**ШКОЛЬНАЯ КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА**
**«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АБАКА»**
**(номинация: учащиеся 6 классов)**
Томск, 1 ноября 2019 г.

## ***ЛОГИКА***

1. Перед олимпиадой по математике каждый участник сделал прогноз того, какое место он займёт. Ася предположила, что она будет на первом месте, а Вера – что на последнем. После олимпиады выяснилось, что все, кроме Аси, заняли место лучше, чем ожидали. Какое место заняла Ася?

Указание. Любое место, кроме последнего, может оказаться лучшим, чем предполагал участник (например, если он занял место $k$, а ожидал место $k+1$). Значит, занявший последнее место, – это единственный, кто не занял место лучше, чем ожидал, т.е. Ася.

Ответ: последнее.

2. Каждое утро хозяева выгуливают во дворе своих собак: Тузика, Шарика, Полкана и Трезора. Если Полкан на поводке, то Трезор без поводка. Если Тузик без поводка, то Шарик на поводке. Если Шарик без поводка, то Полкан на поводке. Сегодня Шарик без поводка. Кто сегодня на поводке?

Решение. Из утверждений «если Шарик без поводка, то Полкан на поводке» и «если Полкан на поводке, то Трезор без поводка», следует, что Полкан на поводке, а Трезор – без. Если предположить, что Тузик без поводка, то Шарик был бы на поводке. Значит, Тузик на поводке.

Ответ: Полкан и Тузик.

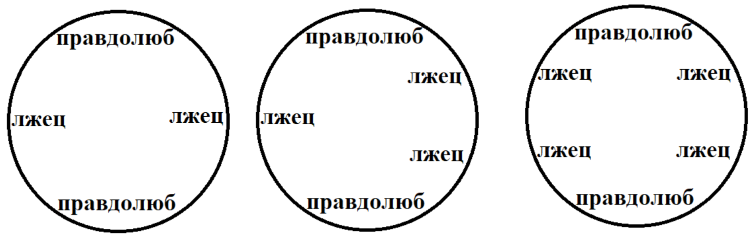
3. Какие из следующих фраз определяют понятие «моя бабушка»: 1) «мама моей мамы»; 2) «мама сестры моей мамы»; 3) «мама мамы дочери моей мамы»; 4) «сестра мамы мамы моей сестры»; 5) «мама сестры мамы моей сестры»? (Все сестры – родные!)

Решение. Общепринятое определение понятия «моя бабушка» – это утверждение 1). Фразы «моя мама» и «мама моей сестры» говорят об одном и том же человеке, и значит, фразы 2) и 5) также подходят. Так как «дочь моей мамы» это «я», то 3) равносильно 1). Во фразе 4) речь идёт о сестре бабушки.

Ответ: 1, 2, 3, 5.

4. В компании двое человек – правдолюбы (всегда говорят правду), а остальные – лжецы (всегда лгут). Все они встали в круг, и каждый из них произнёс: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько могло быть лжецов? Укажите все варианты.

Решение. Соседями правдолюба могут быть только лжецы, а рядом со лжецом стоят либо два правдолюба, либо правдолюб и лжец. Получаем три возможных варианта:



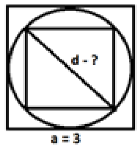

Ответ: 2, 3, 4.

4. Про некоторое число сформулированы утверждения: 1) число делится на 2; 2) число делится на 6; 3) число делится на 4; 4) число делится на 12. Известно, что два из этих утверждений верны, а два – нет. Сколько двузначных чисел подходят под это условие?

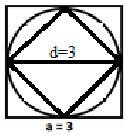
Решение. Если число нечётно, то все утверждения ложны, а если число кратно 12, то все утверждения верны. Значит, число чётно и не кратно 12, и при этом утверждение 1) верно, а утверждение 4) ложно. Возможны, два варианта: либо верны 1) и 2), т.е. число делится 6 и не делится на 4, либо верны 1) и 3), т.е. число делится на 4 и не делится на 6. Первый вариант реализуется для семи двузначных чисел: 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90. Второй вариант реализуется для четырнадцати двузначных чисел: 16, 20, 28, 32, 40, 44, 52, 56, 64, 68, 76, 80, 88, 92. Всего 21 число.

Ответ: 21.

## *ГЕОМЕТРИЯ*

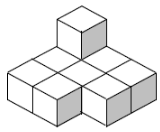



1. В квадрат вписана окружность, в неё вписан еще один квадрат. Сторона большого квадрата равна 3 см. Найдите диагональ маленького квадрата.




Решение. После поворота внутреннего квадрат на 45°, видно, что d = a = 3.

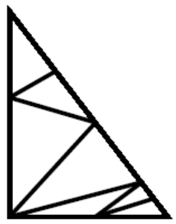
Ответ: 3.

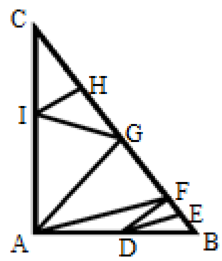


2. Сколько граммов краски нужно для покраски той поверхности сооружения, которая не касается пола, если на каждый квадратик уходит 2 грамма краски?

Решение. Не касается пола 24 квадратика (8 сверху, 8 сбоку с видимой стороны и 8 сбоку с невидимой стороны). Значит, потребуется $24 \cdot 2 = 48$ граммов краски.

Ответ: 48.





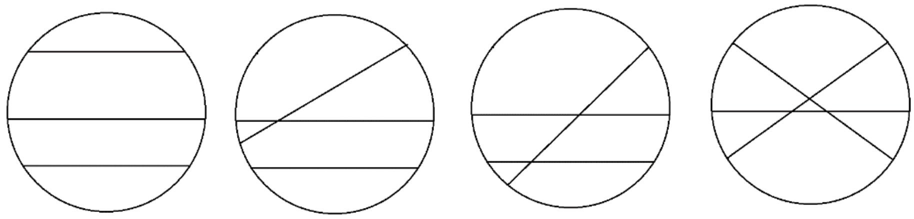

3. Сколько треугольников изображено на чертеже?

Решение. DBE, DEF, ADF, AFG, AGI, IGH, IHC, DBF, ABF, ABG, ICG, ACG, AFC, ABC.

Ответ: 14.

4. На сколько частей можно разрезать круг тремя прямыми разрезами от края до края? Два разреза в одном и том же месте делать нельзя. Укажите все варианты.

Решение.



Ответ: 4, 5, 6, 7.

5. Квадрат 4×4 сложили пополам 4 раза и получили квадрат 1×1. Полученный квадрат разрезали сразу по обеим диагоналям. Сколько частей при этом получилось?

Решение. После того, как квадрат 4×4 сложили 4 раза, получилось 16 слоёв квадратов 1×1. Так как каждый из этих квадратов разрезали по диагоналям на 4 треугольника, то всего образовалось 64 треугольников. Но пары тех из этих треугольников, которые расположены в соседних слоях и имеют общую сторону сгиба, соединены в квадратики. Количество треугольников, не объединенных в квадратики, равно периметру исходного квадрата, т.е. 16. Оставшиеся 64 – 16 = 48 треугольников объединены в 24 квадратика. Всего получилось 16 треугольников и 24 квадратика.

Ответ: 40.

## ***СКОЛЬКО***

1. В турнирной таблице кубка города по футболу команда «Середина» заняла 27-ое место. Когда по ошибке эту таблицу напечатали в обратном порядке (от последней команды к первой), то оказалось, что «Середина» опять на 27-ом месте. Сколько команд участвовало в кубке?

Решение. Как выше, так и ниже команды «Середина» расположено по 26 команд. Всего 52 команды, не учитывая «Середину».

Ответ: 53.

2. Бабушка испекла пирожки к приезду внуков. Если она даст каждому внуку по 4 пирожка, 3 возьмёт себе, 5 заберёт дедушка, то 6 пирожков останутся, а если же бабушка раздаст внукам по 6 пирожков, то ни для неё, ни для дедушки пирожков не останется. Сколько пирожков испекла бабушка?

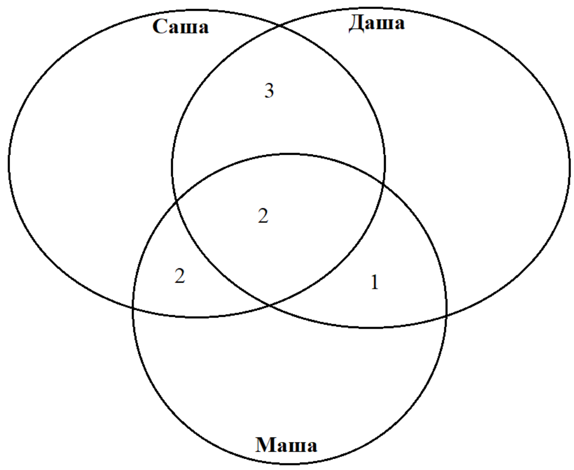
Решение. Когда бабушка раздала внукам по 4 пирожка, то 14 пирожков осталось. Если же она добавит каждому внуку по 2 пирожка (т.е. даст им по 6 пирожков), то она раздаст все оставшиеся 14 пирожков, а значит, приехало 14:2 = 7 внуков, и бабушка испекла для них 7·6 = 42 пирожка.

Ответ: 42.

3. В класс, в котором было поровну девочек и мальчиков, перешел мальчик из другой школы. После этого девочки стали составлять 48% от всех учеников класса. Сколько девочек учится в этом классе?

Решение. После прихода нового мальчика, девочек стало 48%, а мальчиков – 52%. Значит, новый мальчик (так же, как и любой другой ученик класса) составляет 52 – 48 = 4%. Поэтому, в классе 100:4 = 25 учеников, из которых 13 мальчиков и 12 девочек.

Ответ: 12.




4. Саша, Маша и Даша поливают 2019 тюльпанов, растущих в саду. Каждый из ребят полил треть всех тюльпанов, при этом, 5 цветов были политы и Сашей и Дашей, 4 цветка – и Сашей и Машей, 3 цветка – и Машей и Дашей, а 2 цветка – всеми тремя ребятами. Сколько тюльпанов остались не политыми?

Решение. Каждый полил 2019:3 = 673 тюльпана. Проиллюстрируем условие задачи с помощью кругов Эйлера. Заполним сначала общую для всех ребят часть числом 2 (так как 2 цветка были политы всеми). Затем заполним части, общие для двух ребят: число 3 = 5 – 2 в части Саша и Даша, число 2 = 4 – 2 в части Саша и Маша, число 1 = 3 – 2 в части Маша и Даша. Тогда только Саша полила 673 – 3 – 2 – 2 = 666 тюльпанов, только Даша полила

$673 - 3 - 2 - 1 = 667$ тюльпанов, и только Маша полила $673 - 2 - 2 - 1 = 668$ тюльпанов. Всего же было полито $666 + 667 + 668 + 3 + 2 + 1 + 2 = 2009$ тюльпанов, а без полива остались $2019 - 2009 = 10$ цветков.

Ответ: 10.

Комментарий. Количество политых тюльпанов можно было вычислить по формуле включений и исключений: $673 + 673 + 673 - 5 - 4 - 3 + 2 = 2009$.

5. Юля ехала в автобусе и заметила свою маму, которая шла в противоположную сторону. Через 10 секунд Юля вышла из автобуса и побежала догонять маму. Бежала она вдвое быстрее, чем шла мама, но в 5 раз медленнее, чем ехал автобус. Через сколько секунд Юля догонит маму?

Решение. Обозначим через $s$ – расстояние, которое проходит мама за 1 секунду (т.е. скорость мамы). Тогда за 10 секунд мама прошла $10s$, а автобус проехал в десять раз больше, т.е. 100s. Получаем, что Юле нужно догнать маму, которая находится от неё на расстоянии 110s. Так как у мамы скорость $s$, а у Юли – $2s$, то скорость их сближения равна $2s - s = s$. Значит, Юля догонит маму через $110s:s = 110$ секунд.

Ответ: 110.

## *ЧИСЛА*

1. Вычислите значение выражения: $(12 + 14 + 16 + \ldots + 2020) - (11 + 13 + 15 + \ldots + 2019)$.

Решение. $(12 + 14 + 16 + \ldots + 2020) - (11 + 13 + 15 + \ldots + 2019) = (12 - 11) + (14 - 13) + \ldots + (2020 - 2019) = 1 + 1 + \ldots + 1$. Данная сумма содержит 1005 слагаемых (действительно, если бы исходное выражение начиналась не с 12, а с 2, то было бы $2020:2 = 1010$ слагаемых, но убрали 5 слагаемых, начинающихся с 2, 4, 6, 8 и 10).

Ответ: 1005.

2. Число 687 записано тремя последовательными цифрами 6, 7 и 8. Найдите ближайшее следующее за данным число, обладающее тем же свойством.

Решение. Если удовлетворяющее условию задачи число начинается с цифры 6, то оно записывается цифрами 4, 5, 6 или 5, 6, 7 или 6, 7, 8. Наибольшее из таких чисел – это 687. Если же искомое число начинается с цифры 7, то оно состоит из цифр 5, 6, 7 или 6, 7, 8 или 7, 8, 9. Наименьшее из таких чисел – это 756.

Ответ: 756.

3. В ряд выписали 2019 чисел, так, что сумма любых трех соседних равна 30. На первом месте стоит 7, а на последнем – 6. Какое число стоит на втором месте?

Решение. Так как сумма первого, второго и третьего чисел равна сумме второго, третьего и четвёртого чисел, то на первом и четвёртом местах стоят одинаковые числа. Аналогично, любые числа, номера мест которых отличаются на три, равны друг другу. Значит, на третьем месте стоит число 6, а на втором месте – число $30 - 7 - 6 = 17$.

Ответ: 17.

4. Найдите все двузначные числа, которые в четыре раза больше суммы своих цифр.

Решение. Если искомое число записано слева направо цифрами $a$ и $b$, то получим уравнение $10a + b = 4a + 4b$, откуда $2a = b$, т.е. цифра в разряде единиц в два раза больше цифры в разряде десятков. Подходят числа 12, 24, 36, 48.

Ответ: 12, 24, 36, 48.

5. Придумайте 32 натуральных числа (не обязательно различных), сумма которых равна их произведению.

Решение. Очевидно, что если набор натуральных чисел не содержит много единиц, то произведение будет больше суммы. Рассмотрим набор, состоящий из тридцати единиц, одной двойки и некоторого числа $x$. Сумма чисел из этого набора равна $32 + x$, а произведение равно $2x$. Тогда $32 + x = 2x$, и $x = 32$.

Ответ: 32, 2, 1, 1, …, 1 (тридцать единиц).

Комментарий. Существуют и другие наборы, например, 11, 2, 2, 1, 1, 1, …, 1 (двадцать девять единиц).

## *АЛФАВИТ*

1. В примере на сложение Я + Я + Я = МЫ различные буквы заменяют различные цифры. Сколько различных решений имеет этот ребус?

Решение. Так как сумма трёх однозначных чисел является двузначной, то Я ≥ 4. Но Я = 5 не подходит, так как сумма заканчивается на ту же цифру 5. Остаются пять вариантов: $4 + 4 + 4 = 12$, $6 + 6 + 6 = 18$, $7 + 7 + 7 = 21$, $8 + 8 + 8 = 24$, $9 + 9 + 9 = 27$.

Ответ: 5.

2. В примере на сложение Б + АААА + АААА + АААА = БАААА различные буквы заменяют различные цифры. Какие цифры заменяют буквы А и Б?

Решение. Запишем ребус в виде примера на сложение «в столбик»:

$$+\begin{array}{r} \text{Б} \\ \text{АААА} \\ \text{АААА} \\ \text{АААА} \\ \hline \text{БАААА} \end{array}.$$

Сумма трёх цифр не превышает 27, поэтому в следующий разряд может перейти двойка или единица, т.е. Б =1 или Б = 2. Но в разряде единиц 3А + Б оканчивается на А, т.е. числа 3А + Б и А имеют одинаковую чётность, а значит, Б = 2 и А ≥ 6. Тогда 3А + 2 оканчивается на А только при А = 9.

Ответ: А = 9, Б = 2.

3. Ваня выписал все «слова» (не обязательно имеющие смысл), получающиеся перестановкой букв в слове АБАКА (например, ААКБА, КАААБ, …). Сколько всего «слов» записал Ваня? (Исходное слово АБАКА Ваня не записывал).

Решение. Перечислим все варианты трёх позиций, на которых могут стоять буквы А (остальные буквы обозначим символом *): ААА**, АА*А*, АА**А, А*АА*, А*А*А, А**АА, *ААА*, *АА*А, *А**А, **ААА. Таких вариантов 10, на место звездочек можно ставить буквы К и Б в произвольном порядке, т.е. общее количество «слов» составляет $2 \cdot 10 = 20$. Остается из этих слов убрать исходное слово АБАКА.

Ответ: 19.

Комментарий. Общее количество «слов» (включая слово АБАКА) можно было вычислить по формуле перестановок с повторениями: $\frac{5!}{3!} = 20$.

4. Филворд – таблица с буквами, в которой ищут слова, двигаясь по горизонтали или вертикали. Слово может изгибаться, но не может самопересекаться. Сколькими способами можно прочесть слово «КОЛОКОЛ» в этом филворде?

| | | |
|---|---|---|
| К | О | Л |
| О | Л | О |
| Л | О | К |

Решение. Любое прочтение слова КОЛОКОЛ будет содержать обе буквы К, располагающиеся в противоположных углах филворда. Перечислим все варианты, начинающихся с левого верхнего угла: →→↓↓←←, →→↓↓←↑, →↓→↓←←, →↓↓→↑↑, ↓↓→→↑↑, ↓↓→→↑←, ↓→↓→↑↑, ↓→→↓←←. Получилось 8 вариантов. Имеется столько же симметричных вариантов, начинающихся с правого нижнего угла.

Ответ: 16.

5. В примере на сложение ДУРАК + УДАР = ДРАКА различные буквы заменяют различные цифры. Расшифруйте этот ребус (т.е. запишите его в цифровом виде).

Решение. Запишем ребус в виде примера на сложение «в столбик»: $+\frac{\begin{array}{r}\text{УДАР}\\ \text{ДУРАК}\end{array}}{\text{ДРАКА}}$. Так как суммы Р + К и Д + Р в разрядах единиц и сотен дают одинаковый результат, то Д = К – 1 и А + А ≥ 10, т.е. А ≥ 5. Перебирая А, получаем единственный ответ.

Ответ: 51286 + 1582 = 52868.