delta^2=0\quad\Leftrightarrow\quad [m,m]=0\,.$$

δ – дифференц. Хохшильда, $\Big(\mathrm{Hom}(T(V),V),[\cdot,\cdot],\delta\Big)$ – д.г. алгебра Ли.

Пусть

- $V=C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M,
- $\mathrm{Hom}(T(V),V)\supset \mathrm{Poly(M)}\ni f(v_1,v_2,\ldots)$ – полидиф. операторы,
- $\Lambda(M)$ – пространство поливекторных полей на M:

$$f=f^{i_1i_2\cdots i_p}(x)\partial_{i_1}\wedge\partial_{i_2}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_p}\in\Lambda^p(M)\,.$$

Д.г. алгебра Ли полидифференциальных операторов

Рассмотрим $\mathrm{Hom}(T(V),V)=\bigoplus_n \mathrm{Hom}^n(T(V),V)$ как градуированную супералгебру Ли относительно скобки Герштенхабера.

Если $V=V_{-1}$ – ассоциативная алгебра с умножением $m:V\otimes V\to V$, тогда для $\forall f\in\mathrm{Hom}(T(V),V)$ положим

$$\delta f=[m,f]\,,\qquad |m|=1\,,\qquad \delta^2=0\quad\Leftrightarrow\quad [m,m]=0\,.$$

δ – дифференц. Хохшильда, $\Big(\mathrm{Hom}(T(V),V),[\cdot,\cdot],\delta\Big)$ – д.г. алгебра Ли. Пусть

- $V=C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M,
- $\mathrm{Hom}(T(V),V)\supset\mathrm{Poly(M)}\ni f(v_1,v_2,\ldots)$ – полидиф. операторы,
- $\Lambda(M)$ – пространство поливекторных полей на M:

$$f=f^{i_1i_2\cdots i_p}(x)\partial_{i_1}\wedge\partial_{i_2}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_p}\in\Lambda^p(M)\,.$$

Теорема формальности Концевича

Теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга:

$$H(\mathrm{Poly}(M), \delta) \simeq \Lambda(M) .$$

$\Lambda(M)$ – град. супералгебра Ли относительно скобки Схоутена $[-,-]_S$.

Теорема Концевича: $(\mathrm{Poly}(M), [-,-], \delta) \sim (\Lambda(M), [-,-]_S)$.

Рис.: Деннис Салливан и Максим Концевич

Деформационное квантование

1-параметрическая деформация ассоциативной алгебры функций:

$$a * b = ab + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_n(a,b) = ab + D(a,b)\,, \qquad \forall a,b \in C^\infty(M),$$

$$(a*b)*c = a*(b*c) \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta D = [D,D] - \text{ур. М-К.}$$

1-ый порядок деформации дается скобкой Пуассона на M:

$$D_1(a,b) - D_1(b,a) = \{a,b\} = \pi^{ij}\partial_i a \partial_j b \qquad \Leftrightarrow \qquad [\pi,\pi]_S = 0\,.$$

Отображение формальности $f : \Lambda(M) \to \mathrm{Poly}(M)$ «в точке π»:

$$\delta f(\pi,\ldots,\pi) + [f(\pi,\ldots,\pi), f(\pi,\ldots,\pi)] = \sum_k \pm f(\pi,\ldots,\underbrace{[\pi,\pi]_S,\ldots,\pi}_{k})$$

$$+ \sum_k \pm f(\pi,\ldots,\underbrace{[\pi,\pi,\pi]_3,\ldots,\pi}_{k}) + \cdots; \qquad D = f(\pi,\ldots,\pi).$$

Деформационное квантование

1-параметрическая деформация ассоциативной алгебры функций:

$$a * b = ab + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_n(a,b) = ab + D(a,b)\,, \qquad \forall a,b \in C^\infty(M),$$

$$(a*b)*c = a*(b*c) \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta D = [D,D] - \text{ур. М-К.}$$

1-ый порядок деформации дается скобкой Пуассона на M:

$$D_1(a,b) - D_1(b,a) = \{a,b\} = \pi^{ij}\partial_i a \partial_j b \qquad \Leftrightarrow \qquad [\pi,\pi]_S = 0\,.$$

Отображение формальности $f : \Lambda(M) \to \mathrm{Poly}(M)$ «в точке π»:

$$\delta f(\pi,\dots,\pi) + [f(\pi,\dots,\pi), f(\pi,\dots,\pi)] = \sum_k \pm f(\pi,\dots,\underbrace{[\pi,\pi]_S,\dots,\pi}_{k})$$

$$+ \sum_k \pm f(\pi,\dots,\underbrace{[\pi,\pi,\pi]_3,\dots,\pi}_{k}) + \cdots; \qquad D = f(\pi,\dots,\pi).$$

Деформационное квантование

1-параметрическая деформация ассоциативной алгебры функций:

$$a * b = ab + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_n(a,b) = ab + D(a,b)\,, \qquad \forall a, b \in C^\infty(M),$$

$$(a*b)*c = a*(b*c) \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta D = [D,D] - \text{ур. М-К.}$$

1-ый порядок деформации дается скобкой Пуассона на M:

$$D_1(a,b) - D_1(b,a) = \{a,b\} = \pi^{ij}\partial_i a \partial_j b \qquad \Leftrightarrow \qquad [\pi,\pi]_S = 0\,.$$

Отображение формальности $f : \Lambda(M) \to \mathrm{Poly}(M)$ «в точке π»:

$$\delta f(\pi,\ldots,\pi) + [f(\pi,\ldots,\pi), f(\pi,\ldots,\pi)] = \sum_k \pm f(\pi,\ldots,\underbrace{[\pi,\pi]_S,\ldots,\pi}_{k})$$

$$+ \sum_k \pm f(\pi,\ldots,\underbrace{[\pi,\pi,\pi]_3,\ldots,\pi}_{k}) + \cdots; \qquad D = f(\pi,\ldots,\pi).$$

Деформация A_∞-алгебр

Уравнения ВС гравитации: $d\Phi = m_2(\Phi, \Phi) + m_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \cdots$

Пусть $(A^\bullet, \mu_t, \partial)$ – 1-параметрическое семейство д.г. алгебр:

$$\mu_t : A^n \otimes A^m \to A^{n+m}\,, \qquad \partial : A^n \to A^{n-1}\,,$$

t – параметр. Определим 3-коцикл Хохшильда алгебры (A, μ_t):

$$m_3(a, b, c) = \mu_t(\mu_t'(a, b), \partial c)\,, \qquad [\mu_t, m_3] = 0\,.$$

Теорема. *Существует 1-параметрическое семейство минимальных A_∞-структур вида*

$$m_t = \mu_t + m_3 + \cdots\,.$$

Соответствующие уравнения ВС гравитации являются формально интегрируемыми. [Е. Скворцов, А. Ш., 2019].