

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГУ)

УДК 514.1

Рег. № НИОКТР АААА-А19-119120690010-8

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной и
инновационной деятельности
д-р физ.-мат. наук, профессор

А.Б. Ворожцов

« 25 » декабря 2020 г.



ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
(промежуточный, этап 3)

Соглашение № 075-02-2020-1479/1

Книга 1

Начальник научного управления
канд. геол.-минерал. наук



25.12.2020 Т.С. Краснова
подпись, дата

Руководитель НИР,
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН



25.12.2020 А.Ю. Веснин
подпись, дата

Томск 2020

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

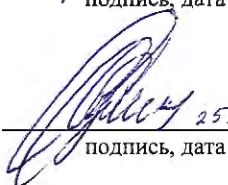
Руководитель НИР,
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук,
чл.-корр. РАН


подпись, дата

А.Ю. Веснин
(введение, разделы 1-2,
заключение)

Исполнители:

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


подпись, дата

А.М. Бубенчиков
(подраздел 1.2)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


подпись, дата

А.В. Старченко
(подраздел 1.3)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


подпись, дата

Е.А. Тимошенко
(подраздел 1.4)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


подпись, дата

М.А. Шеремет
(подраздел 1.5)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

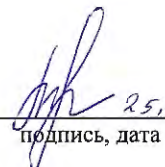
Н.В. Абросимов
(подраздел 1.6)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

Д.О. Диль
(подраздел 1.7)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

Т.А. Козловская
(подраздел 1.8)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

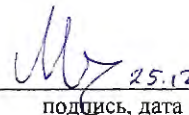
И.А. Колесников
(подраздел 1.9)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

И.В. Мирошниченко
(подраздел 1.10)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата


И.Ю. Могильных
(подраздел 1.11)


Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


подпись, дата

Ц.Д. Норбосамбуев
(подраздел 1.12)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук  25.12.2020 В.А. Пчелинцев
подпись, дата (подраздел 1.13)

Мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук  25.12.2020 М.В. Агафонцев
подпись, дата (подраздел 1.14)

Мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук  25.12.2020 Н.С. Гибанов
подпись, дата (подраздел 1.15)

Мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук  25.12.2020 Д.В. Лещинский
подпись, дата (подраздел 1.16)

Нормоконтролер  25.12.2020 А.Ю. Нагаев
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 121 с., 1 кн., 35 рис., 2 табл., 139 источн., 1 прил.

АБЕЛЕВА ГРУППА, ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК, КОДИРОВАНИЕ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Объектами исследования являются многообразия малой размерности, группы кос, гиперболические многогранники, абелевы группы, транзитивные коды, конвективный теплообмен, изотопы газов, сверхтонкие мембраны, диффузионное пламя, турбулентность, двухфазная фильтрация, численные методы решения уравнений в частных производных, параметры в интеграле Кристоффеля-Шварца, турбулентное движение воздуха, хорошие кольца формальных матриц бесконечного порядка, равномерно эллиптические операторы, двухфазный поток с частицами льда.

Цель научно-исследовательской работы (НИР) – получение новых научных результатов, направленных на развитие теорий, описывающих свойства исследуемых объектов.

В ходе выполнения НИР получены новые научные результаты по 16 отдельным задачам в направлениях фундаментальной математики, математических методов в механике, математическом моделировании и анализе данных.

В рамках научно-образовательной деятельности Центра в 2020 году было опубликовано 17 статей в научных журналах, индексируемых в одной из баз данных Web of Science, Scopus, модернизировано содержание 6 образовательных модулей, проведено 11 научных и 7 образовательных мероприятий, состоялись защиты 3 диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, 6 магистрантов и аспирантов ТГУ прошли стажировки в академических институтах РАН (г. Новосибирск).

Таким образом, все запланированные результаты в соответствии с Планом развития Центра на 2020 год получены.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 Научная составляющая	18
1.1 Топология трехмерных многообразий.....	18
1.2 Методы и модели молекулярной динамики	22
1.3 Численное моделирование двухфазного течения воды с ледяными частицами в реке.....	26
1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп.....	32
1.5 Исследование пассивных методов интенсификации конвективного теплопереноса в замкнутых и полукрытых областях.....	37
1.6 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	41
1.7 Математическое моделирование процессов двухфазной фильтрации с использованием схем высокого порядка точности для аппроксимации переноса насыщенности	45
1.8 Исследование структурных свойств группы твинов.....	50
1.9 Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца.....	56
1.10 Математическое моделирование сложного теплообмена в замкнутых областях с источниками тепловыделения	62
1.11 Исследование оптимальных кодов, исправляющих ошибки, а также их связи с теорией графов.....	66
1.12 Изучение хороших колец формальных матриц бесконечного порядка	70
1.13 Спектральные характеристики равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме в областях евклидова пространства.....	74
1.14 Исследование полей температуры и турбулентности в диффузионном пламени с применением оптических методов.....	77
1.15 Численное исследование ламинарных режимов естественной конвекции в замкнутых областях на основе решёточного метода Больцмана и метода конечных разностей.....	82
1.16 Построение параллельного метода численного решения трехмерного уравнения переноса для мезомасштабной метеорологической модели.....	89
2 Образовательная составляющая.....	97
2.1 Научная кооперация	97

2.2 Научные мероприятия, организованные и проведенные НОМЦ.....	98
2.3 Стажировки студентов, аспирантов и молодых ученых в ведущих академических институтах и университетах	99
2.4 Подготовка кадров высшей квалификации в НОМЦ.....	100
2.5 Новые или модернизированные образовательные курсы и модули, реализуемые НОМЦ	100
2.6 Образовательные мероприятия НОМЦ	100
2.7 Школьники, принявшие участие в мероприятиях НОМЦ и ставшие победителями и призерами олимпиад школьников по математике и информатике.....	102
2.8 Дополнительная информация о научной и научно-образовательной деятельности НОМЦ	104
2.9 Научные гранты	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	106
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	108
ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Публикации	119

ВВЕДЕНИЕ

Коллектив НОМЦ проводит исследования по трем большим направлениям, которые соответствуют сформированным в НОМЦ научным группам:

- фундаментальная математика,
- математические методы в механике,
- математическое моделирование и анализ данных.

Научные сотрудники группы фундаментальной математики проводят исследования по актуальным направлениям современной алгебры, геометрии и топологии, неевклидовой геометрии, теории кодирования. Полученные результаты опубликованы в статьях [A.1] – [A.8] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Также подготовлены и/или сданы в печать работы [A.18] – [A.23].

1. В теории трехмерных многообразий важное место занимают исследования свойств многообразий, полученных склеиванием из двух других многообразий. Известно, что любое связное ориентированное замкнутое трехмерное многообразие может быть получено в результате склеивания двух полноториев некоторого рода вдоль края. Краем полнотория является двумерная поверхность того же рода, а склеивание происходит с помощью гомеоморфизма поверхности. Такая конструкция известна как сплетение Хегора для замкнутого многообразия, а двумерная поверхность склеивания называется поверхностью Хегора.

В отчетных период были изучены склеивания двух полноториев вдоль части их границы. В этом случае склеивание проходит вдоль двумерно ориентируемой поверхности $S(g,b)$ некоторого рода g с b проколами, а результирующее многообразие имеет край. В работе А.Ю. Веснина с соавторами получены необходимые и достаточные условия того, что многообразие, полученное склейкой двух полноториев вдоль поверхности $S(g,b)$, принадлежащей их границам, является полноторием.

2. Изучение автоморфизмов абелевых групп. В 1972 году представитель томской алгебраической школы А.М. Себельдин описал в работе [1] все вполне разложимые группы без кручения, определяющиеся своим кольцом эндоморфизмов. Позднее в [2] он же описал все вполне разложимые группы без кручения, определяющиеся своей полугруппой эндоморфизмов.

Поскольку группа автоморфизмов абелевой группы G несет меньше информации о G , чем полугруппа или кольцо эндоморфизмов группы G , то следующим этапом исследования вполне разложимых групп естественным образом стал вопрос о том, какие вполне разложимые группы без кручения определяются своей группой автоморфизмов. Этой теме была посвящена защищенная в 2014 году в ТГУ диссертация В.К. Вильданова

(ученика А.М. Себельдина) [3], в которой доказан ряд важных теорем. Одним из основных инструментов доказательства упомянутых теорем стали инволюции, т.е. автоморфизмы, квадрат которых совпадает с тождественным автоморфизмом.

Важным частным случаем, который должен дать ключ к решению вопроса об определяемости вполне разложимых групп их группами автоморфизмов в общем случае, являются вполне разложимые группы малых рангов (2 и 3).

В данном проекте, помимо полного ответа на вопрос о том, какие вполне разложимые группы ранга 2 определяются своими группами автоморфизмов, Е.А. Тимошенко получена классификация вполне разложимых групп ранга 3 и частичный ответ на вопрос о том, когда вполне разложимая группа ранга 3 определяется группой автоморфизмов (в классе всех вполне разложимых групп). Кроме того, были полностью описаны чистые подмодули и плоские модули в категории модулей над csp -кольцом, а также найдены условия, при которых заданная p -минимальная факторно делимая группа без кручения ранга 2 переводится автоморфизмом ее инъективной оболочки в каноническое представление другой p -минимальной факторно делимой группы.

3. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. В силу теоремы жесткости Мостова, любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Важнейшим геометрическим инвариантом является объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести задачу к вычислению объема многогранника. Задача получения формул объемов гиперболических многогранников в частных случаях решалась еще Н.И. Лобачевским. В общем случае задача является настолько сложной, что к настоящему времени она решена лишь для гиперболических многогранников простейшего комбинаторного типа – тетраэдров. Несколькими авторами независимо получены явные формулы для объема гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов. Здесь особо стоит отметить классическую работу Г. Сфорца [4]. В данном проекте Н.В. Абросимовым впервые получена явная интегральная формула, выражающая объем произвольного гиперболического тетраэдра через длины его ребер.

4. Исследование структурных свойств группы сингулярных кос и группы сингулярных крашенных кос. Важную роль при изучении групп кос играют представления групп кос. Используя представления групп кос автоморфизмами свободной группы, а также линейные представления групп кос была, в частности, установлена разрешимость проблемы равенства слов в группе кос. Также с помощью представлений группы кос были

построены инварианты классических узлов. Моноид сингулярных кос был введен в рассмотрение Дж. Бирман в связи с исследованием инвариантов Васильева. В работе [А.6] для групп сингулярных крашенных кос ST_3 найдены порождающие и определяющие соотношения. За отчетный период Т.А. Козловская изучала ядра некоторых гомоморфизмов 3-х-нитевых сингулярных кос на группу подстановок S_3 . Установлено, что в некоторых случаях ядро изоморфно группе сингулярных крашенных кос SP_3 , а в других случаях установлены некоторые свойства ядер.

5. Голоморфное однолистное отображение f верхней полуплоскости на многоугольник Δ с границей, состоящей из отрезков прямых, можно записать с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца [5]. Для решения задачи нахождения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца – прообразов вершин многоугольника Δ при отображении f – разработаны различные методы. В [6–8] дается описание некоторых современных публикаций по данной тематике, и приводятся соответствующие библиографические ссылки.

Одни из эффективных методов предложен П.П. Куфаревым [9]. Метод получил различные обобщения, в том числе для отображений на круговые многоугольники [10,11]. При нахождении отображения методом П.П. Куфарова рассматривается семейство отображений канонической области на семейство областей с разрезом, имеющее два ядра. В результате выполнения работ по проекту был предложен метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца, идейно близкий к методу П.П. Куфарова. В предлагаемом методе И.А. Колесников рассмотрел семейство отображений полуплоскости на семейство областей более общего вида, имеющее одно ядро, что повышает точность вычислений и упрощает построение конформного отображения.

6. Одной из классических задач алгебраической теории кодирования является построение кода, чья группа автоморфизмов обладает транзитивным действием на его кодовых словах или координатных позициях. Актуальной в теории кодирования, теории тестов, криптографии представляется проблема компактного задания кода посредством базиса минимального веса или, идеально, посредством одного кодового слова с учетом действия группы автоморфизмов этого кода. Также весьма важны коды, структурные свойства которых близки к линейным, например, кватернарные групповые коды над кольцом и пропелинейные. Такие коды потенциально актуальны для применения в теории кодирования и криптографии. Построение и классификация объектов такого типа также являются классическими задачами для теории блок-схем, в частности систем троек и четверок Штейнера и матриц Адамара. С другой стороны, исследование пропелинейных и

транзитивных кодов, исправляющих ошибки в канале связи с шумами, представляется важным в теории кодирования в силу того обстоятельства, что эти коды близки по многим свойствам к классическим линейным кодам. Более того, часто нелинейные коды, будучи транзитивными, имеют лучшие параметры, чем линейные. Таковыми, например, являются линейные классы кодов Препараты – они в два раза мощнее классических кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингема той же длины с кодовым расстоянием b , которые широко применяются на практике. Многие из классических кодов, таких как коды Рида-Маллера, обладают координатно-транзитивной группой автоморфизмов, что активно используется на практике при подстановочном декодировании. В ходе выполнения работ по проекту И. Ю. Могильных были построены новые координатно-транзитивные, пропелинейный и транзитивные коды и решена задача существования базиса векторов из веса 5 в расширенном коде БЧХ с конструктивным расстоянием 3.

7. Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей, k – натуральное число, большее или равное двум. Элемент a кольца R называется k -хорошим, если a можно представить в виде суммы k обратимых элементов кольца R . Говорят, что кольцо R – k -хорошее, если каждый его элемент k -хороший. Несколько слов об истории изучения k -хороших колец. В [12] и [13] независимо доказано, что всякий оператор векторного пространства V над телом есть сумма двух обратимых операторов, кроме случая, когда V – одномерное пространство над полем из двух элементов. В связи с этим результатом Л. А. Скорняков сформулировал вопрос: «Нельзя ли каждый элемент регулярного кольца с единицей представить в виде суммы элементов, обладающих обратным?» (проблема~31[14]). Этот вопрос инициировал ряд статей. С историей соответствующих исследований можно познакомиться по обзору [15], работам [16]–[20]. Различные матричные кольца, являющиеся k -хорошими, рассматривались в [19], [21].

Можно исследовать модули с хорошими кольцами эндоморфизмов. Фукс записал в [22] вопрос: «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно ее кольцо эндоморфизмов?» Например, известно, что имеют 2-хорошие кольца эндоморфизмов: тотально проективные p -группы (при p отличном от 2), самомалые sp -группы конечного ранга без 2-компоненты [23], см. также [24].

Прямые суммы абелевых групп и модулей с хорошими кольцами эндоморфизмов рассматривались в [20], [25], [26].

Вместо изучения прямых сумм модулей с хорошими кольцами эндоморфизмов равносильным образом можно изучать хорошие кольца матриц (как конечного, так и бесконечного порядка). Этой линии изучения хороших колец и посвящено данное исследование. В ходе выполнения работ по проекту Ц.Д. Норбосамбуевым были получены

результаты, которые изложены в статье [A.21]. Так из теоремы 12.2 работы [A.21] получается, что кольцо конечных по столбцам матриц над произвольным кольцом R является 3-хорошим. Выделен один класс колец R , для которых указанное кольцо матриц будет 2-хорошим (следствие 12. из 2[A.21]). Затем эти результаты для матричных колец переформулируются для колец эндоморфизмов прямых сумм модулей (следствия 12.3, 12.4 из [A.21]) и абелевых групп (следствие 12.5 из [A.21]).

8. Спектральная теория эллиптических операторов составляет существенный раздел общей спектральной теории операторов и занимает видное место в математических исследованиях и приложениях математики к физическим теориям. Важнейшей задачей спектральной теории эллиптических операторов является задача нахождения нижних и верхних границ для собственных чисел равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме. В ходе решения данной задачи В.А. Пчелинцев получил оценки собственных значений Неймана p -операторов Лапласа в большом классе пространственных областей, удовлетворяющих квазигиперболическим граничным условиям. Предлагаемый метод основан на операторах композиции, порождаемых квазиконформными отображениями, и их приложениях к неравенствам Соболева – Пуанкаре. Используя точную версию обратного неравенства Гёльдера, выполнено уточнение оценок для квазишаров – образов шаров при квазиконформных отображениях всего пространства.

В области прикладной математики и механики основным направлением исследований являются актуальные задачи теоретической механики и математической физики, сосредоточенные, в частности, на задачах молекулярной физики и методов молекулярной динамики, а также задачах по конвективному теплопереносу и методов сложного теплообмена. Результаты работы по этому направлению опубликованы в статьях [A.9] – [A.14]. Кроме того, подготовлены и/или сданы в печать еще 2 работы [A.24], [A.25].

1. В настоящее время открыто много новых углеродных материалов, обладающих совершенно уникальными свойствами. Эти материалы находят широкое применение в научных исследованиях, электронике, физико-химии и медицине. В частности, А. М. Бубенчиков применил разработанную на предыдущем этапе реализации проекта математическую модель динамики молекулярных структур к изучению новых молекулярных кристаллов на основе дисков B_{42} . Модель основана на уравнениях, определяющих движение центров масс рассматриваемых молекул, и уравнениях для проекций моментов количества движения этих частиц на связанные с ними оси. Определены характерные амплитуды колебаний и частота вращения рассматриваемых молекул. Также рассмотрена задача о молекулярном контейнере. В ней роль контейнера

выполняет открытая углеродная нанотрубка, а роль поршня димер C_{20} . На примере трубки CNT(15,5) и димера C_{20} продемонстрирована возможность преобразования энергии вращения внутреннего тела в энергию его поступательного перемещения.

2. Конвективный теплоперенос как один из основных транспортных механизмов встречается во многих инженерных и природных системах. Известно, что энтропия как термодинамическая функция отражает работоспособность таких образований. При этом эффективность отмеченных термодинамических систем характеризуется минимумом производства энтропии. Методика оптимизации термодинамических систем, основанная на минимизации производства энтропии, эффективно используется при изучении теплообменной аппаратуры, солнечных коллекторов, систем вентиляции и кондиционирования и многих других технических изделий. К настоящему времени проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, отражающих возможности метода минимизации энтропии при изучении двухдиффузионных пористых систем. При этом включение дополнительной компоненты примеси может приводить к изменению как локальных, так и интегральных параметров. Проведенный литературный обзор показал, что опубликованных работ, связанных с использованием метода минимизации производства энтропии в случае естественно-конвективного теплообмена вблизи горизонтальной пластины внутри пористой среды при наличии двухкомпонентной примеси, в открытой печати нет. Поэтому целью исследования М.А. Шеремета было изучить возможности метода минимизации производства энтропии на примере трехдиффузионной пористой системы.

В ходе выполнения работ по проекту была решена комбинированная задача конвективного теплопереноса и генерации энтропии вблизи горизонтальной поверхности, расположенной в пористой среде. В результате проведенных исследований установлены особенности генерации энтропии в рассматриваемой многопараметрической системе.

3. Повышение точности расчётов в практических задачах двухфазной фильтрации при сохранении устойчивости итерационных методов и их скорости сходимости является актуальной задачей для многих областей применения численных расчётов, в частности для определения перемещения фронта насыщенности в задаче вытеснения нефти водой из природных резервуаров. В настоящее время для дискретизации уравнений в частных производных, описывающих вышеупомянутые процессы, используются различные методы, краткий обзор которых сделан в работе [27]. Однако самым распространённым и эффективным методом в этой области является метод конечных объёмов, поскольку только он обеспечивает выполнение законов сохранения для любой подобласти, составленной из

элементов сетки. При этом опубликовано небольшое количество работ по конструированию и исследованию схем высокого порядка точности для аппроксимации насыщенности на гранях объёмов. Так как уже существующие схемы не применимы в полностью неявной постановке, их область применения является достаточно узкой, что обуславливает необходимость создания устойчивой схемы высокого порядка точности для решения данной задачи, которая бы не замедляла скорость сходимости итерационных методов.

4. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса является универсальным инструментом для изучения сложных технических систем, а также для понимания физических процессов, протекающих в современных энергетических и технологических сооружениях. Исследованию сложного теплообмена (конвекция, теплопроводность, излучение) в замкнутых областях с локальными источниками тепловыделения посвящено множество как теоретических, так и экспериментальных работ, количество которых стремительно возрастает вследствие развития методов математического моделирования и совершенствования вычислительной техники наряду с улучшением методов измерения и визуализации экспериментальных данных.

Стоит отметить, что зачастую при моделировании процессов тепло- и массообмена необходимо учитывать их нестационарный и турбулентный характер, что естественным образом усложняет решение поставленной задачи. Ранее в работе [28] показано, что вследствие вычислительных сложностей, связанных с моделированием теплообмена излучением, данный механизм переноса энергии не учитывался во многих численных исследованиях. В то же время если температура тепловыделяющих элементов достаточно высока и движение среды происходит при относительно невысокой скорости, то вклад излучения, как одного из основных механизмов переноса энергии, может быть значительным.

Проведенное в рамках проекта И.В. Мирошниченко численное моделирование сложного теплообмена в замкнутых областях при наличии источников тепловыделения позволило изучить влияние широкого спектра различных факторов, влияющих на теплообмен (внешние климатические условия, положения и размеры нагревательного элемента, степень черноты тепловыделяющего элемента и др.). Разработана модель, описывающая нестационарное объемное тепловыделение от источника энергии. Все запланированные на 2020 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены.

5. Задачи естественно-конвективного теплообмена являются актуальными на протяжении длительного периода времени, вследствие непрерывного технологического прогресса. Отдельным интересом пользуются задачи охлаждения микро и

радиоэлектроники, а также современные численные методики, позволяющие достаточно быстро и точно просчитывать сложные нестационарные задачи. Одним из таких методов является решёточный метод Больцмана. За последние годы наблюдается экспоненциальный рост количества публикаций, так или иначе связанных с данным методом. Такое интенсивное развитие метода связано с простотой его реализации и функциональными возможностями: решёточный метод Больцмана может быть одинаково успешно применён как к течению однофазной среды в изотермических условиях [29, 30], так и к течению сложных многофазных сред в пористых средах в неизотермических условиях [31,32]. Кроме того, данный метод имеет ряд преимуществ при проведении параллельных вычислений, что обусловлено локальностью процессов, составляющих структуру метода [32,33]. В ходе выполнения работ по проекту Н.С. Гибановым был применён решёточный метод Больцмана для решения задач естественно-конвективного теплообмена в замкнутых областях с локальными источниками энергии различных геометрических форм. В результате проведённых исследований получены локальные и интегральные распределения термогидродинамических характеристик.

Новое направление работы НОМЦ, реализуемое с 2020 года – математическое моделирование и анализ данных. По этому направлению проводятся исследования в области математического моделирования и вычислительной математики, сосредоточенные, в частности, на задачах, связанных с моделированием двухфазного течения со льдом, турбулентных течений в уличном каньоне, исследованием характеристик сгорания жидкого топлива. Полученные в рамках выполнения работы результаты опубликованы в статьях [A.15] – [A.17].

1. При вскрытии северных рек наблюдается такое явление как ледоход. Процессы замерзания и вскрытия рек, а также формирования заторов из крупных льдин сложно поддаются прогнозированию из-за трудности выполнения полевых исследований и потому весенние паводки, связанные с таянием снега и вскрытием реки ото льда часто являются причиной чрезвычайных ситуаций, связанных с наводнениями в городах и особенно небольших поселках.

Ледовый затор – это скопление льдин в русле реки во время ледохода, вызывающее стеснение водного сечения и связанный с этим подъем уровня воды. Заторы обычно образуются в местах сужения рек, излучинах и на отмелях, где проход льдин затруднен в силу небольшой площади живого сечения реки, большого сопротивления берегов или низкой скорости потока. Образование ледового затора приводит к уменьшению свободного сечения реки и, следовательно, к увеличению скорости потока, что в свою очередь приводит

к размыву дна, особенно, если русло сложено рыхлыми породами. При внезапном разрушении ледового затора, вода и лед большой массы начинают быстро двигаться, размывая и деформируя берега и пойму и нанося урон инфраструктуре.

Существующие методы борьбы с ледовыми заторами и вызываемыми ими наводнениями (расчистка русла, берегоукрепительные работы, отвод воды, искусственное ослабление льда) широко применяются на практике, однако требуют научного обоснования и прогнозирования возможных последствий для конкретной реки.

В ходе работ по проекту А.В. Старченко была разработана и протестирована новая математическая модель, основанная на механике взаимодействующих, взаимопроникающих континуумов. Это одна из первых гидродинамических моделей Эйлера двухфазного потока воды с частицами льда в рамках подхода мелкой воды, которая учитывает взаимодействие между фазами, взаимодействие между частицами льда, взаимодействие обеих фаз со дном реки и турбулентность речного потока. Был разработан оригинальный вычислительный алгоритм, основанный на методе конечных объемов, полуневной дискретизации по времени и оригинальной методике частичного исключения, чтобы избежать неопределенности в областях без дисперсной фазы. Новизна вычислительного метода заключается в сочетании метода обнаружения подвижной границы реки, что имеет особое значение при моделировании паводков, с методом частичного исключения, обеспечивающим корректность расчетов во всей области потока даже в случаях отсутствия ледяных частиц. Представленный в данной работе подход был применен к численному исследованию течения в реке Томь во время ее вскрытия весной в районе г. Томска, где часто образуются ледяные заторы, вызывающие локальные наводнения.

2. Исследование полей температуры и турбулентности в диффузионном пламени с применением оптических методов. Диффузионный режим горения топлива является одним из наиболее распространенных режимов горения. Ввиду сложности описания механизмов течения в факеле пламени до сих пор остается актуальным изучение данного режима. Широкое распространение получили работы по изучению диффузионного режима горения коллективом авторов из Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН [34–38]. Академик С.В. Алексеенко, академик Д.М. Маркович, А.В. Бильский и В.М. Дулин ведут разработки по усовершенствованию и уточнению метода цифровой трассерной визуализации [39–43], который на сегодняшний день является самым распространенным для исследования структуры течения в различных потоках.

Среди работ, посвященных влиянию акустических воздействий на факел пламени можно отметить работы Zheng L. et al. [44], Golub V. V. et al. [45], Korobov A. E. et al. [46],

Arefyev K. Yu. et al. [47], Kang M. A. et al. [48], Xunchen Liu et al. [49], Yongchao Sun [50], авторы которых проводят как теоретические, так и экспериментальные оценки по влиянию акустических колебаний на факел пламени. Следует заметить, что в большинстве работ в качестве горючего топлива используется предварительно смешанная с окислителем смесь газов.

В ходе выполнения работ по проекту М.В. Агафонцевым были найдены характерные режимы работы внешнего источника возмущений на факел пламени, при которых происходит интенсификация процесса горения. Разработаны программы для ЭВМ, позволяющие анализировать спектр изменения температуры во всей рабочей области термограммы, а также детектировать высокотемпературные неоднородности в факеле пламени и получать для них интегральную картину распределения. Был проведен анализ спектров измерения температуры в факеле пламени в широком диапазоне частот внешних воздействий.

3. Вопросы развития математического обеспечения для информационных автоматизированных систем мониторинга биосферы и предупреждения об опасных природных процессах или неблагоприятных погодных условиях, приводящие к существенному ухудшению качества атмосферного воздуха, видимости, и как следствие движения, являются приоритетными в области гидрометеорологии и смежных с ней областей. Одним из направлений в этой области является создание математических моделей сложных природных явлений, служащих инструментом прогнозирования. Для получения результатов моделирования сложных природных явлений может понадобиться большое количество времени, что может негативно отразиться на их актуальности. Здесь возникает второе направление исследований, связанных с поиском различных методов для ускорения работы алгоритмов.

Д.В. Лещинский представил микромасштабную модель турбулентного движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне, а также провел исследование сеточной сходимости для нахождения оптимального сеточного покрытия, представил векторное поле скорости и контурное поле концентраций, визуально показывающее структуру течения в рассмотренном уличном каньоне.

Также, по второму направлению, на более сложной модели переноса примеси были проведены вычислительные эксперименты по выбору оптимального с точки зрения быстродействия способа распараллеливания [А.17]. Последовательная программа мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения TSUNM3 (Tomsk State University Nonhydrostatic Mesoscale Meteorology Model) была распараллелена с помощью трёх технологий: MPI, OpenMP, CUDA. Полученные результаты будут использованы при

создании параллельной версии TSUNM3 модели для прогнозирования опасных погодных явлений и качества атмосферного воздуха над городом.

Все запланированные на 2020 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены. Все полученные результаты являются новыми, они прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

1 Научная составляющая

1.1 Топология трехмерных многообразий

Введение. Хорошо известно, что любое связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие допускает разбиение на два полнотория (называемые также, телами с ручками). При этом, полнотории отождествляются вдоль своих краев, каждый из которых является замкнутой ориентируемой двумерной поверхностью некоторого рода. Такое разбиение называется сплетением Хегора, а поверхность – поверхностью Хегора. Минимальный из возможных родов поверхностей Хегора для сплетений данного многообразия называют его родом Хегора. Трехмерным многообразием рода 0 является только трехмерная сфера. Трехмерными многообразиями рода 1 являются линзовые пространства. Исследования различных аспектов сплетений Хегора проводились в работах [51,57,58,59,67,68].

Естественно, возникает вопрос о том, какие трехмерные многообразия могут быть получены, если склеивать два полнотория не вдоль всей их границы, а лишь вдоль ее части. Очевидно, получится трехмерное многообразие с краем. В данном проекте изучался вопрос о том, при каких необходимых и достаточных условиях результат склеивания двух полноториев вдоль части их границы будет являться полноторием. Первоначально были рассмотрены случаи, когда склеивание производится вдоль кольца или вдоль проколотого тора. Затем был исследован и общий случай.

Методы. Были использованы методы теории трехмерных многообразий и комбинаторной теории групп. Часть из них, как и основные определения из теории трехмерных многообразий, можно найти в работах [52,54,60,65]. Для доказательства основного результата использовалась характеристика полнотория в классе всех трехмерных многообразий – его фундаментальная группа является свободной. Из комбинаторной теории групп были использованы преобразования Нильсена и теорема Ван-Кампена [51,63].

Результаты и обсуждения. Опишем конструкцию склеивания двух трехмерных многообразий с краем. Пусть M_1 и M_2 – два связных компактных ориентируемых трехмерных многообразия, имеющие края ∂M_1 и ∂M_2 соответственно. Рассмотрим связные компактные поверхности $F_i \subset \partial M_i, i = 1, 2$ такие, что имеет место гомеоморфизм $h: F_1 \rightarrow F_2$. Обозначим через $M = M_1 \cup_h M_2$ – трехмерное многообразие, полученное склеиванием многообразий M_1 и M_2 с помощью гомеоморфизма h . Пусть $F = F_1 = F_2$ – поверхность в M . Будем говорить, что M получено склеиванием многообразий M_1 и M_2 вдоль поверхности F и записывать $M = M_1 \cup_F M_2$.

Обратимся к случаю полноториев. Трехмерное многообразие M называют полноторием рода n , если в M существует набор $D = \{D_1, \dots, D_n\}$ из n различных существенно вложенных дисков таких, что после разрезания M вдоль D получается трехмерный шар. Краем ∂M полнотория рода n является двумерная поверхность рода n . Замкнутая кривая на ∂M называется параллелью, если она пересекает границу существенного диска в одной точке.

Характеризация полнотория в классе всех трехмерных многообразий может быть дана в терминах фундаментальной группы. Имеет место следующая лемма, см. например, [53].

Лемма Пусть M – компактное неприводимое трехмерное многообразие с непустой границей. Если его фундаментальная группа $\pi_1(M)$ является свободной группой, то M – полноторий.

Пусть M – полноторий рода n и $J = \{J_1, \dots, J_p\}$, $p < n$ – набор простых замкнутых кривых на ∂M . Множество J называется примитивным, если $[J_1], \dots, [J_p] \subset \pi_1(H)$ можно расширить до базиса группы $\pi_1(M)$.

Следующая теорема описывает случай склеивания двух полноториев вдоль кольца. Некоторые результаты о сумме двух полноториев вдоль кольца были получены в работе [11]. В частности, было получено достаточное условие того, что такая сумма является полноторием. В следующей теореме устанавливается, что это условие является необходимым.

Теорема 1.1 Пусть $M = M_1 \cup_A M_2$ – склейка двух полноториев M_1 и M_2 вдоль кольца A . Многообразие M является полноторием тогда и только тогда, когда центральная кривая кольца A является параллелью в M_1 или в M_2 .

Проколотым тором называется поверхность, гомеоморфная тору с проколом (см. рисунок 1.1). Гиперболические структуры, соответствующие квазифуксовым реализациям группы проколотого тора, изучались в [62].

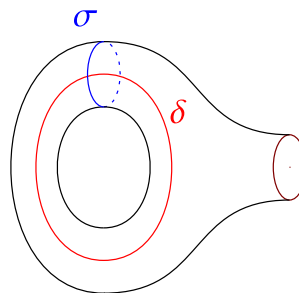


Рисунок 1.1 – Проколотый тор

Теорема 1.2 Пусть $M = M_1 \cup_T M_2$ – склейка двух полноториев M_1 и M_2 вдоль проколотаго тора T . Предположим, что T является несжимаемым как в M_1 так и в M_2 . Многообразие M является полноторием тогда и только тогда, когда существует множество $\{ \delta, \sigma \}$ простых замкнутых кривых на T такое, что

-множество $\{ \delta, \sigma \}$ примитивно в M_1 или M_2 ,

-множество $\{ \delta \}$ примитивно в M_1 , а $\{ \sigma \}$ примитивно в M_2 .

Напомним использованное выше определение несжимаемой поверхности. Пусть M – компактное трехмерное многообразие. Предположим, что поверхность F либо принадлежит краю ∂M , либо собственно вложена в M . Поверхность F называется сжимаемой, если выполнено одно из следующих условий:

(1) F является тривиальным диском,

(2) F является тривиальной 2-сферой,

(3) существует диск $D \subset M$ такой, что $D \cap F = \partial D$ и ∂D является существенной петлей в F .

Иначе, поверхность F называется несжимаемой.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия в случае склеивания вдоль произвольной поверхности. Ее доказательство проводится индукцией и опирается на теорему 1.2.

Теорема 1.3. Пусть $M = M_1 \cup_S M_2$ – склейка полноториев M_1 и M_2 вдоль связной поверхности $S = S_{g,b}$ рода $g \geq 0$ и $b \geq 1$ проколами. Предположим, что $g(M_i) \geq 2$, $i=1,2$, и поверхность S несжимаема как в M_1 , так и в M_2 . Многообразие M является полноторием тогда и только тогда, когда существует базис $J = \{ J_1, \dots, J_m \}$, допускающий такое разбиение $J = J^1 \cup J^2$, где $J^1 \cap J^2 = \emptyset$, что множество J^1 примитивно в M_1 , а множество J^2 примитивно в M_2 .

З а к л ю ч е н и е. Описанные выше результаты опубликованы в статье [A.1]. Кроме того, в работе [A.2] исследованы свойства Гордиева комплекса, построенного для преобразования региональной смены перекрестков в диаграмме классического узла и для преобразования поднятия дуг в диаграмме виртуального узла. В работе [A.3] (принята в печать) изучены свойства Гордиева комплекса для преобразования скрученности в диаграмме узла со спайками. В работе [A.4] развиты методы топологических индексов для исследования химических свойств фуллеренов.

Полученные научные результаты прошли апробацию на международных и ведущих российских конференциях, и научно-исследовательских семинарах:

- 1) III международная конференция «Группы и квадранты в маломерной топологии», Мохали-Томск, 3 октября 2020 г. – «An unknotting invariant for welded knots» (приглашенный доклад).
- 2) I Корейско-Российская конференция по теории узлов и смежным темам, Сеул-Пусан-Москва-Томск, 03–06 ноября 2020 г. – «Ideal right-angled hyperbolic polyhedra and link complements» (приглашенный доклад).
- 3) Практикум по топологическому анализу данных, Институт математических наук Филдса, Торонто, Канада, 15–18 июня 2020 г. – «Distance-based descriptors of Fullerenes» (приглашенный доклад).
- 4) Программа ICTS «Узлы через Интернет», Международный центр теоретических наук, Бангалор, Индия, 24–28 августа 2020 г. – «Tetrahedral hyperbolic 3-manifolds and links» и «New polynomial invariants of virtual knots» (приглашенные доклады).
- 5) VI научная конференция с международным участием «Геометрия многообразий и ее приложения – 2020», Улан-Удэ-Томск, 27–29 августа 2020 г. – «Многогранники Погорелова и трехмерных гиперболические многообразия» (приглашенный доклад).
- 6) Московско-Пекинский Семинар по топологии, 2 сентября 2020 г. – «Right-angled hyperbolic polyhedral and hyperbolic 3-manifolds» (приглашенный доклад).
- 7) Семинар по гиперболической геометрии памяти В.С. Макарова, ИМ РАН, Москва, 15 сентября 2020 г. – «Объемы идеальных прямоугольных многогранников» (приглашенный доклад).
- 8) Семинар им. М.М. Постникова «Алгебраическая топология и ее приложения» в МГУ, Москва, 20 октября 2020 г. – «Новые полиномиальные инварианты виртуальных узлов» (приглашенный доклад).
- 9) Большой семинар Лаборатории комбинаторных и геометрических структур МФТИ, Москва, 12 ноября 2020 г. – «Around right-angled hyperbolic polytopes» (приглашенный доклад).
- 10) Петербургский топологический семинар им. В.А. Рохлина, ПОМИ, Санкт-Петербург, 30 ноября 2020 г. – «Идеальные прямоугольные гиперболические многогранники, прямоугольные зацепления и гипотеза о максимальном объеме» (приглашенный доклад).
- 11) VII Китайско-Российская конференция по теории узлов и смежным вопросам, Пекин-Москва-Томск, 1–7 декабря 2020 г. – «Volumes of hyperbolic right-angled ideal polyhedra» (приглашенный доклад).
- 12) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Когда склеивание двух полноториев является полноторием?» (устный доклад).

1.2 Методы и модели молекулярной динамики

Введение. В настоящее время открыто много новых углеродных материалов, обладающих совершенно уникальными свойствами. Эти материалы находят широкое применение в научных исследованиях, электронике, физико-химии и медицине. Огромный интерес вызывает класс 2D-углеродных структур, включающий в себя графены, фуллерены и нанотрубки. На основе этих структур создаются и успешно используются более сложные углеродные конструкции графеновые матрицы, фуллериты, укладки нанотрубок. Было замечено, что материалы на основе бора часто геометрически повторяют углеродные конструкции, однако при этом они обладают специфическим физико-химическими свойствами. Известно также, что наноторы и нанодиски способны к образованию столбиковых структур, имеющих внутренние степени свободы, также, как и многие фуллериты. За отчетный год были рассмотрены, решены и опубликованы: задача об угловых колебаниях и вибрациях молекул B_{42} в линейных квазикристаллических структурах, называемых монетными столбиками; задача о движении фуллеренов и их димеров внутри углеродных нанотрубок.

Методы. Теоретической основой для решения таких задач выступают модели каркасных структур и атом-атомных взаимодействий крупных молекул. Известно, что в общем случае атом, находящийся в структуре, имеет параметры взаимодействия отличные от соответствующих величин для свободных атомов. Однако для углеродных структур эти отличия являются малыми. Для бор-борных взаимодействий эти параметры различаются существенно. Однако для взаимодействий бор-атом в структуре -бор-атом в другой структуре они найдены и они оказались на порядок меньше чем для свободных атомов. Когда ли каким-либо способом задача сведена к атом-атомным взаимодействиям, то при описании элементарных взаимодействий можно использовать простейший LJ-потенциал. Если же крупные каркасные молекулы сталкиваются и становится заметным переход кинетической энергии молекул в энергию теплового движения их атомов, то описание движения атомов, составляющих молекулы, строится на основе связеориентированного потенциала REBO. В любом случае движение атомов и молекул подчиняется законам классической механики, которые в математическом выражении имеют вид обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Обычным приемом эти уравнения сводятся к системе ОДУ первого порядка, которая в дальнейшем интегрируется численно с применением пошаговых методов высокого порядка точности.

Результаты и обсуждение. Относительно недавно были открыты столбиковые фазы. Этот класс соединений был предсказан Л.Д. Ландау и открыт

Чандрасекаром (1977). Дискообразные молекулы, составляющие столбики, показаны на рисунке 2.1.

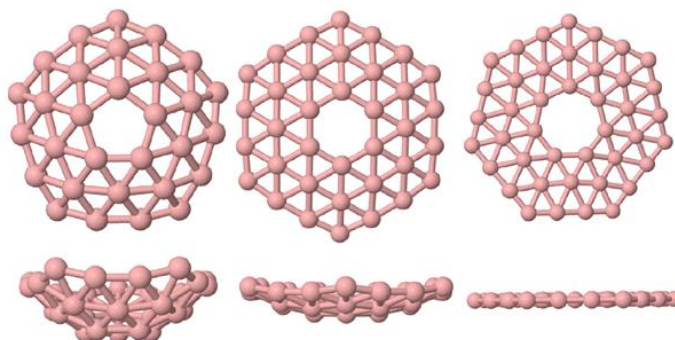


Рисунок 2.1 – $B_{30} C_{5v}$, $B_{36} C_{6v}$ и $B_{42} C_{7v}$

Столбики не бывают статичными и поэтому их часто называют "жидким нитями". Мы рассчитали динамическое состояние составленного пятью дисками B_{42} . Результаты расчётов приведены на рисунке 2.2.

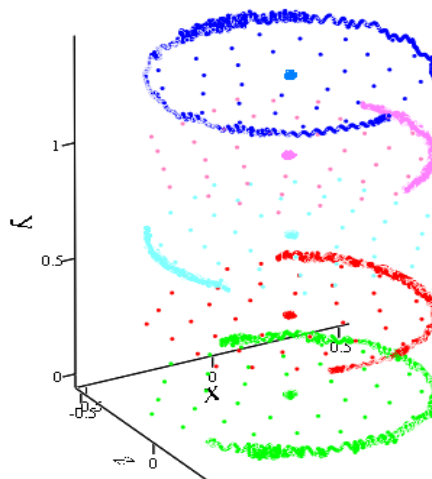


Рисунок 2.2 – Траектории 5 дисков

Как показывают вычисления, диски совершают угловые колебания большой амплитуды вокруг своих осей и незначительные вибрации по двум другим направлениям. При воздействии электромагнитных полей угловые колебания могут переходить во вращения. При этом стабильность рассматриваемых конструкций даже увеличится.

Другим примером использования крупных молекул в системах, имеющих медицинские применения является задача о молекулярном контейнере. Для этой задачи важным является механизм высвобождения лекарственных веществ, находящихся в контейнере. В рассмотренном здесь случае роль контейнера выполняет открытая углеродная нанотрубка, а роль поршня - димер C_{20} (связанные ковалентными связями два фуллерена). На рисунке 2.3 представлены (слева) траектории двух точек димера (центра

масс и периферийного узла), угловые частоты димера (справа вверху) и координаты его центра масс (справа внизу).

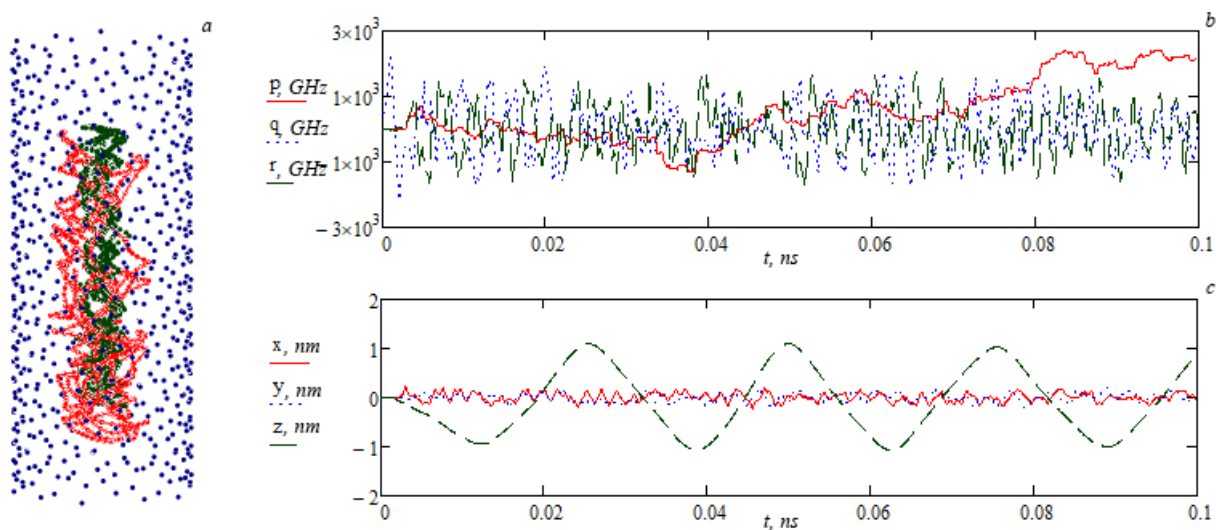


Рисунок 2.3 – Димер C_{20} внутри CNT (15,5)

Видно, что энергия изначально раскрученного димера преобразуется в энергию его поступательного перемещения. Он как поршень выталкивает лекарственные вещества в двух свободных направлениях. Если увеличивать начальную скорость вращения димера, то трубка может выстрелить сдвоенной молекулой, придав ей достаточно большую осевую скорость.

Заключение. Проведённые исследования показывают, что методы атом-атомных взаимодействий крупных молекул являются вполне работоспособными. Однако в случае длинных молекулярных нитей V_{42} или при полной загрузке молекулярного контейнера молекулами связующего и лекарственного вещества эти методы являются весьма трудоёмкими. В этих случаях приходится использовать системы параллельных вычислений.

Качественные исследования, проведённые за отчётный период, позволили установить, что агрегации плоских молекулярных дисков бора составляют жидкокристаллическую фазу. Привычной основой, приводящей к появлению анизотропных свойств этой фазы, являются молекулярные нити, а в случае небольшого линейного размера этих образований - молекулярные столбики. Устойчивое состояние этих молекулярных кластеров обеспечивается как силами Ван-дер-Ваальса, так и магнитными силами, проявляющимися за счёт наличия собственных магнитных моментов первичных частиц, а также диатропных кольцевых токов в молекулах V_{42} . Расчёты показывают, что выделенные линейные кластеры не являются статичными. Эти агрегации характеризуются изгибанием осей нитей и осевыми низкочастотными поворотами дисков

большой амплитуды, несвязанными с температурой. Постоянное магнитное поле способствует образованию в среде молекул B_{42} пространственных кластеров, характерных для кристаллов твердой фазы. Если к постоянному магнитному полю добавить сопряженное с ним переменное электрическое поле, то осевые повороты дисков переходят во вращение. Индуцированные переменным электрическим полем вращения дисков способствуют повышению устойчивости столбиковых пространственных структур и даже отверждению жидкого кристалла.

В работе по молекулярному контейнеру показано, что димер C_{20} достаточно свободно перемещается по оси углеродной нанотрубки. На примере трубки CNT(15, 5) и димера C_{20} продемонстрирована возможность преобразования энергии вращения внутреннего тела в энергию его поступательного перемещения. В этом случае каркасная структура, находящаяся внутри CNT, работает как поршень, выталкивающий лекарственные вещества из молекулярного контейнера. Это является чрезвычайно важным при лечении очаговых раковых образований способом адресной доставки лекарства. Этот способ может стать альтернативой способам, известным в химео и радиотерапиям.

Таким образом работы по материалам и их фрагментам, имеющим внутренние степени свободы, запланированные на 2020 год, выполнены полностью. Описанные результаты опубликованы в статьях [А.9], [А.24]. Более того решена и опубликована задача о квантовой просеивании изотопов гелия [А.10] из плана работ на 2021 год.

Полученные научные результаты прошли апробацию на конференциях и семинарах:

1) III международной конференции «Умные наноматериалы-2020, достижения, инновации и приложения», Париж, Франция, 8–11 декабря 2020 г. – «Hydrogen isotope separation via carbon nitride bi-layer membrane», «Movement of fullerene C_{180} encapsulated in a carbon nanotube (25,0)» (стендовые доклады).

2) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Методы и модели молекулярной динамики» (устный доклад).

Под руководством А.М. Бубенчикова были защищены кандидатские диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук:

1) Малоземов А.В. Тема: “Математическое моделирование процессов разделения газов на основе мембран из наноструктурированных материалов”, дата защиты: 26 ноября 2020 г.

2) Уколов А.В. Тема “Взаимодействие сферических частиц и структур на их основе с компонентами природного газа”, дата защиты: 26 ноября 2020 г.

1.3 Численное моделирование двухфазного течения воды с ледяными частицами в реке

Введение. Актуальной проблемой является применение математического моделирования для прогноза появления и оценки последствий локальных наводнений, зачастую вызываемых загромождением льдинами речного русла во время ледохода. Особого внимания в данной задаче заслуживает построение модели движущихся в потоке ледяных частиц.

Целью настоящего исследования является разработка новой модели в приближении мелкой воды для исследования течений смеси «вода-ледяные частицы», нового численного метода для ее компьютерной реализации и их применение для моделирования лабораторного двухфазного течений в открытом канале и вскрытия реки Томь ото льда [А9].

Методы. Рассматривается двухфазное изотермическое движение смеси «вода – ледяные частицы» в открытом канале или русле реки. Предполагается, что ледяные частицы плотно расположены в приповерхностном слое воды и их концентрация остается постоянной на входе в канал (или рассматриваемый участок реки). Температура окружающей среды близка к температуре воды и изменяется незначительно и поэтому обменом массой и теплом между фазами можно пренебречь. Плотность льда $\rho_i^0 = 910 \text{ кг/м}^3$ меньше плотности воды $\rho_l^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$. Горизонтальные размеры области исследования много больше глубины двухфазного потока. Учитывается взаимодействие (столкновения) частиц между собой. Предполагается что размер ледяных частиц много меньше характерных размеров канала (русла) (рисунок 3.1).

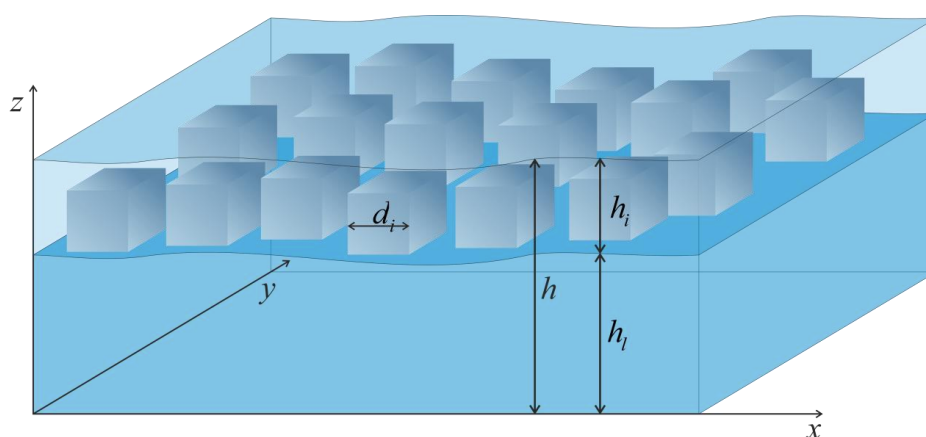


Рисунок 3.1 – Физическая постановка задачи

В силу существенного различия масштабов рассматриваемого процесса по горизонтали и вертикали будем использовать гидростатическое приближение, в

соответствии с которым предполагается, что все члены в уравнении для вертикальной скорости малы за исключением членов, выражающих давление и силу тяжести. Для описания рассматриваемого процесса будем использовать уравнения механики взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов, в соответствии с которой ледяные частицы, плотно расположенные у поверхности воды, представляются сплошной средой с эффективными свойствами.

Уравнения для несущей фазы (воды):

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \nabla \cdot (h' \vec{w}_l) = 0; \quad (3.1)$$

$$h' \left(\frac{\partial \vec{w}_l}{\partial t} + (\vec{w}_l \cdot \nabla) \vec{w}_l \right) = -gh' \psi \nabla (z_b + h) + \nabla \cdot h' \tau_1(\vec{w}_l) - c_f |\vec{w}_l| \vec{w}_l + \vec{F}_l. \quad (3.2)$$

Уравнения для дисперсной фазы (ледяных частиц):

$$\frac{\partial h''}{\partial t} + \nabla \cdot (h'' \vec{w}_i) = 0; \quad (3.3)$$

$$h'' \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t} + (\vec{w}_i \cdot \nabla) \vec{w}_i \right) = -\frac{\rho_l^0}{\rho_i} gh'' \psi \nabla (z_b + h) + \nabla \cdot h'' \tau_i(\vec{w}_i) - c_f^i |\vec{w}_i| \vec{w}_i + \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Здесь g – ускорение свободного падения; $\vec{w} = (w_1, w_2)$ – скорость фаз; $z_b = z_b(x, y)$ – функция, которая описывает батиметрию; h – глубина воды. $\int_{h-h_1+z_b}^{h+z_b} \alpha_i dz = \bar{\alpha}_i h_i = h''$,

$h' = h - h''$. Здесь h_i – характерный размер глубины слоя ледяных частиц, α_i – объемная доля дисперсной фазы, $0 \leq \alpha_i < 1$. $c_f = \frac{gn^2}{h^{0.333}}$ – коэффициент трения жидкой фазы о дно; $n > 0$ – коэффициент Маннинга.

Трение фазы ледяных частиц о дно реки рассчитывается как $c_f^i |\vec{w}_i| \vec{w}_i$, где $c_f^i = 0.0025 |\vec{w}_i|^{-1}$. $\psi = \bar{\alpha}_l + \left(\frac{\rho_l^0}{\rho_l} - 1 \right) (1 - \bar{\alpha}_l)$, где $\bar{\alpha}_l$ – осредненная по глубине объемная доля воды ($0 < \bar{\alpha}_l \leq 1$).

$$\tau_{kj}(\vec{w}) = (v^0 + v^t) \left[\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{kj} \text{div} \vec{w} \right] - \frac{2}{3} \delta_{kj} k, \quad (j, k = 1, 2) \quad - \quad \text{компоненты}$$

тензора вязких и турбулентных напряжений для жидкой/дисперсной фаз; $v_{l,i}^0$ – вязкость воды/дисперсной фазы; $v_{l,i}^t$ – турбулентная вязкость течения; δ_{kj} – символы Кронекера; k – кинетическая энергия турбулентности. Вязкие напряжения в дисперсной фазе появляются вследствие соударения частиц и трения между ними.

Силы в уравнениях движения для дисперсной фазы определяются следующим образом: $\vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_\mu + \vec{F}_{VM} + \vec{F}_C$:

$$\text{Сила Архимеда } \vec{F}_A = h'' \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \left(\frac{D_l \vec{w}_1}{D_l t} - \vec{g} \right); \frac{D_l \vec{w}_1}{D_l t} = \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} + (\vec{w}_1 \cdot \nabla) \vec{w}_1.$$

$$\text{Сила сопротивления } \vec{F}_\mu = \begin{cases} \left[150 \frac{h'' \tilde{\alpha}_i (1 - \tilde{\alpha}_i) \mu_l}{\tilde{\alpha}_i \rho_i^0 (d_i f_i)^2} + 1.75 \frac{h'' \rho_l^0 |\vec{w}_1 - \vec{w}_i|}{\rho_i^0 d_i f_i} \right] (\vec{w}_1 - \vec{w}_i), \tilde{\alpha}_i \leq 0.8; \\ \frac{3}{4} \frac{h'' \rho_l^0 c_D \tilde{\alpha}_i^{-1.65}}{\rho_i^0 d_i f_i} |\vec{w}_1 - \vec{w}_i| (\vec{w}_1 - \vec{w}_i), \tilde{\alpha}_i > 0.8; \end{cases}$$

где $c_D = \max \left[\frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}), 0.44 \right]$ – безразмерный коэффициент трения, d_i –

характерный размер ледяных частиц; $\text{Re}_p = \frac{|\vec{w}_1 - \vec{w}_i| d_i \rho_l^0 \alpha_l}{\mu_l^0}$.

$$\text{Сила присоединенных масс } \vec{F}_{VM} = c_{VM} h'' \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \left(\frac{D_l \vec{w}_1}{D_l t} - \frac{D_i \vec{w}_i}{D_l t} \right), c_{VM} \approx 0.5.$$

$$\text{Сила Кориолиса } \vec{F}_C = h'' (\vec{w}_i \times \vec{\omega}).$$

В начальный момент времени используются следующие значения параметров течения: $h'' = h_{ice}$; h_{ice} – начальное значение глубины дисперсной фазы (известная величина); компоненты скорости также известны. На входе в расчетную область значения параметров жидкой фазы и фазы частиц считаются известными, на выходной границе используется равенство нулю производных по внешней нормали к границе. Кроме того, на границах потока с берегом рассматривается трение.

Область течения покрывается прямоугольной структурированной сеткой. Дискретизация уравнений модели производится методом конечного объема с использованием явных разностных схем. Исключение составляют члены силы сопротивления в уравнениях движения, которые аппроксимируются неявно. Конвективные слагаемые уравнений аппроксимируются с применением монотонных разностных схем высокого порядка MLU или MUSCL Ван Лира. Аппроксимация

$$\left[gh \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x} \right]_e \approx \begin{cases} gh_e \frac{h_E - h_P + z_{bE} - z_{bP}}{\Delta x}, h_E \text{ and } h_P > \varepsilon_{wd} > 0, \\ 0, h_E \text{ or } h_P < \varepsilon_{wd}; \\ \varepsilon_{wd} - \text{малая величина.} \end{cases}$$

была использована для источниковых членов, которые представляют влияние наклона дна в уравнениях движения. Диффузионные слагаемые аппроксимируются на основе центрально-разностной схемы второго порядка.

Чтобы уменьшить ограничение на шаг по времени, члены уравнений, которые описывают динамическое взаимодействие фаз вследствие трения, аппроксимируются неявно; оригинальный алгоритм частичного исключения используется для решения в областях, где нет дисперсной фазы ($h'' = 0$). Ниже дадим краткое описание этого алгоритма.

Рассмотрим дискретные аналоги уравнений движения фаз для внутреннего узла e расчетной сетки

$$\frac{h_e'^0 u_{ie} - h_e'^0 u_{ie}^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y = \Phi_e^0 + \beta^0 h_e''^0 (u_{ie} - u_{ie}^0); \quad (3.5)$$

$$\frac{h_e''^0 u_{ie} - h_e''^0 u_{ie}^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y = \Psi_e^0 + \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \beta^0 h_e''^0 (u_{ie} - u_{ie}^0). \quad (3.6)$$

Здесь слагаемые Φ_e^0 и Ψ_e^0 объединяют аппроксимации конвективных, диффузионных и источниковых членов уравнений. Верхний индекс « 0 » соответствует сеточным величинам с предыдущего шага по времени. В правых частях уравнений (5)–(6), члены $\beta^0 h_e''^0 (u_{ie} - u_{ie}^0)$ and $\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \beta^0 h_e''^0 (u_{ie} - u_{ie}^0)$ описывают динамическое взаимодействие фаз и содержащие разность компонент скоростей фаз. Если для этих слагаемых также использовать явную аппроксимацию, потребуется более жесткое, чем условие Куранта

$$\tau < \frac{0.5 \Delta x \Delta y}{\max |u_e| \Delta y + \max |v_n| \Delta x + \sqrt{gh} (\Delta x + \Delta y)},$$

ограничение на шаг по времени при проведении расчетов течений с частицами, обладающими высокой динамической инерционностью. Кроме того, в узлах сетки, где $h'' = 0$, система уравнений (3.5)–(3.6) имеет особенность (уравнение (3.6) обращается в тождество). В связи с этим перепишем систему в следующем виде:

$$(h_e'^0 \Delta x \Delta y + \Delta t \beta^0 h_e''^0) u_{ie} - \Delta t \beta^0 h_e''^0 u_{ie}^0 = \Delta t \Phi_e^0 + h_e'^0 u_{ie}^0 \Delta x \Delta y; \quad (3.7)$$

$$\left(\Delta x \Delta y + \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \Delta t \beta \right) u_{ie} - \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0} \Delta t \beta u_{ie}^0 = \Delta t \Psi_e^0 / h_e''^0 + u_{ie}^0 \Delta x \Delta y. \quad (3.8)$$

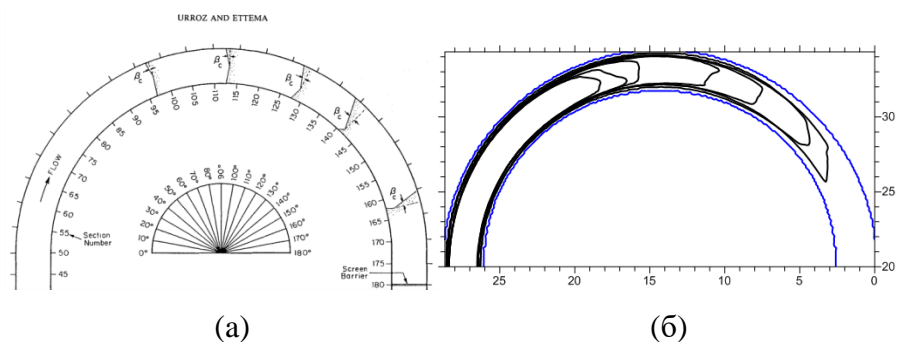
В (3.8) в $\Psi_e^0 / h_e''^0$ при $h_e''^0 < \varepsilon$, где ε – малая положительная величина, Ψ_e^0 принимается равной нулю. Определитель системы отличен от нуля, и система решается по

правилу Крамера. Аналогичным способом представляется система для компонент скоростей фаз \bar{v}_{ln} , \bar{v}_{in} . Знаки осреднения везде опущены.

Определение границы реки и суши при нестационарном расчете представляет особую сложность из-за возникновения неустойчивости решения из-за малой глубины воды в граничной ячейке. Один из простейших методов заключается в выборе некоторого малого параметра $\varepsilon_{wd} > 0$ такого, что как только глубина потока становится меньше ε_{wd} , ячейка считается сухой и исключается из расчетов. В исследуемом случае течения воды с ледяными частицами в качестве глубины рассматривается глубина несущей фазы h' , при этом, в сухих ячейках глубина дисперсной фазы h'' также принимается равной нулю.

Результаты и обсуждение. Нестационарное течение воды с полипропиленовыми шариками в U-образном канале с дном в виде лотка со скошенными стенами было численно исследовано и сравнено с экспериментальными результатами (рисунок 3.2).

Глубина потока на входе в канал равнялась 0,45 м, расход воды на входе в канал – 0,16 м³/с. Данные параметры соответствуют турбулентному течению с числом Рейнольдса, вычисленным по глубине потока $Re_h = 77170$, $Fr = 0.081$. Для имитации ледяных частиц в эксперименте использовались сферические бусины из полипропилена диаметром $d_i = 0,005$ м. Плотность материала частиц $\rho = 900$ кг/м³ близка к плотности льда. При проведении физического моделирования накопления плавучих частиц, они сбрасывались в установившийся поток с одинаковым расходом в конце прямого предвключенного участка. На входе из поворота в начале прямого участка была установлена сетка, задерживающая частицы и имитирующая таким образом появление ледового затора. Измерения толщины льда и глубины потока в эксперименте проводились с точностью до 1 мм.



а) – эксперимент, б) – расчет

Рисунок 3.2 – Профили фронта слоя частиц по мере их движения по каналу

При образовании ледового затора толщина слоя накопившихся частиц максимальна в голове ледохода у левой стенки и постепенно уменьшается вверх по течению и по направлению к правой стенке канала. С ростом размера затора в горизонтальной области также возрастает и его толщина из-за увеличения гидравлического уклона в потоке. В начале образования затора частицы накапливаются у ограничивающей их движение сетки ближе к левому по течению берегу канала, так как течение у правой стенки интенсивнее. Далее, по мере увеличения сопротивления формирующегося затора потоку, область его максимальной толщины смещается к правой стенке, а затем распределение h'' становится практически симметричным относительно центральной линии канала. Модель правильно предсказала изменение фронта слоя движущихся по каналу частиц, увеличение их концентрации и скорости у внешней стенки канала. В [68] отмечается, что подобная форма головы «ледохода», наблюдаемая в канале, повторяет наблюдения за течением реки Айова во время ледохода.

Также было рассмотрено движение смеси «вода – ледяные частицы» в канале с резким поворотом по углом 90° [A.15]. В качестве базового варианта изучается течение воды с ледяными частицами со скоростью на входе в канал равной $U_0 = 0,2$ м/с, начальной глубиной потока равной $h = 0,175$ м. Плотность частиц равна $\rho_i = 910$ кг/м³. Глубина слоя дисперсной фазы $h'' = 0,04$ м. Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1. Скорости движения мелких и более крупных частиц существенно не различаются в области поворота течения. За поворотом у правой по течению стенки наблюдается зона рециркуляционного течения, более интенсивного для частиц с диаметром $d_i = 0,1$ м.

В углу канала скорости жидкости и частиц также отличаются, но для рассматриваемого случая частицы под действием жидкости успевают изменить направление своего движения и существенного накопления дисперсной фазы в этой области не наблюдается.

2. Более заметное влияние на скорости движения фаз и толщину слоя частиц оказывает небольшое изменение рельефа дна. Малоинерционные частицы также, как и жидкость быстро откликаются на изменение условий течения. В то же время для более инерционных частиц изолинии модуля скорости меняются более плавно над скачком сечения канала.

Проявление большей инерционности частиц с диаметром 0,1 м заметно и по распределению глубины дисперсной фазы h'' : более плавное увеличение этого параметра при приближении к резкому снижению уровня дна, накопление частиц вблизи поворота.

Заключение. Построена новая математическая модель двухфазного изотермического турбулентного течения смеси «жидкость – легкие частицы» в рамках механики взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов. Модель описывает течение в открытых каналах и русловых потоках в приближении мелкой воды. Модель учитывает динамическое скольжение фаз, подъемную силу, действующую на частицы, соударение частиц между собой, турбулентную структуру движущейся жидкости и частиц, трение жидкости и частиц о дно и стенки канала.

Для численного решения гидродинамических уравнений фаз предложен новый численный метод, позволяющий проводить сквозные расчеты в областях с неоднородным распределением частиц вплоть до их полного отсутствия. Метод основывается на явно-неявных монотонных разностных схемах первого-второго порядка аппроксимации.

Разработанная модель и численный метод прошли апробацию на результатах экспериментальных исследований двухфазного турбулентного течения «жидкость – легкие частицы» в U-образном открытом канале и канале с поворотом на 90° . Расчеты показали, что частицы в большей мере реагируют на подъем рельефа дна, чем на резкое изменение направления движения потока. Тем не менее, наличие частиц в потоке увеличивает неоднородность распределения свободной поверхности в поворотной части канала.

Все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.15]. Результаты прошли апробацию на конференциях и семинарах:

- 1) Международной конференции по вычислительной науке 2020, Амстердам, Нидерланды, 3–5 июня 2020 г. (секционный доклад).
- 2) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Численное моделирование двухфазного течения воды с ледяными частицами в реке Томь» (устный доклад).

1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп

Введение. Как отмечал еще Фукс в своей знаменитой монографии [69], при работе с инволюциями возникают определенные сложности: «эти автоморфизмы не обеспечивают нас информацией в том же объеме, что и проекции; к тому же во избежание излишних трудностей... необходимо предположить, что умножение на 2 есть автоморфизм группы». И действительно, многие теоремы в работах Вильданова [70–72], посвященных определяемости вполне разложимых групп их группами автоморфизмов, доказаны в предположении, что вполне разложимая группа 2-делима. Здесь можно проследить определенные параллели с задачей об определяемости абелевой p -группы ее группой

автоморфизмов: для $p > 3$ она была решена Лептином в 1960 году [73], для $p = 3$ – Либертом в 1980-х годах [74], а случай $p = 2$, как отмечается в последнем издании монографии Фукса [75], до сих пор остается открытой проблемой. Таким образом, для решения поставленных в рамках данного проекта задач нужны новые подходы, которые позволят избавиться от требования 2-делимости при рассмотрении определяемости вполне разложимой группы ее группой автоморфизмов. Ключом к нахождению таких подходов должно стать рассмотрение групп автоморфизмов вполне разложимых групп рангов 2 и 3 (уже без ограничений на 2-делимость).

Методы. Для решения вопроса об определяемости вполне разложимой группы без кручения G ее группой автоморфизмов $\text{Aut } G$ использовались предложенные Вильдановым подходы [69, 72], позволяющие получать некоторую информацию о группе G , основываясь на свойствах инволюций группы $\text{Aut } G$. Эти методы, в свою очередь, были усовершенствованы таким образом, чтобы они оказались применимы к ситуации, когда группа G не является 2-делимой. При исследовании тензорных произведений модулей над csr -кольцами были задействованы подходы, связанные с использованием идемпотентов таких колец и разработанные ранее автором [76, 77] для описания проективных модулей над csr -кольцами. Для описания того, как действуют на p -минимальные факторно делимые группы без кручения ранга 2 автоморфизмы их инъективных оболочек, был задействован используемый в работах Фукса, Бьюмонта, Уизнера и Пирса [78–80] подход, позволяющий представлять группы ранга 2 с помощью групп ранга 1.

Результаты и обсуждения. Нас интересует вопрос о том, при каких условиях вполне разложимая группа (без кручения) конечного ранга определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп.

Определение 4.1. Пусть $G \in X$, где X – некоторый класс групп. Мы будем говорить, что G определяется своей группой автоморфизмов в классе X , если из $\text{Aut } G \cong \text{Aut } H$, где $H \in X$, всегда следует $G \cong H$.

Определение 4.2. Абелева группа G называется почти делимой, если $pG = G$ почти для всех простых чисел p .

Для групп ранга 2 был получен следующий критерий определяемости:

Теорема 4.1. Пусть G – вполне разложимая группа ранга 2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 2;
- 2) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп;

3) $G \cong A \oplus A$, где A – почти делимая группа ранга 1.

Через $t(A)$ обозначается тип группы без кручения A , имеющей ранг 1.

Строение группы $\text{Aut } G$ зависит от соотношений, связывающих типы $t(G_i)$ слагаемых ранга 1, входящих в прямое разложение группы G .

Для вполне разложимой группы $G = A \oplus B \oplus C$ возможны девять принципиально различных случаев:

- 1) Типы $t(A)$, $t(B)$, $t(C)$ несравнимы между собой.
- 2) $t(C) < t(B)$, причем типы $t(B)$ и $t(C)$ несравнимы с типом $t(A)$.
- 3) $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$, причем типы $t(B)$ и $t(C)$ несравнимы.
- 3') $t(C) < t(B)$ и $t(C) < t(A)$, причем типы $t(B)$ и $t(A)$ несравнимы.
- 4) $t(C) < t(B) < t(A)$.
- 5) Тип $t(B)$ несравним с $t(A)$ и $B \cong C$.
- 6) $A \cong B$ и $t(C) < t(A)$.
- 6') $B \cong C$ и $t(B) < t(A)$.
- 7) $A \cong B \cong C$.

Приводимая ниже таблица 1 дает для каждого из этих случаев информацию о следующих характеристиках группы $\text{Aut } G$:

- тривиальность/нетривиальность первого, второго и третьего коммутантов;
- мощность x множества центральных инволюций;
- максимальная мощность s множества попарно коммутирующих инволюций, каждая из которых является квадратом некоторого элемента группы.

Таблица 1 – Характеристики группы автоморфизмов

Случай	$(\text{Aut } G)'$	x	s
1)	$(\text{Aut } G)' = \{E\} \neq \text{Aut } G$	8	1
2)	$(\text{Aut } G)'' = \{E\} \neq (\text{Aut } G)'$	4	1
3)	$(\text{Aut } G)'' = \{E\} \neq (\text{Aut } G)'$	2	1
3')	$(\text{Aut } G)'' = \{E\} \neq (\text{Aut } G)'$	2	1
4)	$(\text{Aut } G)''' = \{E\} \neq (\text{Aut } G)''$	2	1
5)	$(\text{Aut } G)''' \neq \{E\}$	4	2
6)	$(\text{Aut } G)''' \neq \{E\}$	2	2
6')	$(\text{Aut } G)''' \neq \{E\}$	2	2
7)	$(\text{Aut } G)''' \neq \{E\}$	2	4

Теорема 4.2. Если вполне разложимая группа G ранга 3 относится к одному из случаев 1)–3), 3'), 4)–6), то она не определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп.

Следующая теорема отвечает на вопрос о том, при каких условиях группа, относящаяся к случаю 7), определяется своей группой автоморфизмов:

Теорема 4.3. Пусть G – вполне разложимая группа ранга 3. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 3;
- 2) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп;
- 3) $G \cong A \oplus A \oplus A$, где A – почти делимая группа ранга 1.

Таким образом, с учетом таблицы 1 для получения полного ответа на вопрос об определяемости вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов остается выяснить, при каких условиях группа G типа б') имеет группу автоморфизмов, изоморфную группе автоморфизмов группы H , относящейся к типу б') или к типу б).

В категории модулей над произвольным сср-кольцом R получено следующее описание плоских модулей:

Теорема 4.4. Для R -модуля F эквивалентны следующие условия:

- 1) F – плоский R -модуль.
- 2) Fe – плоский R -модуль для всякого примитивного идемпотента e кольца R .
- 3) Fe – плоский Re -модуль для всякого примитивного идемпотента e кольца R .

Получено также полное описание плоских подмодулей над сср-кольцом R :

Теорема 4.5. Пусть B – подмодуль R -модуля A . Тогда эквивалентны условия:

- 1) B – чистый подмодуль R -модуля A .
- 2) $B \cap AI = BI$ для любого идеала I кольца R .
- 3) B есть \cap -чистый подмодуль R -модуля A .
- 4) Be – чистый подмодуль Re -модуля Ae для всякого примитивного идемпотента e кольца R .
- 5) $Be \cap AeI = BeI$ для любого примитивного идемпотента e кольца R и любого идеала I кольца Re .
- 6) Be есть \cap -чистый подмодуль Re -модуля Ae для всякого примитивного идемпотента e кольца R .

Для простого числа p обозначим через $\mathbf{Q}^{(p)}$ наименьшее подкольцо поля рациональных чисел \mathbf{Q} , содержащее число $1/p$. Для всякого обратимого целого p -адического числа η можно рассмотреть p -минимальную факторно делимую группу без кручения

$$H_\eta = \{(a, b) \in \mathbf{Q}^{(p)} \oplus \mathbf{Q}^{(p)} \mid \eta(a + \mathbf{Z}) = b + \mathbf{Z}\}$$

ранга 2. Следующий критерий изоморфизма двух таких групп установлен с помощью рассмотрения автоморфизмов их общей инъективной оболочки:

Теорема 4.6. Для обратимых p -адических чисел η и ζ условия эквивалентны:

1) $H_\eta \cong H_\zeta$.

2) Существуют целые числа a, b, c и d такие, что $|ad - bc|$ есть степень числа p и $\zeta = (c + d\eta)/(a + b\eta)$.

З а к л ю ч е н и е. Таким образом, помимо описания всех вполне разложимых групп ранга 2, определяющихся своими группами автоморфизмов, был частично решен вопрос об определяемости группами автоморфизмов вполне разложимых групп ранга 3. Кроме того, были полностью описаны чистые подмодули и плоские модули в категории модулей над csr -кольцом, а также найдены условия, при которых заданная p -минимальная факторно делимая группа без кручения ранга 2 переводится автоморфизмом ее инъективной оболочки в каноническое представление другой p -минимальной факторно делимой группы. Тем самым получены все результаты, запланированные на 2020 год, и некоторые результаты, запланированные на 2021 год. Часть полученных результатов уже опубликована [A.5], другая часть готовится к публикации [A.18]. Все результаты прошли апробацию на семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета и на следующих конференциях:

1) Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», Томск, Россия, 12-15 мая 2020 г. – «О централизаторах инволюций группы обратимых (2×2) -матриц» (секционный доклад); «О факторно делимых группах» (секционный доклад).

2) XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Тула, Россия, 23–26 сентября 2020 г. – «О факторно делимых группах ранга 2» (секционный доклад).

3) Международная конференция «Мальцевские чтения», Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия, 16–20 ноября 2020 г. – «О факторно делимых абелевых группах ранга 2» (секционный доклад).

4) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Определяемость вполне разложимых групп малых рангов группами автоморфизмов» (устный доклад).

1.5 Исследование пассивных методов интенсификации конвективного теплопереноса в замкнутых и полукрытых областях

Введение. Конвективный теплоперенос как один из основных транспортных механизмов встречается во многих инженерных и природных системах. Известно, что энтропия как термодинамическая функция отражает работоспособность таких систем. При этом эффективность термодинамических систем характеризуется минимумом производства энтропии. Методика оптимизации термодинамических систем, основанная на минимизации производства энтропии, эффективно используется при изучении теплообменной аппаратуры, солнечных коллекторов, систем вентиляции и кондиционирования и многих других инженерных систем [81,82].

В настоящее время проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, отражающих возможности метода минимизации энтропии при изучении двухдиффузионных пористых систем. При этом включение дополнительной компоненты примеси может приводить к изменению как локальных, так и интегральных параметров системы.

Проведенный литературный обзор показал, что опубликованных работ, связанных с использованием метода минимизации производства энтропии в случае трехдиффузионных пористых систем, в открытой печати нет. Поэтому целью настоящего исследования было изучить возможности метода минимизации производства энтропии на примере трехдиффузионной пористой системы.

Рассматривался ламинарный свободно-конвективный теплоперенос вдоль горизонтальной пластины, помещенной в пористый материал. Предполагалось, что концентрации двух компонент примеси на поверхности пластины постоянны, а пластина с внешней стороны омывается теплоносителем с постоянной температурой T_f . Все теплофизические характеристики рассматриваемых материалов постоянны, за исключением плотности рабочей среды, которая удовлетворяет приближению Буссинеска. Для описания транспортных процессов в однородной пористой среде используется линейный закон Дарси и приближение локального теплового равновесия. Последнее отражает возможность применения одно-температурной модели для описания теплопереноса в пористом материале. Следует отметить, что коэффициент конвективного теплообмена между пластиной и теплоносителем определялся соотношением вида:
$$\alpha = b x^{-2/3}.$$

Методы. При математическом описании рассматриваемого процесса используется приближение пограничного слоя, которое с учетом сделанных предположений, может быть представлено следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{K} u \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\mu}{K} v - \rho_{\infty} [1 - \beta_T (T - T_{\infty}) - \beta_1 (C_1 - C_{1\infty}) - \beta_2 (C_2 - C_{2\infty})] g \quad (5.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{pm} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.4)$$

$$u \frac{\partial C_1}{\partial x} + v \frac{\partial C_1}{\partial y} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

$$u \frac{\partial C_2}{\partial x} + v \frac{\partial C_2}{\partial y} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \quad (5.6)$$

С целью получения автомодельного решения были введены следующие параметры:

функция тока $\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ и безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha_{pm} Ra_x^{1/3} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_{\infty}}{T_f - T_{\infty}}, \quad \eta = Ra_x^{1/3} \frac{y}{x} \\ \chi_1(\eta) &= \frac{C_1 - C_{1\infty}}{C_{1w} - C_{1\infty}}, \quad \chi_2(\eta) = \frac{C_2 - C_{2\infty}}{C_{2w} - C_{2\infty}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

В результате определяющие дифференциальные уравнения в частных производных (5.1)–(5.6) были преобразованы к виду обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерной функции тока $f(\eta)$, безразмерной температуры $\theta(\eta)$ и безразмерных концентраций $\chi_1(\eta)$ и $\chi_2(\eta)$:

$$f'' - \frac{2}{3} \eta (\theta' + N_1 \chi_1' + N_2 \chi_2') = 0 \quad (5.8)$$

$$\theta'' + \frac{1}{3} f \theta' = 0 \quad (5.9)$$

$$\chi_1'' + \frac{Le_1}{3} f \chi_1' = 0 \quad (5.10)$$

$$\chi_2'' + \frac{Le_2}{3} f \chi_2' = 0 \quad (5.11)$$

Безразмерные граничные условия имели следующий вид:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad \theta'(0) = -Nc [1 - \theta(0)], \quad \chi_1(0) = 1, \quad \chi_2(0) = 1 \\ f'(\eta) &\rightarrow 0, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0, \quad \chi_1(\eta) \rightarrow 0, \quad \chi_2(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь определяющими параметрами задачи являются: локальное число Рэлея

$$Ra_x = \frac{gK\beta_T(T_f - T_\infty)x}{a_{pm} \nu}, \quad \text{параметры плавучести} \quad N_1 = \frac{\beta_1(C_{1w} - C_{1\infty})}{\beta_T(T_f - T_\infty)}, \quad N_2 = \frac{\beta_2(C_{2w} - C_{2\infty})}{\beta_T(T_f - T_\infty)} \quad \text{и}$$

$$\text{числа Льюиса} \quad Le_1 = \frac{a_{pm}}{D_1}, \quad Le_2 = \frac{a_{pm}}{D_2}.$$

Для описания генерации энтропии на основе второго начала термодинамики учитываются вязкая диссипация, градиенты температуры и концентрации компонент примеси, взаимодействие с твердым скелетом пористого материала, а также взаимодействия между компонентами. Математически производство энтропии описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{gen} &= \dot{S}_{gen,h} + \dot{S}_{gen,f} + \dot{S}_{gen,pm} + \\ &+ \dot{S}_{gen,C_1} + \dot{S}_{gen,C_2} + \dot{S}_{gen,C_1,C_2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

полное производство энтропии производство энтропии вследствие теплообмена производство энтропии за счет вязкой диссипации производство энтропии из-за взаимодействия с твердым скелетом
 производство энтропии вследствие массообмена (первая компонента примеси) производство энтропии вследствие массообмена (вторая компонента примеси) производство энтропии вследствие взаимодействия между компонентами

Здесь

$$\dot{S}_{gen,h} = \frac{\lambda_{pm}}{T_\infty^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.14)$$

$$\dot{S}_{gen,f} = \frac{\mu}{T_\infty} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.15)$$

$$\dot{S}_{gen,pm} = \frac{\mu}{KT_\infty} (u^2 + v^2) \quad (5.16)$$

$$\dot{S}_{gen,C_1} = \frac{RD_1}{C_{1\infty}} \left[\left(\frac{\partial C_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{RD_1}{T_\infty} \left[\frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (5.17)$$

$$\dot{S}_{gen,C_2} = \frac{RD_2}{C_{2\infty}} \left[\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{RD_2}{T_\infty} \left[\frac{\partial C_2}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (5.18)$$

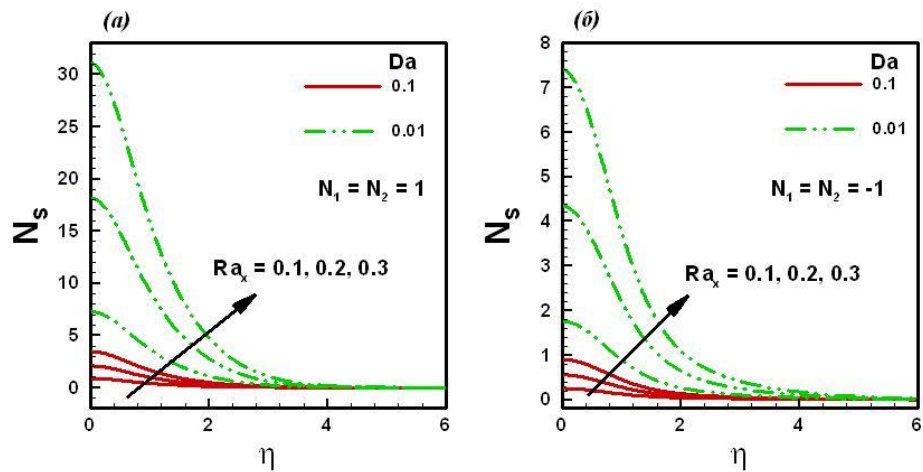
$$\dot{S}_{gen,C_1,C_2} = \frac{RD_{12}}{C_{2\infty}} \left[\frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} \frac{\partial C_2}{\partial y} \right] \quad (5.19)$$

В безразмерном виде генерация энтропии описывается следующим соотношением:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{S}_{gen}}{\lambda_{pm}/x^2} = N_s = & \Omega_T^2 Ra_x^{2/3} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)^2 + B \left(\frac{Ra_x^{4/3}}{Da} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + Ra_x^2 \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)^2 \right) + \\
& + M_3 \Omega_{C_1} \Omega_{C_2} Ra_x^{2/3} \frac{d\chi_1}{d\eta} \frac{d\chi_2}{d\eta} + M_1 Ra_x^{2/3} \Omega_{C_1} \left(\Omega_{C_1} \left(\frac{d\chi_1}{d\eta} \right)^2 + \Omega_T \frac{d\chi_1}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} \right) + \\
& + M_2 Ra_x^{2/3} \Omega_{C_2} \left(\Omega_{C_2} \left(\frac{d\chi_2}{d\eta} \right)^2 + \Omega_T \frac{d\chi_2}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} \right)
\end{aligned} \quad (5.20)$$

Результаты и обсуждения. Численные исследования краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (5.8)–(5.12) проводились с использованием метода пристрелки совместно с методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности в широком диапазоне изменения определяющих параметров $0 < Ra_x \leq 5$, $0.001 \leq Da \leq 0.5$, $-3 \leq (N_1, N_2) \leq 3$, $0.5 \leq (Le_1, Le_2) \leq 50$, $0.5 \leq Nc \leq 10$, $0 \leq (B, M_1, M_2, M_3) \leq 1$. В результате установлены распределения локальных и интегральных компонент генерации энтропии в зависимости от отмеченных характеристик.

Например, на рисунке 5.1 представлены распределения локальной генерации энтропии в зависимости от определяющих параметров. Максимальные значения N_s на поверхности пластины обусловлены высокими градиентами температуры, скорости и концентрации компонент примеси. По мере удаления от пластины наблюдается уменьшение N_s , что характеризует формирование энтропийного пограничного слоя вблизи пластины. Увеличение числа Рэля иллюстрирует повышение N_s вследствие интенсификации транспортных процессов. Уменьшение локальной генерации энтропии при увеличении числа Дарси обусловлено снижением сопротивления со стороны твердого скелета пористого материала.



$a) - T_f > T_\infty$, $b) - T_f < T_\infty$

Рисунок 5.1 – Профили локальной генерации энтропии в зависимости от локального числа Рэля и числа Дарси

З а к л ю ч е н и е. Проведено численное исследование свободно-конвективного теплопереноса и производства энтропии вблизи горизонтальной пластины внутри пористой среды. Определены масштабы влияния определяющих характеристик процесса на генерацию энтропии. В результате исследований показано, что включение дополнительной примеси сопровождается интенсификацией генерации энтропии. Полученные результаты опубликованы в статьях [А.11] и [А.12]. Результаты прошли апробацию на семинаре:

1) Воркшоп «Научная сессия НОМЦ», Томский государственный университет, Томск, Россия, 18-19 декабря 2020 г. – «Особенности производства энтропии в условиях свободноконвективного теплопереноса вдоль горизонтальной поверхности в пористой среде» (устный доклад).

1.6 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

В в е д е н и е. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. Как известно, в силу теоремы жесткости Мостова, любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Примерами таких геометрических инвариантов являются длины геодезических и объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести проблему вычисления объема многообразия к проблеме вычисления объема многогранника. Задача получения формул объемов гиперболических многогранников в частных случаях решалась еще Н.И. Лобачевским. В общем случае задача является настолько сложной, что к настоящему времени она решена лишь для гиперболических многогранников простейшего комбинаторного типа – тетраэдров. Как правило, получение формул объемов опирается на предварительное получение соотношений между длинами ребер и двугранными углами многогранника, с последующим применением вариационной формулы Шлефли.

В 1988 г. В.-Ю. Хсянг [83] предложил возможный подход для получения объема гиперболического тетраэдра. Решение задачи удалось получить лишь в 1999 г. Ю. Чо и Х. Киму [84], однако предложенная формула была несимметрична относительно перестановки аргументов – двугранных углов. В 2005 г. Дж. Мураками и Ю. Яно [85] получили симметричную формулу. В 2006 году А. Ушиджима [86] предложил геометрическое доказательство формулы Мураками-Яно. Однако и формула Чо-Кима, и формула Мураками-Яно выражают объем гиперболического тетраэдра с помощью 16

дилогарифмических функций или функций Лобачевского, зависящих от двугранных углов и дополнительных комплексных параметров, геометрический смысл которых неочевиден. С другой стороны, в 2005 г. Д.А. Деревнин и А.Д. Медных [87] предложили интегральную формулу, выражающую объем гиперболического тетраэдра через его двугранные углы. Удивительно, но еще в 1907 г. итальянский математик Г. Сфорца [88] нашел другую интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах его матрицы Грама, то есть в терминах двугранных углов. К сожалению, работа [88], опубликованная на итальянском языке, долгое время оставалась забытой. Новое простое доказательство формулы Сфорца дано в недавней работе Н.В. Абросимова и А.Д. Медных [89]. Таким образом, во всех упомянутых работах объем гиперболического тетраэдра выражается через его двугранные углы. В статье Дж. Мураками и А. Ушиджимы [90] предложена формула, которая выражает объем гиперболического тетраэдра через длины ребер, однако это выражение содержит производные от 16 неявных функций, содержащих дилогарифмы, а сами эти производные не выписаны.

Возникает естественный вопрос: можно ли получить некий аналог явной замкнутой интегральной формулы типа Сфорца для объема гиперболического тетраэдра – но в терминах его реберной матрицы Грама? Это и было целью нашего исследования в рамках данного проекта в 2020 году: удалось получить такую формулу, то есть ответ на поставленный вопрос положительный.

Методы. На предыдущем этапе проекта нами уже были установлены критерии реализации тетраэдра общего вида в пространстве Лобачевского в терминах его реберной матрицы, то есть длин его ребер. В отчетном году нами были установлены соотношения в форме теорем косинусов, выражающие двугранные углы через миноры реберной матрицы Грама. Для этого многократно использовалось известное тождество Якоби, связывающее миноры квадратных матриц. Полученные соотношения для углов и длин позволили найти решение в кубатурах для системы дифференциальных уравнений типа Шлефли в частных производных. Таким образом, впервые получена явная замкнутая интегральная формула для объема гиперболического тетраэдра общего вида в терминах длин ребер. Ее можно рассматривать как аналог классической формулы Сфорца – но теперь уже в терминах реберной матрицы Грама.

Результаты и обсуждения. Гиперболический тетраэдр T – это выпуклая оболочка четырех точек (вершин) в пространстве Лобачевского. Обозначим вершины цифрами 1, 2, 3, 4 (рисунок 6.1). Пусть l_{ij} – длина ребра, соединяющего вершины i и j , а θ_{ij} – двугранный угол вдоль этого ребра.

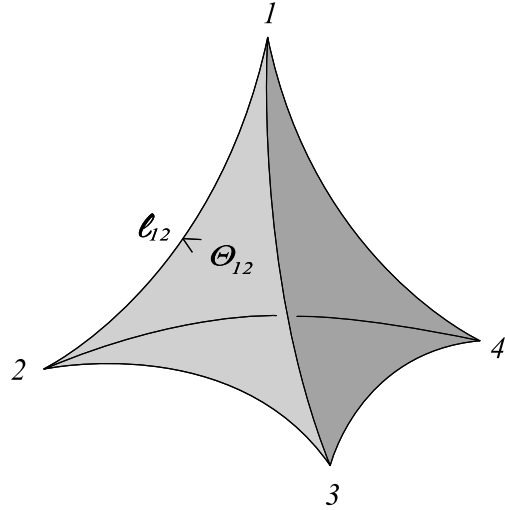


Рисунок 6.1 – Гиперболический тетраэдр T

Реберная матрица Грама $E(T)$ составлена из гиперболических косинусов

длин ребер и определяется как $E(T) = \langle \text{ch} l_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & \text{ch} l_{12} & \text{ch} l_{13} & \text{ch} l_{14} \\ \text{ch} l_{12} & 1 & \text{ch} l_{23} & \text{ch} l_{24} \\ \text{ch} l_{13} & \text{ch} l_{23} & 1 & \text{ch} l_{34} \\ \text{ch} l_{14} & \text{ch} l_{24} & \text{ch} l_{34} & 1 \end{pmatrix}$, где

$l_{ii} = 0$ и $\text{ch} l_{ii} = 1$.

Известно, что гиперболический тетраэдр определяется своей реберной матрицей Грама с точностью до изометрии. Критерий реализации тетраэдра в пространстве Лобачевского в терминах длин ребер был установлен нами на предыдущем этапе проекта.

Теорема 6.1. Компактный гиперболический тетраэдр T существует тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств

(i) $l_{13} + l_{23} \geq l_{12} \geq |l_{13} - l_{23}|$,

(ii) $l_{14} + l_{24} \geq l_{12} \geq |l_{14} - l_{24}|$,

(iii) $f_1 \leq f \leq f_2$, где

$$\text{ch } f_{1,2} = \text{ch } l_{13} \text{ch } l_{24} - (\text{ch } l_{13} \text{ch } l_{12} - \text{ch } l_{23})(\text{ch } l_{24} \text{ch } l_{12} - \text{ch } l_{14}) \text{csch}^2 l_{12} \pm \sqrt{(\text{ch } l_{23} - \text{ch}(l_{13} + l_{12}))(\text{ch } l_{23} - \text{ch}(l_{13} - l_{23}))(\text{ch } l_{14} - \text{ch}(l_{24} + l_{23}))(\text{ch } l_{14} - \text{ch}(l_{24} - l_{23}))}$$

Следующая теорема устанавливает свойства второй матрицы Грама (реберной матрицы) $E(T)$ гиперболического тетраэдра T , и, в частности, дает формулы, выражающие косинусы его двугранных углов через длины ребер.

Теорема 6.2. Пусть T – компактный гиперболический тетраэдр, заданный реберной матрицей E . Тогда имеют место следующие соотношения

- (i) $\det E < 0$,
- (ii) $c_{ii} \cdot c_{jj} > 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- (iii) $\cos \theta_{ij} = \frac{-c_{5-i,5-j}}{\sqrt{c_{5-i,5-i} c_{5-j,5-j}}}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j} E_{ij}$ – ij-кофактор реберной матрицы E .

Основной результат состоит следующем.

Теорема 6.3. Пусть T – компактный гиперболический тетраэдр, заданный реберной матрицей E и $c_{ij} = (-1)^{i+j} E_{ij}$ – ij-кофактор матрицы E . Тогда объем $V=V(T)$ вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_{f_1}^{l_{34}} \left[\frac{t}{-\Delta^{3/2}} \left(\frac{c_{14}(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13})}{c_{11}} + \frac{c_{24}(c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23})}{c_{22}} \right) - \frac{\text{sh } t}{-\Delta^{1/2}} \cdot \left(\frac{l_{24} \text{sh } l_{24} c_{14} + l_{14} \text{sh } l_{23} c_{13}}{c_{11}} + \frac{l_{13} \text{sh } l_{13} c_{23} + l_{23} \text{sh } l_{14} c_{24}}{c_{22}} + l_{12} \text{sh } l_{12} \right) \right] dt$$

где кофакторы c_{ij} и определитель реберной матрицы $\Delta = \det E$ рассматриваются как функции одной переменной l_{34} , обозначенной через t .

Как частный случай, находим формулу для объема правильного гиперболического тетраэдра.

Теорема 6.4. Пусть $T=T(a)$ – правильный гиперболический тетраэдр, все ребра которого имеют длину a , $a \geq 0$. Тогда объем $V=V(T)$ вычисляется по формуле

$$V = \int_0^a \frac{3t \text{ sh } t \text{ ch } t}{(1 + 2 \text{ch } t) \sqrt{(\text{ch } t + 1)(3 \text{ch } t + 1)}} dt.$$

Последняя формула полностью соответствует известным ранее результатам.

Заключение. Впервые получена явная замкнутая интегральная формула для объема гиперболического тетраэдра общего вида в терминах длин его ребер. Ее можно рассматривать как аналог классической формулы Сфорца – но теперь уже в терминах реберной матрицы Грама. Таким образом, все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. По полученным результатам подготовлена статья [А.19]. Результаты прошли апробацию на международных конференциях и исследовательских семинарах:

1) III международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», Мохали-Томск, 3 октября 2020 г. – «On volumes of hyperbolic cone manifolds $7_3^2(\alpha, \beta)$ and $5_2(\alpha)$ » (приглашенный доклад).

2) I Корейско-Российская конференция по теории узлов и смежным темам, Сеул-Пусан-Москва-Томск, 03–06 ноября 2020 г. – «On volumes of hyperbolic cone manifolds $7_3^2(\alpha, \beta)$ and $5_2(\alpha)$ » (приглашенный доклад).

3) Исследовательский семинар «Геометрическая теория функций», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 22 сентября 2020 г. – «Теорема синусов для конического многообразия $m125(m/0, n/0)$ » (приглашенный доклад).

1.7 Математическое моделирование процессов двухфазной фильтрации с использованием схем высокого порядка точности для аппроксимации переноса насыщенности

Введение. Вопрос точности расчётов в современных исследованиях и моделировании процессов многофазной фильтрации представляет собой важную и актуальную математическую задачу, поскольку масштабы исследуемых явлений зачастую не позволяют использовать расчётные сетки с большим количеством элементов. Для увеличения порядка точности схемы, применяемой при аппроксимации конвективно-диффузионного переноса насыщенности, в настоящее время предложен подход, основанный на многократном использовании различного рода ограничителей наклона при вычислении искомой величины на гранях конечных объёмов [91]. Хотя данный метод позволяет получать достаточно точные распределения насыщенности в расчётных областях, его недостатком является ограничения в использовании, обусловленные возможностью реализации только для так называемой IMPES схемы дискретизации по времени (неявной по давлению и явной по насыщенности), что существенно сужает круг задач, для которых он может быть применим. В частности, этот подход невозможно использовать для сжимаемых сред. Кроме того, этот метод налагает существенные ограничения на шаг по времени. В связи с этим возникает необходимость разработки устойчивой схемы высокого порядка точности, которую можно будет использовать для расчётов фильтрационных течений в полностью неявной постановке. При этом желательно, чтобы предложенный подход не увеличивал количество итераций на каждом шаге метода Ньютона, используемого для линеаризации дискретных уравнений, описывающих рассматриваемый процесс.

Целью настоящего исследования являлась разработка схемы для аппроксимации влагонасыщенности на гранях конечных объёмов в задаче вытеснения нефти водой из прямолинейной галереи, которую в последствии возможно будет обобщить на случаи использования для численного моделирования в двух- и трёхмерных областях на неструктурированных расчётных сетках.

Методы. При математическом описании задачи вытеснения нефти водой используются законы сохранения массы и импульса. Уравнение неразрывности для каждой из фаз могут быть записаны в следующем виде:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_w = Q_w \quad (7.1)$$

$$-\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_o = Q_o \quad (7.2)$$

где ϕ это пористость, s – влагонасыщенность, \mathbf{u}_α – скорость фильтрации фазы с номером α , а через $Q_\alpha = q_\alpha / \rho_\alpha$ обозначен источниковый член для соответствующей фазы (ρ_α – плотность). Скорость фильтрации каждой фазы определяется с помощью обобщенного закона Дарси:

$$\mathbf{u}_w = -\lambda_w K \nabla (p - p_c + \rho_w g z) \quad (7.3)$$

$$\mathbf{u}_o = -\lambda_o K \nabla (p + \rho_o g z) \quad (7.4)$$

где $\lambda_\alpha = k_{r\alpha}(s) / \mu_\alpha$ – это мобильность фазы с номером α , $k_{r\alpha}(s)$ – относительная фазовая проницаемость, μ_α – вязкость. Тензор абсолютной проницаемости обозначен через K , p – это давление нефти, p_c – капиллярное давление, g – ускорение свободного падения, а z – вертикальная компонента вектора перемещения.

Относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление определяются по следующим формулам:

$$k_{rw}(s) = \left(\frac{s - s_r}{1 - s_r} \right)^l \quad (7.5)$$

$$k_{ro}(s) = \left(\frac{1 - s - s_{or}}{1 - s_{or}} \right)^m (1 + as) \quad (7.6)$$

$$p_c = 2\rho_w g \frac{(1 - s^2)^{1/2}}{s^2} \quad (7.7)$$

где через s_r и s_{or} обозначены остаточные насыщенности для воды и нефти соответственно. Параметры l , m и a могут быть определены с помощью экспериментальных данных.

Начальные и граничные условия для одномерной расчётной области длины L задаются следующими соотношениями:

$$s(x, 0) = s_r, \quad p(x, 0) = p_0, \quad 0 < x \leq L \quad (7.8)$$

$$s(0, t) = 1 - s_{or}, \quad p(0, t) = p_{\max} \quad (7.9)$$

Для дискретизации по пространству определяющих уравнений (7.1)–(7.4) используется метод конечных объёмов. Чтобы получить схему высокого порядка точности для аппроксимации влагонасыщенности на гранях объёмов, был рассмотрен шаблон, представленный на рисунке 7.1.

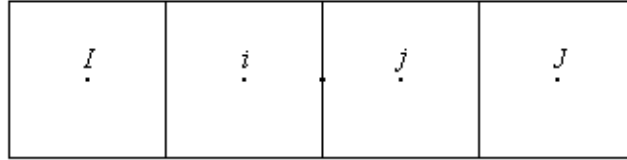


Рисунок 7.1 – Шаблон, используемый для создания схемы

Влагонасыщенность на грани между объёмами с номерами i и j определялась по следующей схеме, предложенной в результате исследований:

$$\tilde{s}_{\alpha,j} = \begin{cases} s_j + \frac{1}{2}(v_j(s_i - s_j) + (1 - v_j)(s_j - s_j)) & \text{if } \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_j < 0 \\ s_i + \frac{1}{2}(v_i(s_j - s_i) + (1 - v_i)(s_i - s_i)) & \text{if } \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_j \geq 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Здесь параметр v_k ($k = i, j$) использовался одновременно для определения порядка аппроксимации, контроля сходимости метода Ньютона и ограничения наклона градиентов насыщенности, вычисляемых с помощью значений в центрах соседних объёмов. Для первого случая (когда $\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_j < 0$), он вычислялся следующим образом:

$$v_j = \begin{cases} 3/4 & \text{if } |s_i - s_j| \leq |s_j - s_j| \\ 0 & \text{if } |s_i - s_j| > |s_j - s_j| \end{cases} \quad (7.11)$$

Для второго случая параметр определялся аналогично. Значение 3/4 соответствует второму порядку аппроксимации.

Результаты и обсуждения. Численные исследования эффективности предложенной схемы были выполнены для двух ключевых задач. В каждой из них использовались следующие значения определяющих параметров: пористость равнялась 0.03, проницаемость – 50 миллиДарси, длина галереи – 1000 м, остаточные насыщенности для воды и нефти – 0.2 и 0.15 соответственно. Максимум давления нефти p_{\max} равнялся 200 бар, начальное значение – 1 бар. Плотность и динамическая вязкость принимались равными 860 кг/м³ и 0.005 Па·с для нефти, 1000 кг/м³ и 0.001 Па·с – для воды.

Первой задачей, для которой было выполнено сравнение предложенной схемы с уже существующими была классическая задача Бакли-Левретта. Так как в этой задаче не рассматриваются гравитационные и капиллярные силы, для неё возможно построение аналитического решения. На рисунке 7.2 можно видеть распределения насыщенности, полученные с помощью предложенной схемы (Higher Order Upwind, HOU), стандартной схемы первого порядка точности (First Order Upwind, FOU), схемы, представленной в работе [91] (High Order MUSCL-type, HOM), и аналитического решения.

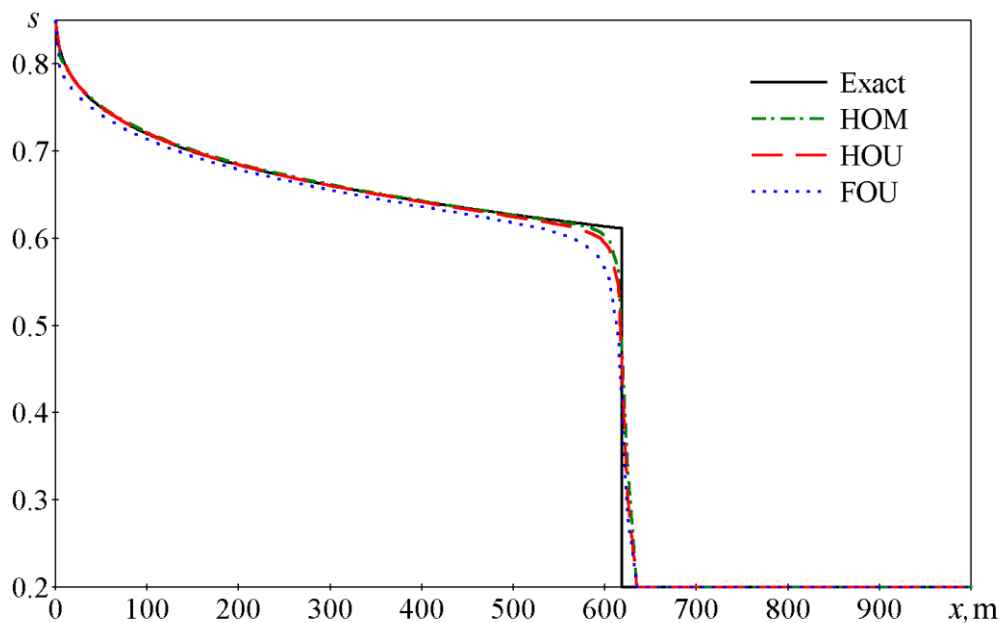


Рисунок 7.2 – Распределения насыщенности, полученные разными методами

Как можно увидеть на рисунке 7.2 схемы высокого порядка точности позволяют получить решения, которые будут значительно ближе к аналитическому распределению. Так ошибка в L_1 норме составила 0.0088879 для метода первого порядка, 0.0027921 для схемы, предложенной в работе [91] и 0.0028558 для подхода, разработанного в результате исследований. Разница между ошибками для методов высокого порядка точности составила 2.23 % против 213.46 % для схемы первого порядка.

Вторая задача представляла собой расчёт течения в прямолинейной галерее, при котором учитывались капиллярные и гравитационные силы. Профили насыщенности, полученные с помощью схемы первого порядка и схемы, предложенной в результате работы, для различных моментов времени представлены на рисунке 7.3.

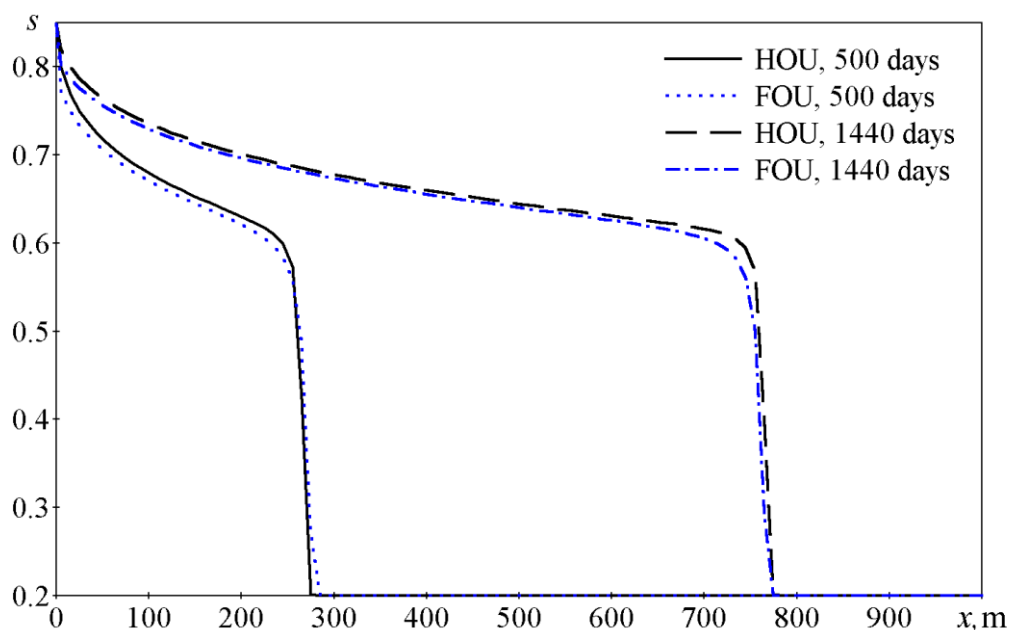


Рисунок 7.3 – Профили насыщенности для различных моментов времени

Очевидно, что гравитационные силы значительно уменьшают скорость перемещения фронта насыщенности. Однако, как и капиллярные силы, этот эффект не меняет существенных различий между решениями, полученными с помощью методов разного порядка, что говорит о важности и эффективности использования более точных схем, таких как предложенная в данной работе.

Заключение. Проведено численное исследование эффективности различных схем для аппроксимации насыщенности на гранях конечных объёмов при решении задач двухфазной фильтрации как с учётом гравитационных и капиллярных сил, так и без него. Предложена схема, которая позволяет получить значительно более точное решение, по сравнению с методом первого порядка. При этом разработанный подход эффективен для полностью неявной постановки и не увеличивает скорость сходимости метода Ньютона, используемого для линеаризации дискретных уравнений. Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.13] и прошли апробацию на конференциях и семинарах:

1) XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томский политехнический университет, Томск, Россия, 21-24 апреля 2020 г. – «Численное моделирование процесса вытеснения нефти водой с использованием монотонной схемы для аппроксимации потоков» (устный доклад).

2) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Схемы высокого порядка точности для аппроксимации переноса насыщенности в задачах двухфазной фильтрации» (устный доклад).

1.8 Исследование структурных свойств группы твинов

Введение. Геометрической косой на n нитях называют набор из n нитей в пространстве, соединяющих n точек на одной прямой с n точками на параллельной прямой, спускающихся сверху вниз монотонно. Примеры кос на трех и четырех нитях изображены на рисунке 8.1.

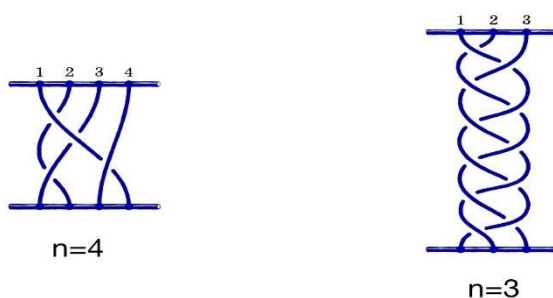


Рисунок 8.1 – Коса на четырех нитях (слева) и коса на трех нитях (справа)

Далее под косой будем понимать класс кос, эквивалентных относительно операции изотопии. На множестве (классов) n -нитиных кос можно определить операцию умножения. Умножение двух кос происходит путем «склеивания» верхних и нижних концов их нитей с одинаковыми номерами. Произведение $a \cdot b$ косы a на n нитях с косой b на n нитях – это коса, полученная из косы a присоединением снизу косы b . Пример произведения двух кос изображен на рисунке 8.2.

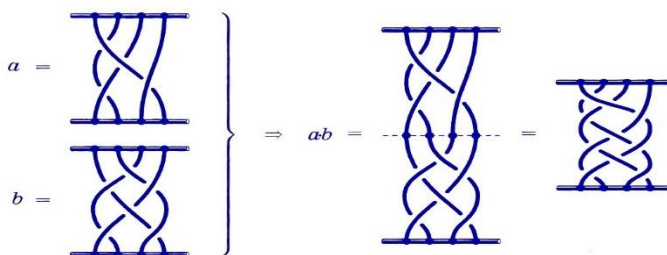


Рисунок 8.2 – Умножение кос

Это умножение ассоциативно и обратимо. Для того, чтобы построить обратную косу нужно зеркально отразить косу относительно горизонтальной плоскости (см. рисунок 8.3). Тривиальная коса, которая играет роль единицы изображена на рисунке 8.4.

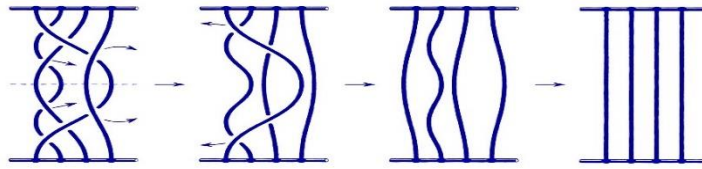


Рисунок 8.3 – Коса и обратная к ней

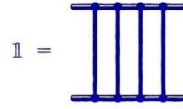


Рисунок 8.4 – Единичная коса

Множество кос на n нитях с определенной таким образом операцией умножения образует группу, которая обозначается символом B_n и называется группой кос на n нитях. При $n = 1$ группа тривиальна. При $n = 2$ - это бесконечная циклическая (абелева) группа. При $n > 2$ эта группа бесконечна и неабелева.

Введем n -нитиевы элементарные косы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и обратные к ним $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$ (см. рисунок 8.5).

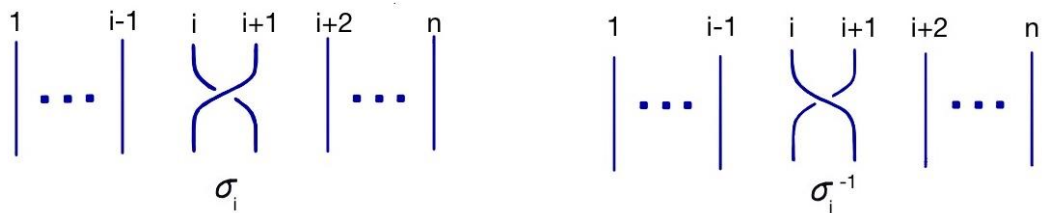


Рисунок 8.5 – n -нитиевы элементарные косы

Косы были строго определены Э. Артином в 1925 году. В работе [92] он дал представление группы кос широко известное в настоящее время. Группа кос B_n , $n \geq 2$ на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \tag{8.1}$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2. \tag{8.2}$$

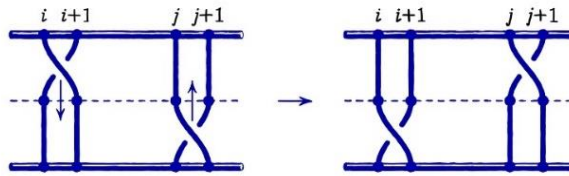


Рисунок 8.6 – Первое соотношение в группе кос

Соотношение (8.1) в группе кос называется дальней коммутативностью (см. рисунок 8.6). При таком преобразовании изотопический тип косы не изменится, однако изменится задающее ее слово в порождающих группы.

Если на некоторой косе рядом находятся три точки попарных пересечений трех различных нитей косы, при этом одна нить косы проходит выше (или ниже) двух других, тогда эту нить можно «протянуть» над (под) двумя остальными, см. рисунке 8.7. Полученная таким образом коса будет изотопна изначальной, хотя запись косы в терминах порождающих группы изменится. Изменение будет записываться в виде соотношения (8.2).

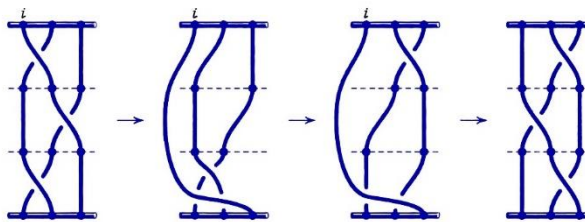


Рисунок 8.7 – Второе соотношение в группе кос

Классическая группа кос так же, как и симметрическая группа, является группой автоморфизмов свободной группы [93].

Крашеной называется коса, которой отвечает тождественная перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, т.е. коса, сохраняющая порядок номеров нитей (см. рисунок 8.8). Удобно

считать, что каждая нить этой косы имеет свой особый цвет, и при умножении таких кос склеиваются нити одного цвета. Очевидно, что крашенные косы образуют группу относительно операции умножения. Группа крашенных кос является подгруппой группы классических кос.

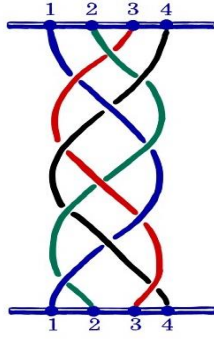


Рисунок 8.8 – Крашенная коса на 4 нитях

Группой крашенных кос P_n называется ядро гомоморфизма группы B_n на группу подстановок S_n , отображающего порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Группа P_n порождается элементами $a_{i,j}$, которые выражаются через порождающие группы кос B_n следующим образом:

$$a_{i-1,i} = \sigma_{i-1}^2,$$

$$a_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Понятие сингулярных кос было независимо введено Дж. Баэсом [93] и Дж. Бирман [94]. Моноид Баеса—Бирман или, как его ещё называют, сингулярный моноид SB_n определяется как моноид с порождающими $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$ и определяющими соотношениями:

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, |i-j| \geq 2,$$

$$\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i, |i-j| \geq 2,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| \geq 2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} = \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-2.$$

При этом элементы σ_i, σ_i^{-1} порождают группу кос.

Р.Фенн Э. Кейман и К. Рурк доказали [95], что моноид Баеса-Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой сингулярных кос: $SB_n \rightarrow SG_n$. Исследование сингулярных кос было мотивировано изучением инвариантов Васильева. С каждым порождающим σ_i можно связать n -нитевую косу, а с τ_i - сингулярную n -нитевую косу в соответствии с рисунком 8.9.

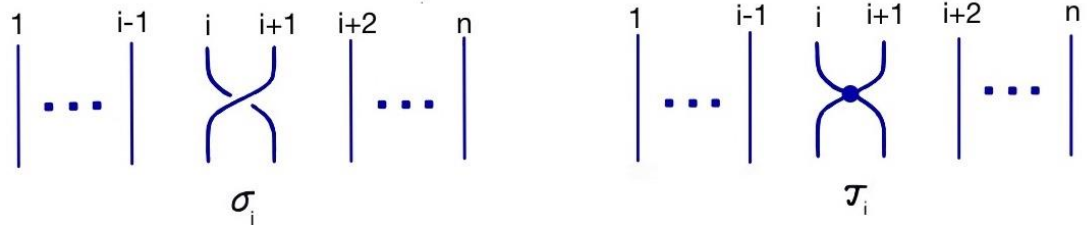


Рисунок 8.9 – Порождающие σ_i и τ_i

Определим отображение $\pi : SG_n \rightarrow S_n$ заданное на порождающих равенствами: $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i, i+1), i = 1, 2, \dots, n-1$. Ядро этого отображения $\ker(\pi)$ будем называть группой сингулярных крашенных кос и обозначать SP_n .

В работе [96] найдены порождающие и определяющие соотношения группы сингулярных крашенных кос на 3 нитях. Исследована алгебраическая структура этой группы. Найдены автоморфизмы группы сингулярных крашенных кос, индуцированные сопряжением порождающих группы сингулярных кос. Доказано, что центр группы сингулярных кос на трех нитях выделяется прямым множителем в подгруппе сингулярных крашенных кос на трех нитях.

Методы. Для нахождения представления группы сингулярных крашенных кос использованы методы комбинаторной теории групп, в частности, метод Рейдемейстера-Шрайера (см. [97]), а для исследования структуры этой группы - методы теории групп.

Результаты и обсуждения. Определим отображение $\pi : SB_n \rightarrow S_n$ заданное на порождающих равенствами: $\pi(\sigma_i) = s_i = (i, i+1), i = 1, 2, \dots, n-1$, $\pi(\tau_j) = 1, j = 1, 2, \dots, n-1$. Ядро этого отображения $\ker(\pi)$ будем называть группой сингулярных крашенных кос и обозначать ST_n .

Лемма 8.1. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \sigma_1^2 & a_{13} &= \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} & a_{23} &= \sigma_2^2 \\ c_{12} &= \tau_1 & c_{13} &= \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} & c_{23} &= \tau_2 \end{aligned}$$

Теорема 8.1. Группа сингулярных крашенных кос ST_3 порождается элементами $a_{12}, a_{13}, a_{23}, c_{12}, c_{13}, c_{23}$ (см. рисунок 8.10) и определяется 8 соотношениями:

$$\begin{aligned} 1. a_{12} c_{12} &= c_{12} a_{12} & 2. c_{12} a_{13} a_{23} c_{12}^{-1} &= a_{13} a_{23} \\ 3. a_{13} c_{13} &= c_{13} a_{13} & 4. a_{12} c_{13} a_{12}^{-1} &= a_{23}^{-1} c_{13} a_{23} \\ 5. a_{23} c_{23} &= c_{23} a_{23} & 6. a_{12}^{-1} a_{23} a_{12} &= a_{13} a_{23} a_{13}^{-1} \\ 7. a_{12} a_{13} a_{12}^{-1} &= a_{23}^{-1} a_{13} a_{23} & 8. a_{12}^{-1} c_{23} a_{12} &= a_{13} c_{23} a_{13}^{-1} \end{aligned}$$

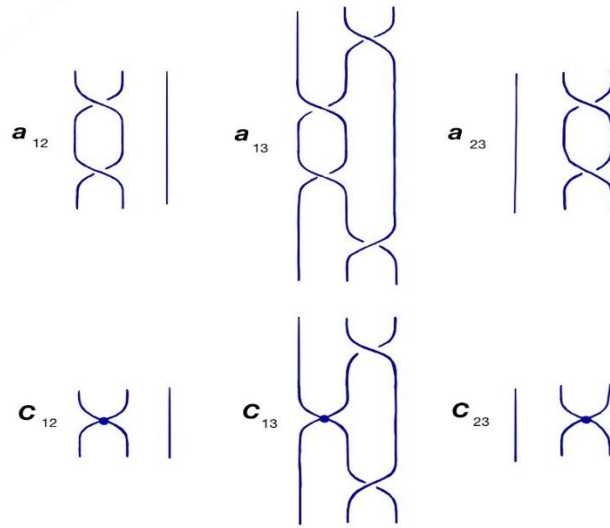


Рисунок 8.10 –Геометрическая интерпретация порождающих ST_3

Теорема 8.2. Группа ST_3 является полупрямым произведением нормальной подгруппы $H = \langle a_{13}, a_{23}, c_{12}, c_{13}, c_{23} \mid a_{13}c_{13} = c_{13}a_{13}, a_{23}c_{23} = c_{23}a_{23}, c_{12}a_{13}a_{23}c_{12}^{-1} = a_{13}a_{23} \rangle$ и бесконечно циклической группы $U_2 = \langle a_{12} \rangle$. H является HNN – расширением с базовой группой $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2 \simeq \langle a_{13}, c_{23}, c_{13}, c_{23} \mid a_{13}c_{13} = c_{13}a_{13}, a_{23}c_{23} = c_{23}a_{23} \rangle$, проходной буквой c_{12} , связанными подгруппами $A = B = \langle a_{13}a_{23} \rangle$ и отождествляющим изоморфизмом $A \rightarrow B$.

Теорема 8.3. Группа ST_3 изоморфна SP_3 .

Заключение. В течение отчетного периода найдены порождающие и определяющие соотношения для группы сингулярных крашенных кос. Установлено, что группа ST_3 изоморфна группе сингулярных крашенных кос на трех нитях SP_3 . Запланированные на 2020 год результаты получены. Доказано, что группа ST_3 является полупрямым произведением нормальной подгруппы H и бесконечно циклической группы, где подгруппа H является HNN – расширением $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$.

Полученные результаты опубликованы в статье [А.6]. Результаты прошли апробацию на следующих международных конференциях и исследовательских семинарах:

1) XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 21-24 апреля 2020 г. Томск, Россия. – «Группы сингулярных крашенных кос на 3 нитях» (приглашенный доклад).

2) III международная конференция «Группы и квадранты в маломерной топологии», Мохали-Томск, 3 октября 2020 г. – «On 3-strand singular pure braid group» (приглашенный доклад).

3) Научный семинар «Математический коллоквиум», Томский государственный университет, Томск, Россия, 24 апреля 2020 г. – «Группа сингулярных крашенных кос на трех нитях» (доклад) <http://rnc.math.tsu.ru>

4) Научный семинар «Геометрическая теория функций», Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 20 октября 2020 г. – «Группа сингулярных крашенных кос на трех нитях» (приглашенный доклад).

5) Научный семинар «Инварианты трехмерных многообразий», Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, 24 ноября 2020 г. – «Автоморфизмы и центр группы сингулярных крашенных кос» (приглашенный доклад).

6) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Группа сингулярных крашенных кос» (устный доклад).

1.9 Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца

Введение. Голоморфное однолистное отображение f верхней полуплоскости $\mathbb{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ на многоугольник Δ с границей, состоящей из отрезков прямых, можно записать с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца [98]. Для решения задачи нахождения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца – прообразов вершин многоугольника Δ при отображении f – разработаны различные методы. В [99-101] дается описание некоторых современных публикаций по данной тематике, и приводятся соответствующие библиографические ссылки.

Метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца, предлагаемый в данной работе, идейно близок к методу П.П. Куфарева [102], получившему различные обобщения, в том числе для отображений на круговые многоугольники [103,104]. При нахождении отображения методом П.П. Куфарева рассматривается семейство отображений канонической области на семейство областей с разрезом, имеющее два ядра. В предлагаемом методе рассматривается семейство отображений полуплоскости на семейство областей более общего вида, имеющее одно ядро, что повышает точность вычислений и упрощает построение конформного отображения.

Методы. Рассмотрим n -угольник Δ_0 . Обозначим его вершины через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$ и углы при этих вершинах соответственно через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, $\alpha_p \in (0,1) \cup (1,2)$ если $A_p^0 \in \mathbb{C}$ и $\alpha_p \in [-2,0]$ если $A_p^0 = \infty$. Образует семейство n -угольников $\Delta(t)$, $\Delta(0) = \Delta_0$, сдвигая вершины многоугольника Δ_0 по закону $A_p^0 + tB_p =: A_p(t)$, $B_p \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$, так,

чтобы углы многоугольника оставались неизменными, и хотя бы одна сторона оставалась на одной прямой. Таким образом, многоугольник $\Delta(t)$ имеет углы $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ при вершинах $A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)$.

Согласно теореме Римана, существует отображение $f: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$, при фиксированном t переводящее верхнюю полуплоскость на многоугольник $\Delta(t)$. Обозначим прообраз вершины $A_p(t)$ многоугольника $\Delta(t)$ при отображении f через $a_p(t)$. Отображение f можно представить с помощью формулы Кристоффеля-Шварца в виде

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = c(t) \prod_{p=1}^n (z - a_p(t))^{\alpha_p - 1},$$

где $c(t) \in \mathbb{C}$. Прообразы вершин $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, и коэффициент $c(t)$ – параметры интеграла Кристоффеля-Шварца – будем называть параметрами отображения f .

В работе [105] получен следующий результат.

Теорема 9.1. Пусть отображение f нормировано так, что

$$f(\infty, t) = A \quad (9.1)$$

где A – некоторая фиксированная точка, принадлежащая границе многоугольника Δ_0 , и композиция $f^{-1}(f(z, t), t)$ имеет на бесконечности разложение

$$f^{-1}(f(z, t), t) = z + \frac{c_1(t)}{z} + \frac{c_2(t)}{z^2} + \dots \quad (9.2)$$

Тогда отображение $f = f(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{f}(z, t) = c(t) \prod_{p=1}^n (z - a_p(t))^{\alpha_p - 1} \sum_{j=1}^n \frac{\dot{a}_j^2(t)(\alpha_j - 1)}{z - a_j(t)},$$

а параметры $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, $t \in [t, T)$, отображения f удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{a}_p(t) + \sum_{j=1, j \neq p}^n (\alpha_j - 1) \frac{(\dot{a}_p(t) - \dot{a}_j(t))^2}{a_p(t) - a_j(t)} = 0, \quad p = 1, \dots, n, \quad (9.3)$$

точка над функцией означает частную производную по t . Причем $c(t) = \text{const}$,

$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)a_j(t) = B$, и можно положить

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) a_j(t) = 0. \quad (9.4)$$

Результаты и обсуждения. Задача определения параметров $a_p(t)$, $p=1, \dots, n$, отображения f с помощью системы дифференциальных уравнений (9.1) решена в трех случаях, описанных ниже. Будем называть их задача 1, 2 и 3.

Во всех трех случаях отображение $f = f(z, 0)$ считается известным, соответственно значения $a_p(0) = a_{p0}$, $p=1, \dots, n$, известны.

Задача 9.1. Определить параметры отображения $f: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$, нормированного условиями (9.1), (9.2) и (9.4). Вершины многоугольника перемещаются по закону $A_p^0 + tB_p =: A_p(t)$, угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p \pi$, $t \in [0, T)$, $p=1, \dots, n$. Вершины $A_p(t)$ попарно не совпадают между собой при $t \in [0, T)$. Пусть $-\infty < a_1(t) < a_2(t) < \dots < a_n(t) < +\infty$, $t \in [0, T)$.

В данном случае решение системы дифференциальных уравнений (9.3) – аналитические функции параметра t .

Теорема 9.2. При условии задачи 9.1 начальные данные $\dot{a}_p(0) = a_{p1}$, $p=1, \dots, n$, системы дифференциальных уравнений (9.3) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} & (a_{p1} - a_{p-1,1}) \left(\frac{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1}{a_{p0} - a_{p-1,0}} \int_0^1 F_p(\xi) d\xi + \sum_{m=1, m \neq p, p-1}^n (\alpha_m - 1) \int_0^1 \xi \frac{F_p(\xi)}{y_{pm}(\xi)} d\xi \right) + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1, p-1}}^n (a_{p-1,1} - a_{k1}) (\alpha_k - 1) \int_0^1 \frac{F_p(\xi)}{y_{pk}(\xi)} d\xi = \frac{B_p - B_{p-1}}{c(a_{p0} - a_{p-1,0})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1}}, \quad p = 2, \dots, n, \\ & \sum_{k=2}^n (a_{11} - a_{k1}) (\alpha_k - 1) \int_0^1 \xi \frac{F_1(\xi)}{y_{1k}(\xi)} d\xi = \frac{B_1}{c}, \end{aligned}$$

где

$$y_{pj}(\xi) = \xi (a_{p0} - a_{p-1,0}) + a_{p-1,0} - a_{j0}, \quad F_p(\xi) = h_p(\xi) \prod_{j=1, j \neq p, p-1}^n (y_{pj}(\xi))^{\alpha_j - 1}, \quad p = 2, \dots, n,$$

$$y_{1j}(\xi) = \xi (1 + a_{10} - a_{j0}) - 1, \quad F_1(\xi) = h_1(\xi) \prod_{j=2}^n (y_{1j}(\xi))^{\alpha_j - 1},$$

$$h_p(\xi) = (\xi - 1)^{\alpha_p - 1} \xi^{\alpha_{p-1} - 1}, \quad p = 1, \dots, n,$$

где $\alpha_0\pi$ – угол при вершине $A = f(\infty, t)$ ($\alpha_0 = 1$ если A принадлежит ребру многоугольника).

Задача 9.2. Определить параметры отображения $f : \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$, нормированного условиями (9.1), (9.2) и (9.4). Семейство многоугольников $\Delta(t)$ имеет только две подвижные смежные вершины $A_1(t) = A_0 + tB_1$, $A_n(t) = A_0 + tB_n$, при $t = 0$ совпадающие между собой и не совпадающие с другими вершинами A_2, \dots, A_{n-1} . Угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p\pi$, $t \in (0, T)$, $p = 1, \dots, n$.

Заметим, что при условии задачи 9.2 система дифференциальных уравнений (9.3) имеет сингулярность в области начальной точки.

Теорема 9.3. При условиях задачи 9.2 система дифференциальных уравнений (9.3) имеет на промежутке $t \in [0, T]$ аналитическое относительно параметра $x = t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}$ решение

$$a_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{pk} t^{\frac{k}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}, \quad p = 1, \dots, n,$$

где a_{pk} , $p = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$, определяются формулами

$$a_{11} - a_{n1} = \left(\left| \frac{B_n - B_1}{c} \prod_{p=2}^{n-1} (a_{10} - a_{p0}) \right|^{1-\alpha_p} \left| \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_n)} \right|^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}, \quad \text{где } \Gamma - \text{ гамма функция,}$$

$$a_{n1}(\alpha_n - 1) + a_{11}(\alpha_1 - 1) = 0, \quad a_{p1} = 0, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

$$a_{1k} = \frac{C_k(\alpha_n - 1) - \sum_{j=2}^{n-1} (\alpha_j - 1) (\gamma_{k-2}^{(1j)} (k^2 - k + 1 + \alpha_1(k-1) - k\alpha_n) + \gamma_{k-2}^{(nj)} (\alpha_n - 1)(2k-1))}{k(k-1)(k+1-\alpha_1-\alpha_n)(k-2+\alpha_1+\alpha_n)},$$

$$a_{nk} = \frac{-C_k(\alpha_1 - 1) - \sum_{j=2}^{n-1} (\alpha_j - 1) (\gamma_{k-2}^{(1j)} (\alpha_1 - 1)(2k-1) + \gamma_{k-2}^{(nj)} (k^2 - k + 1 + \alpha_n(k-1) - k\alpha_1))}{k(k-1)(k+1-\alpha_1-\alpha_n)(k-2+\alpha_1+\alpha_n)},$$

$$a_{pk} = \frac{1}{k(k+1-\alpha_1-\alpha_n)} \sum_{j=1}^n (1-\alpha_j) \gamma_{k-2}^{(pj)}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

где

$$C_2 = 0, \quad C_k = \frac{k(k+1-\alpha_1-\alpha_n)}{b_1^{(n1)}} \sum_{j=1}^{k-2} b_{k-j}^{(n1)} \left((j+1)(k-j)b_{j+1}^{(n1)} - \gamma_j^{(n1)} \right), \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$-\gamma_0^{(1n)} = \gamma_0^{(n1)} = b_1^{(n1)}, \quad \gamma_0^{(pq)} = \frac{(b_1^{(pq)})^2}{b_0^{(pq)}}, \quad p \neq q \text{ и кроме } \gamma_0^{(1n)} \text{ и } \gamma_0^{(n1)},$$

$$-\gamma_k^{(1n)} = \gamma_k^{(n1)} = \frac{1}{b_1^{(n1)}} \left(c_k^{(n1)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(n1)} b_{k+2-j}^{(n1)} \right), \quad k=1,2,\dots,$$

$$\gamma_k^{(pq)} = \frac{1}{b_0^{(n1)}} \left(c_k^{(pq)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(pq)} b_{k+1-j}^{(pq)} \right), \quad p \neq q \text{ и кроме } \gamma_k^{(1n)} \text{ и } \gamma_k^{(n1)}, \quad k=1,2,\dots,$$

$$\gamma_k^{(pp)} = 0, \quad c_k^{(pq)} = \sum_{j=1}^{k+1} j(k+2-j) b_j^{(pq)} b_{k+2-j}^{(pq)}, \quad b_k^{(pq)} = a_{pk} - a_{qk}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Задача 9.3. Определить параметры отображения $f: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, представляющий собой многоугольник Δ_0 с разрезом длины $t|B_0|$ от некоторой точки границы многоугольника Δ_0 до внутренней точки $A_0(t)$ многоугольника Δ_0 . Отображение нормированного условиями (9.1), (9.2) и (9.4). Угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p \pi$, $t \in (0, T)$, $p=1, \dots, n$, угол при вершине $A_0(t)$ равен $\alpha_0 \pi = 2\pi$. Вершины $A_0(t)$ перемещаются по закону $A_0(t) = A_0^0 + tB_0$ и совпадает при $t=0$ с вершинами A_1 и A_n . Вершины A_1, \dots, A_n неподвижны, $t \in [0, T)$. Пусть $-\infty < a_2(t) < \dots < a_n(t) < a_0(t) < a_1(t) < +\infty$, $t \in (0, T)$.

Заметим, что при условии задачи 9.3 система дифференциальных уравнений (9.3) имеет сингулярность в области начальной точки.

Теорема 9.4. При условиях задачи 9.3 система дифференциальных уравнений (9.3) имеет на промежутке $t \in [0, T)$ аналитическое относительно параметра $x = t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n}}$ решение

$$a_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{pk} t^{\frac{k}{\alpha_1 + \alpha_n}}, \quad p=0,1,\dots,n,$$

где a_{pk} , $p=0,1,\dots,n$, $k=1,2,\dots$, определяются формулами

$$a_{11} = \alpha_n \nu, \quad a_{n1} = -\alpha_1 \nu, \quad a_{01} = (\alpha_n - \alpha_1) \nu, \quad a_{p1} = 0, \quad p=2, \dots, n-1,$$

$$a_{12} = \alpha_n (2\alpha_n - 3\alpha_1) \mu, \quad a_{n2} = \alpha_1 (2\alpha_1 - 3\alpha_n) \mu, \quad a_{02} = \left(2(\alpha_n - \alpha_1)^2 - 3\alpha_1 \alpha_n \right) \mu,$$

$$a_{p2} = \frac{1}{a_{p0} - a_{00}} \frac{\alpha_1 \alpha_n}{2} \nu^2, \quad p=2, \dots, n-1,$$

$$a_{0k} \left(k^2 - 4k + 2 + (k-1)(\alpha_1 + \alpha_n) \right) - a_{1k} (2k-1)(\alpha_1 - 1) - a_{nk} (2k-1)(\alpha_n - 1) =$$

$$= (1 - \alpha_1) C_k^{(01)} + (1 - \alpha_n) C_k^{(0n)} + \sum_{j=2}^{n-2} (1 - \alpha_j) \gamma_{k-2}^{(0j)}, \quad k=3,4,\dots,$$

$$\begin{aligned}
& -a_{0k}(2k-1) + a_{1k}(k^2 - k\alpha_1 + \alpha_n(k-1)) - a_{nk}(2k-1)(\alpha_n - 1) = \\
& = C_k^{(01)} + (1 - \alpha_n)C_k^{(1n)} + \sum_{j=2}^{n-2} (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(1j)}, \quad k = 3, 4, \dots, \\
& -a_{0k}(2k-1) - a_{1k}(2k-1)(\alpha_1 - 1) + a_{nk}(k^2 - k\alpha_n + \alpha_1(k-1)) = \\
& = C_k^{(0n)} - (1 - \alpha_1)C_k^{(1n)} + \sum_{j=2}^{n-2} (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(nj)}, \quad k = 3, 4, \dots, \\
& a_{pk} = \frac{1}{k(k - \alpha_1 - \alpha_n)} \sum_{j=0}^n (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(pj)}, \quad k = 3, 4, \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\nu = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{\alpha_1 \alpha_n} \left| \frac{B_0}{c} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{00} - a_{j0})^{1-\alpha_j} \right| \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n}}, \quad \mu = \frac{\nu^2}{2(\alpha_1 + \alpha_n + 1)} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\alpha_j - 1}{a_{j0} - a_{00}},$$

$$C_k^{(pq)} = \frac{1}{b_1^{(pq)}} \sum_{j=1}^{k-2} b_{k-j}^{(pq)} \left((j+1)(k-j)b_{j+1}^{(pq)} - \gamma_j^{(pq)} \right), \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$-\gamma_0^{(qp)} = \gamma_0^{(pq)} = b_1^{(pq)}, \quad p \neq q, \quad p, q \in \{0, 1, n\},$$

$$\gamma_0^{(pq)} = \frac{(b_1^{(pq)})^2}{b_0^{(pq)}}, \quad p \neq q \text{ и кроме } \{\gamma_0^{(pq)} : p, q \in \{0, 1, n\}\},$$

$$-\gamma_k^{(qp)} = \gamma_k^{(pq)} = \frac{1}{b_1^{(pq)}} \left(c_k^{(pq)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(pq)} b_{k+2-j}^{(pq)} \right), \quad p, q \in \{0, 1, n\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\gamma_k^{(pq)} = \frac{1}{b_0^{(pq)}} \left(c_k^{(pq)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(pq)} b_{k+1-j}^{(pq)} \right), \quad p \neq q \text{ и кроме } \{\gamma_k^{(pq)} : p, q \in \{0, 1, n\}\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\gamma_k^{(pp)} = 0, \quad c_k^{(pq)} = \sum_{j=1}^{k+1} j(k+2-j)b_j^{(pq)}b_{k+2-j}^{(pq)}, \quad b_k^{(pq)} = a_{pk} - a_{qk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заключение. Предложен новый метод, позволяющий поэтапно за N шагов определить параметры в интеграле Кристоффеля-Шварца. На k -ом этапе искомое отображение вкладывается в однопараметрическое семейство конформных отображений верхней полуплоскости на семейство многоугольников, получаемое сдвигом одной или нескольких вершин некоторого начального многоугольника при условии сохранения углов. Отображение на начальный многоугольник известно. Задача определения параметров семейства отображений сведена к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены: случай, когда семейство многоугольников и начальный многоугольник имеют одинаковое число вершин (задача 9.1); случай, когда семейство многоугольников имеет две подвижные вершины, совпадающие в начальный момент и не совпадающие с другими вершинами (задача 9.2); и случай, когда семейство

многоугольников представляет собой многоугольник с подвижным разрезом (задача 9.3). Найдено решение системы уравнений относительно параметров методом рядов в случае задач 9.1, 9.2 и 9.3. Метод протестирован на различных частных отображениях. Решение задач 9.1, 9.2 и 9.3 позволяют поэтапно построить конформное отображение на произвольный многоугольник.

По результатам работы по проекту подготовлена статья [А.20] и принято участие в международных конференциях и семинарах:

1) XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия. 21–24 апреля 2020 г. – «Нормировка отображения на бесконечности и хордовое уравнение Левнера» (секционный доклад).

2) Уфимская осенняя математическая школа – 2020, Уфа – «Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца» (секционный доклад).

3) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца» (устный доклад).

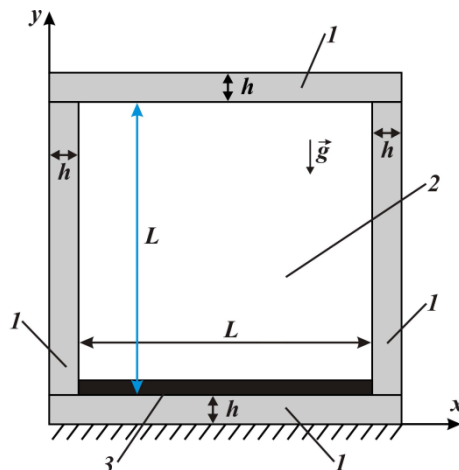
1.10 Математическое моделирование сложного теплообмена в замкнутых областях с источниками тепловыделения

Введение. На сегодняшний день развитие таких отраслей как электроника, энергетика и машиностроение связано с увеличивающейся сложностью архитектуры конструируемых элементов, что естественным образом требует реализации эффективных систем теплоотведения. Учет определенных особенностей и характеристик таких систем крайне необходим для более эффективной эксплуатации устройств (тепловыделяющих элементов) в течение длительного периода времени. Одним из подходов к реализации охлаждения источников тепловыделения – использование пассивной системы охлаждения за счет механизмов конвективно-радиационного теплопереноса. Данный подход обладает множеством достоинств, таких как бесшумность, низкая стоимость технической реализации системы и высокая надежность. В этой связи особое внимание уделяется исследованиям конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых областях при наличии источников тепловыделения [106–108].

Одним из наиболее эффективных методов анализа процессов тепломассопереноса является использование современных подходов вычислительной механики жидкости и газа, позволяющее качественно проанализировать влияние всех значимых факторов (нестационарность, теплофизические свойства ограждающих конструкций, размеры и

интенсивность тепловыделяющих элементов, толщина ограждающих конструкций, оптические свойства среды и др.) на эффективность пассивной системы охлаждения.

В рамках настоящего проекта проведено математическое моделирование турбулентных режимов сложного теплообмена в замкнутой области при наличии источника тепловыделения. Рассматриваемая область представлена на рисунке 10.1.



1 – твердая стенка, 2 – воздушная полость, 3 – источник тепловыделения

Рисунок 10.1 – Область решения рассматриваемой задачи

Внутри области решения находится ньютоновская диатермичная среда (воздух), которая удовлетворяет приближению Буссинеска. На внешних границах (за исключением границы $y=0$, где задано условие теплоизоляции) формулируются граничные условия третьего рода (конвективный теплообмен с окружающей средой). Источник энергии расположен вдоль нижней стенки рассматриваемой области решения. Температура источника энергии, который располагается в зоне основания, считается постоянной. Внутренние поверхности твердых стенок являются диффузно-серыми. Относительно отраженного излучения используются два предположения: отраженное излучение является диффузным и отраженное излучение равномерно распределено по каждой поверхности замкнутой области решения.

Методы. Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс, в приближении Буссинеска в размерных переменных «скорость – давление», имеют следующий вид [А.14]:

в воздушной полости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + g\beta(T - T_0) \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\alpha_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\alpha_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (c_{1\varepsilon} (P_k + c_{3\varepsilon} G_k) - c_{2\varepsilon} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (10.6)$$

внутри твердых стенок

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_w \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (10.7)$$

Здесь $P_k = v_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$ – слагаемое, описывающее

порождение турбулентности за счет сдвиговых напряжений; $G_k = -\frac{g\beta v_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y}$ – слагаемое,

характеризующее диссипацию либо генерацию турбулентной кинетической энергии за счет выталкивающей силы. Далее система уравнений (10.1)–(10.7) формулировалась в переменных «Функция тока - завихренность». Соответствующие начальные и граничные условия подробно описаны в [А.14]. В качестве метода решения использовался метод конечных разностей. Для аппроксимации конвективных слагаемых в рассматриваемых уравнениях использовалась схема с донорными ячейками, для диффузионных – центральные разности. Уравнения параболического типа решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского, путем перехода на промежуточный временной слой. Далее с использованием метода прогонки разрешалась полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений. Для дискретизации уравнения Пуассона применялся пятиточечный шаблон “крест” на основе формул симметричной аппроксимации вторых и первых производных. Полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решалась методом последовательной верхней релаксации. Разработанный метод решения был детально протестирован на множестве модельных задач.

Результаты и обсуждения. Численные исследования краевой задачи проводилось при следующих значениях определяющих параметров: $Pr = 0.7$, $Ra = 10^{10}$, $h/L = 0.1$, $\zeta = 0.82$, $N_{rad} = 528.71$, $\lambda_{1,2} = 100$, $\tilde{\varepsilon}_h = 0-0.8$, $\tilde{\varepsilon} = 0-0.8$. Основное внимание было уделено исследованию влияния степеней черноты поверхностей ограждающих конструкций и источника тепловыделения на распределения как интегральных параметров (средние радиационные и конвективные числа Нуссельта на границах раздела твердое тело – жидкость), так и локальных параметров (линии тока и изотермы). Здесь $\tilde{\varepsilon}$ – степень черноты внутренних поверхностей твердых стен и $\tilde{\varepsilon}_h$ – степень черноты поверхности нагревателя. В рамках проекта также проведено исследование влияния внешних климатических условий, положения и размеров нагревательного элемента на гидродинамику и теплообмен в рассматриваемой области.

Влияние степени черноты поверхностей стенок, а также безразмерного времени на средние конвективные и радиационные числа Нуссельта (на поверхности нагревателя) показано на рисунке 10.2. Когда значения $\tilde{\varepsilon}$ увеличиваются, градиент температуры на поверхности нагревателя уменьшается, и вклад естественной конвекции также ослабевает. Так, при увеличении степеней черноты твердых стенок наблюдается характерное снижение интенсивности конвективного теплообмена (при $\tau = 1000$ среднее конвективное число Нуссельта уменьшается на 4% при изменении $\tilde{\varepsilon}$ от 0,1 до 0,8) при одновременном росте среднего радиационного числа Нуссельта с увеличением значений $\tilde{\varepsilon}$ (при $\tau = 1000$ изменение $\tilde{\varepsilon}$ от 0,1 до 0,8 приводит к увеличению среднего радиационного числа Нуссельта в 1,98 раз).

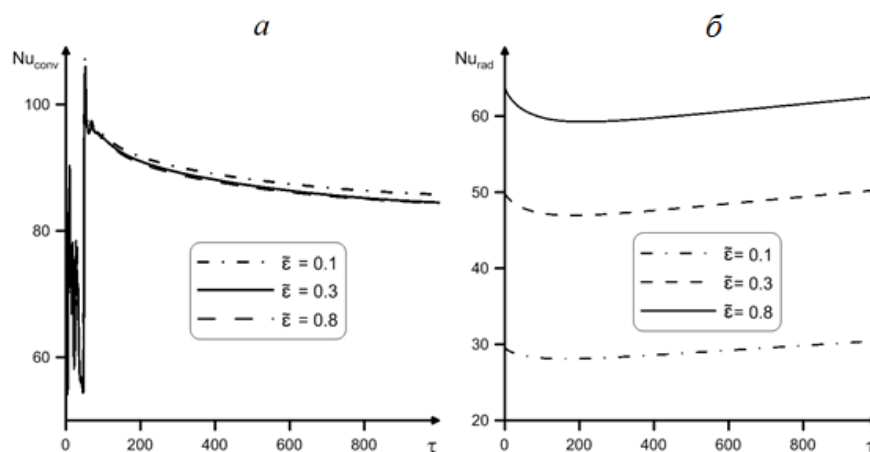


Рисунок 10.2 – Зависимости среднего конвективного (а) и радиационного (б) чисел Нуссельта на поверхности источника тепловыделения от степени черноты поверхностей твердых стенок и времени при $Ra = 10^{10}$, $\tilde{\varepsilon}_h = 0.4$

В результате проведенных исследований также получены корреляционные соотношения для средних чисел Нуссельта:

$$Nu_{conv} = 9.41 \cdot (1 + \tilde{\varepsilon})^{-0.17} \cdot Ra^{0.1} \text{ при } \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_h = 0 - 0.6 \text{ и } Ra = 10^9 - 10^{10};$$

$$Nu_{rad} = 0.49 \cdot \tilde{\varepsilon}^{1.05} \cdot Ra^{0.25} \text{ при } \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_h = 0.2 - 0.6 \text{ и } Ra = 10^9 - 10^{10}.$$

Заключение. В рамках настоящего проекта проведено исследование влияния внешних климатических условий, положения и размеров нагревательного элемента, а также степени черноты поверхностей как ограждающих конструкций, так и источника тепловыделения на гидродинамику и теплообмен в рассматриваемой области. Получены корреляционные соотношения для определения интегрального коэффициента теплоотдачи. В результате проведенных исследований получены распределения локальных и интегральных характеристик течения в рассматриваемой области в зависимости от различных определяющих параметров. Влияния поверхностного излучения на теплообмен оценивалось по среднему радиационному числу Нуссельта. Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.14] и представлены на Научной сессии НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Численный анализ турбулентных режимов конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых областях с источниками тепловыделения» (устный доклад).

1.11 Исследование оптимальных кодов, исправляющих ошибки, а также их связи с теорией графов.

Введение. Транзитивные коды, чья группа автоморфизмов действует также транзитивно на координатных позициях, можно считать обобщением полностью транзитивных кодов, введенных Соле [109]. Отметим, что окрестность таких кодов также является транзитивным кодом, поэтому их конструирование немедленно влечет существование класса других кодов с транзитивным действием группы автоморфизмов на кодовых словах.

Вопрос существования базиса, состоящего из векторов минимального или небольшого веса линейного кода, как компактного способа хранения информации, задающего код большой мощности, представляет интерес с точки зрения теории кодирования, криптографии, а также теории тестов [110]. Отметим, что дуальный код к такому коду обладает свойствами, близкими к кодам с малой плотностью проверок (LDPC коды), которые в настоящее время широко применяются на практике.

Известно, что многие коды, например, расширенный двоичный код Хэмминга или линейные MDS коды имеют базисы, состоящие из векторов минимального веса [111]. В рамках проекта предлагается рассмотреть p -значные расширенные коды БЧХ с конструктивным расстоянием 3, которые при $p=2$ являются двоичными кодами Хэмминга.

Целями исследования является:

1. Конструирование новых координатно-транзитивных пропелинейных расширенных совершенных кодов, новых транзитивных кодов, получаемых из окрестности расширенных совершенных кодов, и нахождение полного инварианта для перечисленных выше кодов;

2. Решение вопроса существования базисов минимального и предминимального веса для расширенных p -значных кодов БЧХ.

Методы. Для построения новых транзитивных кодов использован вариант конструкции для пропелинейных кодов из работы [112] 2019 г. При этом важнейшим свойством для получаемых кодов из работы [112] была координатная транзитивность. Как следствие, была получена бесконечная серия новых координатно-транзитивных пропелинейных расширенных совершенных кодов. Отметим, что всякий такой код влечет существование еще одно транзитивного кода, состоящего из векторов на расстоянии 1 от исходного кода. Таким образом, методология данного исследования восходит к работам 2019 г, опубликованных под эгидой НОМЦ ТГУ.

Отметим, что ранее в [112] для класса расширенных пропелинейных кодов были перечислены классические инварианты - ранги и ядра, однако оставался открытым вопрос описания полного инварианта. В этом году данная задача была решена. А именно, было установлено, что всякий такой код однозначно определяется множеством своих кодовых слов минимального ненулевого веса, то есть своей системой четверок Штейнера. Доказательство этого факта базируется на каскадной природе конструкции [112].

Конструирование серии координатно-транзитивных пропелинейных кодов основывается на установленном критерии в терминах GL-эквивалентности, сходной с EA-эквивалентностью для булевых функций [113]. Теоретически установлено, что всякий код из [112] длины 16 является координатно-транзитивным; с использованием критерия и компьютерных вычислений установлено существование таких кодов длины 32. Таким образом, для бесконечной серии координатно-транзитивных кодов получен базис индукции. Индукционный переход к кодам произвольной длины основан на конструкции прямого произведения для регулярных групп и их автоморфизмов, идейно восходящим к работе [112].

Несуществование базиса из векторов веса 3 для p -значного кода БЧХ $C_{1,2}$ с конструктивным расстоянием 3 при простом p , $p > 3$ доказано анализом системы алгебраических проверочных соотношений. А именно, установлено что слова веса 3 такого кода содержатся в собственном подкоде $C_{1,2,p^2+1}$ кода $C_{1,2}$.

Кодовое слово c аффинно-инвариантного кода называется аффинным порождающим [110] если орбита вектора c действия аффинной группы поля F_{p^m} содержит базис кода. Естественной представляется задача поиска аффинного порождающего минимально возможного веса. Доказано, что ранг аффинного порождающего веса 5 расширенного кода БЧХ с конструктивным расстоянием 3 равен 3. Ранг введен по аналогии с рангом кодового слова циклического кода, предложенным для определения минимального расстояния некоторых классических циклических кодов [111]. Полученное ограничение на ранг неявно использовано при нахождении аффинного порождающего веса 5 для расширения кода $C_{1,2,p^2+1}$. Существование аффинного порождающего получено с использованием подхода Григореску и Кауфмана [110].

Результаты и обсуждение. В утверждении ниже были получены пропелинейные коды из окрестностей кода Нордстрёма-Робинсона.

Предложение 11.1. Пусть N является кодом Нордстрёма-Робинсона и N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 является дистанционным разбиением относительно N . Для всякого i из $\{0, 1, 3, 4\}$ код N_i является пропелинейным.

Ниже через S_τ обозначим пропелинейный расширенный совершенный код, полученный из τ индуцированным действием автоморфизма некоторой регулярной подгруппы общей аффинной группы $GA(r, 2)$ из работы [112]. Критерий для координатной транзитивности рассматриваемых кодов выглядит следующим образом:

Лемма 11.1. Пропелинейный код S_τ является координатно-транзитивным тогда и только тогда когда τ принадлежит двойному смежному классу $GL(r, 2)\tau^{-1}GL(r, 2)$.

Теорема 11.1. Пусть τ и τ' являются подстановками векторного пространства F^r . Тогда коды S_τ и $S_{\tau'}$ эквивалентны тогда и только тогда когда их системы четверок Штейнера изоморфны.

На основе утверждений выше получены новые пропелинейные координатно-транзитивные коды малых длин.

Следствие 11.1. Для всякой подстановки элементов F^3 код S_τ длины 16 является координатно-транзитивным пропелинейным кодом. Существует хотя бы 64 является координатно-транзитивным пропелинейным кодов S_τ длины 32.

Теорема 11.2. Если коды S_τ и $S_{\tau'}$ длин 2^{r+1} и $2^{r'+1}$ являются координатно-транзитивными пропелинейными кодами, полученными из автоморфизмов регулярных подгрупп, то код $S_{\tau|\tau'}$ является координатно-транзитивным пропелинейным кодом длины $2^{r+r'+1}$. Для всякого $r > 2, r \neq 4$ существует пропелинейный координатно-транзитивный код S_τ длины 2^{r+1} .

Таким образом получена бесконечная серия новых транзитивных кодов:

Следствие 11.2. Для всякой длины $2^{r+1}, r > 2, r \neq 4$ существует транзитивный код $\{x: d(x, S_\tau) = 1\}$ длины 2^{r+1} .

Напомним, что циклическим p -значным кодом $C_{a,b,c}$ называется циклический код, чей порождающий многочлен равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов для элементов $\alpha^a, \alpha^b, \alpha^c$, где α - примитивный элемент поля F_{p^m} .

Теорема 11.3.

1. Для всякого простого $p, p > 3$ множество кодовых слов кода $C_{1,2}$ веса 3 содержится в коде $C_{1,2,p^2+1}$.

2. Для всякого простого $p, p > 3$ не существует базиса, состоящего из векторов минимального веса для кода $C_{1,2}$ и его расширения добавлением общей проверки на четность.

Рангом вектора c из $F_p^{p^m}$ назовем размерность векторного пространства над F_p , натянутого на носитель вектора c , то есть $\{\alpha^i: i \in 0, \dots, p^m - 2, c_i \neq 0\}$.

Теорема 11.4. Пусть c является кодовым словом кода $C_{1,2}$ веса 4 и \bar{c} - аффинным порождающим расширения кода $C_{1,2}$, полученным добавлением общей проверки на четность. Тогда \bar{c} имеет вес 5 и ранг 3.

Лемма 11.2. Пусть α - примитивный элемент поля Галуа $F_{p^m}, p, m \geq 3$. Тогда циклический код $C_{1,2}$ длины $p^m - 1$ содержит многочлен $c(x) = 2 + x^i + x^j - 2x^k$, где i, j, k удовлетворяют $\alpha^i = \alpha + 2^{-1}\alpha^2, \alpha^j = -\alpha + 2^{-1}\alpha^2, \alpha^k = 1 + 2^{-1}\alpha^2$.

Кодовое слово, описанное в лемме выше, является аффинным порождающим для расширения кода $C_{1,2}$.

Теорема 11.5. Для любого простого p , $m \geq 3$ существует примитивный элемент α поля Галуа F_{p^m} такой, что слово \bar{c} является аффинным порождающим расширения кода $C_{1,2}$ длины p^m .

Заключение. В 2020 году получена новая конструкция транзитивных кодов, являющихся окрестностью класса расширенных совершенных кодов. Установлено, что 1ая, 2ая и 4ая окрестности кода Нордстрёма-Робинсона являются пропелинейными кодами. Показано, что система четверок Штейнера является полным инвариантом класса расширенных совершенных кодов, полученных ранее в работе [112]. Результаты опубликованы в работе [А.7]. Доказано, что всякий p -значный расширенный код БЧХ с конструктивным расстоянием 3 не порождается множеством своих кодовых слов минимального веса при $p > 3$, и найден явный вид аффинного порождающего веса 5 для таких кодов. Т.е. фактически для хранения и задания кода достаточно одного кодового слова малого веса с точностью до аффинной структуры группы автоморфизмов кода. Данный результат опубликован в работе [А.8].

Результаты доложены на следующих конференциях и семинарах:

1) Уральский семинар по теории групп и комбинаторике, Екатеринбург, Россия, 24–30 августа 2020 г. – «Транзитивные расширенные совершенные коды из регулярных подгрупп группы $GA(r, 2)$ » (секционный доклад).

2) Семнадцатый международный семинар по алгебраической и комбинаторной теории кодирования, АССТ 2020, Болгария, 11–17 октября 2020 г. – «Одноорбитальные аффинные генераторы для расширенных кодов ВСН с расчетным расстоянием три» (секционный доклад).

3) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «О координатной транзитивности класса расширенных совершенных кодов и о базисах кодов БЧХ с конструктивным расстоянием 3 и их расширений» (устный доклад).

1.12 Изучение хороших колец формальных матриц бесконечного порядка

Введение. Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, R – произвольное кольцо. Элемент a кольца R называется k -хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R . Кольцо называется k -хорошим, если каждый его элемент является k -хорошим. Изучение колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами,

началось в 1953–1954 годах, когда Вольфсон [12] и Зелинский [13] независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда $\dim(V) = 1$ и $D = \mathbb{Z}_2$. Это значит, что кольцо линейных преобразований $\text{End}(V)$ порождается аддитивно своими обратимыми элементами. В 1958 году Л.А. Скорняков [14] поставил задачу описания такого рода колец. Независимо от предыдущих работ к этой проблеме пришел Фукс. В [22] он сформулировал вопрос – «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?». За этим последовал ряд статей Стрингалла [114], Фридмана [115], Хилла [23], Кастаньо [116] и других [16]–[20]. В 1973 году Хенриксен [19] описал два широких класса колец порождаемых своими обратимыми элементами. Позже с этими кольцами работали Вамос [20] (он ввел понятие k -хорошего кольца), Сривастава [15]. Имеется несколько статей, посвященных различным k -хорошим кольцам. Так, например, в [20] и [15] получены результаты по k -хорошести регулярных колец фон Неймана, правых самоинъективных колец.

Классический объект в математике – кольцо всех матриц порядка n над некоторым кольцом R . Рассматривают также матрицы бесконечного порядка со значениями в R . Заметим, что запись матриц в виде таблиц – это на самом деле один из способов их представления. Кольцо матриц является кольцом некоторых функций с поточечным сложением и умножением типа свертки. Это касается всех матриц, появляющихся в тексте.

Пусть I обозначает вполне упорядоченное множество индексов. Удобно считать, что I – это начальный отрезок ординалов от 1 до λ . Причем, если I – бесконечное множество, то λ – предельный ординал.

В последнее время активно изучаются так называемые формальные матрицы (по-другому – обобщенные матрицы). Теория колец формальных матриц изложена в книге [117]. Схематично напомним определение таких колец.

Пусть R_1, \dots, R_n – кольца, а M_{ij} – R_i - R_j -бимодуль, причем $M_{ii} = R_i$, где $i, j = 1, \dots, n$. Обозначим через K множество всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij} . Чтобы такие матрицы можно было умножать обычным способом нужно уметь вычислять «произведение» ab со значением в M_{ik} для любых a из M_{ij} и b из M_{jk} .

Этого можно добиться, располагая отображением $M_{ij} \times M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ или, что удобнее, гомоморфизмом бимодулей $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ для всех i, j, k от 1 до n . Следует еще наложить на эти отображения или гомоморфизмы некоторые условия типа ассоциативности. После чего матрицы из K можно складывать и умножать стандартным способом. Говорят, что K – кольцо формальных (или обобщенных) матриц порядка n .

Конечно, можно ввести в рассмотрение формальные матрицы порядка λ или по-другому $(I \times I)$ -матрицы. Именно, пусть $R_i, i \in I$ – кольца, а $M_{ij} - R_i R_j$ -бимодуль, при этом $M_{ii} = R_i, i, j \in I$. Теперь обозначим через K множество всех *конечных по столбцам* матриц (a_{ij}) порядка λ со значениями в бимодулях M_{ij} . Подобно случаю конечного порядка можно задать сложение и умножение таких матриц. В результате получим кольцо K всех конечных по столбцам $(I \times I)$ -матриц.

Только что определенное, а также более общего вида кольцо матриц бесконечного порядка появляются, например, в связи с кольцами эндоморфизмов модулей разложимых в прямые суммы с бесконечным числом слагаемых (см. теорема~14.3[118]).

Методы. В работе были использованы всевозможные методы теории колец. Именно, методы связанные с формальными матрицами и кольцами таких матриц были разработаны японским математиком Киити Мориты в его статье «Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition»[119] и дальше развивались во множестве работ, см. обзорную статью[120]. Методы, касающиеся хороших элементов колец и хороших колец, развивались, как было сказано во введении, с середины прошлого века Вольфсоном[12], Зелинским[13], Скорняковым[14], Фуксом[22], Хенриксеном[19] и другими[15]–[18], [20], [23], [114]–[116].

Результаты и обсуждения.

В «конечном» случае известен следующий результат.

Теорема 12.1. [21] Если K – кольцо формальных матриц порядка n и все кольца R_1, \dots, R_n являются k -хорошими, то K – тоже k -хорошее кольцо.

В «бесконечном» случае удалось получить следующее обобщение теоремы 1[21].

Теорема 12.2 [A.21] Пусть K – кольцо формальных конечных по столбцам $(I \times I)$ -матриц. Предположим, что кольцо R_i является k -хорошим для каждого $i \in I$. В таком случае K – k -хорошее кольцо.

Известная теорема Хенриксена утверждает, что для любого кольца R и любого натурального n неравного 2 кольцо $M(n, R)$ является 3-хорошим (см. [19]). Работа [25] содержит более слабый результат: $M(n, R)$ – 4-хорошее кольцо.

С помощью теоремы 12.2 [A.21] можно усилить теорему Хенриксена.

Следствие 12.1 [A.21] Для произвольного кольца R кольцо конечных по столбцам $(I \times I)$ -матриц над R является 3-хорошим, при $|I| > 1$.

Действительно, если I – конечное множество, то имеем теорему Хенриксена. В случае бесконечного I рассматриваемое кольцо можно считать кольцом блочных матриц над кольцом $M(2, R)$. Последнее кольцо есть 3-хорошее.

Хенриксен привел в [19] пример такого кольца R , что $M(n,R)$ не является 2-хорошим кольцом. В то же время он заметил, что если R – диагонализируемое кольцо, то $M(n,R)$ становится 2-хорошим. Напомним, диагонализируемое кольцо – это такое кольцо, что всякая матрица над R эквивалентна диагональной матрице.

Теперь подобно следствию 12.1 можно вывести следующий результат.

С л е д с т в и е 12.2 [A.21] Для диагонализируемого кольца R кольцо конечных по столбцам $(I \times I)$ -матриц над R является 2-хорошим.

Следствия 12.1, 12.2 можно переформулировать на языке эндоморфизмов модулей.

Прежде напомним об одном известном понятии (раздел~31[19]). Модуль A называется *самомалым*, если образ всякого гомоморфизма $A \rightarrow \bigotimes_{j \in J} A_j$, где все модули $A_j \cong A$ и J – произвольное множество индексов, содержится в сумме конечного числа некоторых модулей A_j .

С л е д с т в и е 12.3 [A.21] 1) Если модуль A является прямой суммой $m > 1$ копий какого-то самомалого модуля C , то его кольцо эндоморфизмов есть 3-хорошее кольцо.

2) В ситуации п. (1) если кольцо эндоморфизмов модуля C является 2-хорошим, то кольцо эндоморфизмов модуля A также будет 2-хорошим.

С л е д с т в и е 12.4 [A.21] 1) Пусть R – произвольное кольцо. Тогда кольцо эндоморфизмов свободного R -модуля F , являющегося прямой суммой $m > 1$ копий модуля R , является 3-хорошим.

2) В ситуации п. (1) если R – диагонализируемое кольцо, то кольцо эндоморфизмов свободного R -модуля будет 2-хорошим.

Утверждение (2) применимо к векторным пространствам над телами. Это приводит к исходному результату на тему 2-хорошести Вольфсона [12] и Зелинского [13]. Можно также дать приложения к кольцам эндоморфизмов некоторых абелевых групп. Ограничимся лишь одним результатом. Используемые при этом понятия можно найти в книге [118].

С л е д с т в и е 12.5 [A.21] Пусть G – вполне разложимая абелева группа без кручения, причем ранг каждой ее однородной компоненты больше или равен двум. Тогда $\text{End } G$ – 3-хорошее кольцо.

З а к л ю ч е н и е. Было доказано, что кольцо формальных конечных по столбцам матриц, все кольца которого, стоящие на главной диагонали, являются k -хорошими, само будет k -хорошим [A.21]. Даны применения этого результата, в частности, к проблеме k -хорошести кольца эндоморфизмов разложимого модуля или абелевой группы [A.21].

Результаты работы представлены в статье [А.21] и на заседании Научной сессии НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Хорошие кольца формальных матриц бесконечного порядка» (устный доклад).

1.13 Спектральные характеристики равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме в областях евклидова пространства

Введение. Спектральная теория эллиптических операторов составляет существенный раздел общей спектральной теории операторов и занимает видное место в математических исследованиях и приложениях математики к физическим теориям. Важнейшей задачей спектральной теории эллиптических операторов является задача нахождения нижних и верхних границ для собственных чисел равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме, (т.е. операторов вида $\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$, где $A(z)$ – симметричная матричная функция с измеримыми компонентами) в евклидовых областях. Такого вида операторы, в частности, оператор Лапласа ($A(z)$ – единичная матрица) возникают в задачах электростатики, теории теплопроводности, геофизики и др. [121, 122]. Решения классических уравнений математической физики основаны на спектральном разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Поэтому проблема исследования собственных чисел для оператора Лапласа и равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме с различными граничными условиями является весьма актуальной.

Целью настоящего исследования являлось получить нижние оценки собственных чисел, а также оценки спектральной стабильности для равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме $\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$ с граничными условиями Неймана в широком классе областей, включающего выпуклые, звездные и фрактальные области. Ранее, классические оценки собственных чисел задачи Неймана для оператора Лапласа, используя метод интегральных представлений, были получены для выпуклых областей в терминах евклидова диаметра области [123]. К сожалению, в областях более сложной геометрической формы, собственные числа задачи Неймана для оператора Лапласа нельзя охарактеризовать в терминах евклидова диаметра области [124]. По этой причине в проекте были предложены новые методы в теории вложения пространств Соболева, основанные на теории операторов композиции в пространствах Соболева и теории квазиконформных отображений, позволяющие получать спектральные оценки равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме с граничными условиями Неймана в выпуклых и невыпуклых областях в терминах квазиконформной геометрии области. Заметим, что в ряде

выпуклых областей наши методы позволяют получить более точные оценки, чем оценки, полученные в [123].

Методы. В ходе выполнения проекта исследовались спектральные характеристики равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме, т.е. операторов вида $\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$, где $A(z)$ – симметричная матричная функция с измеримыми компонентами, определенных в областях евклидова пространства. Данные исследования основаны на геометрической теории операторов композиции в пространствах Соболева. Эти операторы композиции порождаются квазиконформными гомеоморфизмами [125,126]. Операторы композиции позволяют преобразовать спектральную задачу из произвольной области к весовой спектральной задаче в единичном круге. На этом пути спектральные оценки для эллиптических операторов требуют точных оценок норм операторов композиции на пространствах Соболева. Первоначально такой подход был предложен Гольдштейном и Ухловым, как применение теории конформных отображений к теории операторов композиции в пространствах Соболева, позволивший получить нижние оценки для первых нетривиальных собственных чисел оператора Лапласа [127] с граничными условиями Неймана в «конформных регулярных областях» в терминах конформного радиуса области. Развивая данный подход на случай теории квазиконформных отображений, в проекте получены следующие результаты. Установлена связь между операторами композиции в пространствах Соболева и A -квазиконформными отображениями.

Теорема 13.1. Пусть Ω, Ω' – области в \mathbb{C} . Тогда гомеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ является A -квазиконформным отображением тогда и только тогда когда φ индуцирует по правилу композиции $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ изометрию пространств Соболева $L_A^{1,2}(\Omega)$ и $L^{1,2}(\Omega')$:

$$\|\varphi^*(f)|_{L_A^{1,2}(\Omega)}\| = \|f|_{L^{1,2}(\Omega')}\|$$

для любой функции $f \in L^{1,2}(\Omega')$.

Учитывая эту теорему и оценки констант в неравенстве Пуанкаре-Соболева для единичного круга D , получены нижние оценки для первого нетривиального собственного числа равномерно эллиптического оператора в дивергентной форме $-\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$ с граничными условиями Неймана в квазиконформных регулярных областях.

Напомним, что односвязная плоская область Ω называется A -квазиконформной β -регулярной областью, $\beta > 1$, если

$$\|J_{\varphi^{-1}}|_{L^\beta(\Omega)}\| < \infty,$$

где $J_{\varphi^{-1}}(z) = J(z, \varphi^{-1})$ - якобиан квазиконформного отображения $\varphi^{-1} : D \rightarrow \Omega$.

Теорема 13.2. Пусть $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$ и Ω - A -квазиконформная β -регулярная область. Тогда спектр оператора $-\text{div}[A(z)\text{grad}f(z)]$ с граничными условиями Неймана в Ω является дискретным и может быть записан в виде неубывающей последовательности:

$$0 = \mu_0(A, \Omega) < \mu_1(A, \Omega) \leq \mu_2(A, \Omega) \leq \dots \leq \mu_n(A, \Omega) \leq \dots$$

и

$$\frac{1}{\mu_1(A, \Omega)} \leq \frac{4}{\sqrt[\beta]{\pi}} \left(\frac{2\beta-1}{\beta-1} \right)^{\frac{2\beta-1}{\beta}} \|J_{\varphi^{-1}}|L^\beta(\Omega)\|, \quad 1 < \beta < \infty,$$

$$\frac{1}{\mu_1(A, \Omega)} \leq \frac{\|J_{\varphi^{-1}}|L^\infty(\Omega)\|}{(j'_{1,1})^2}, \quad \beta = \infty,$$

где $j'_{1,1}$ - первый положительный нуль производной функции Бесселя J_1 и $J_{\varphi^{-1}}$ - якобиан квазиконформного отображения $\varphi^{-1} : D \rightarrow \Omega$.

Отметим, что Теорема 13.2 уточнена для квазикругов на основе точной версии обратного неравенства Гельдера и оценок констант в условиях удвоения для мер, порожденных якобианами квазиконформных отображений, т.е. имеем

Теорема 13.3. Пусть Ω - K -квазикруг. Тогда

$$\mu_1(A, \Omega) \geq \frac{M(K)}{|\Omega|},$$

где величина $M(K)$ зависит только от коэффициента квазиконформности K области Ω .

Напомним, что область Ω называется K -квазикругом, если она является образом единичного круга D при K -квазиконформном отображении плоскости на себя.

В проекте также решалась задача о спектральной стабильности для равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме с граничными условиями Неймана. Используя метод, основанный на теории операторов композиции в пространствах Соболева и теории квазиконформных отображений, были получены оценки спектральной стабильности для равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме $\text{div}[A(z)\text{grad}f(z)]$ с граничными условиями Неймана для конформной регулярной пары областей в терминах квазигиперболической геометрии.

Заключение. В заключении отметим, что все работы выполнены в полном объеме в соответствии с предусмотренным планом на 2020 год. Все результаты, полученные в проекте, являются новыми, выполнены на высоком научном уровне, соответствуют мировому уровню, являются определяющими в развитии спектральной

теории эллиптических операторов и квазиконформного анализа и опубликованы в двух работах [А.22], [А.23]. Основной вклад результатов проекта в спектральную теорию эллиптических операторов заключается в развитии новых геометрических методов, основанных на теории операторов композиции в пространствах Соболева и теории квазиконформных отображений. Предложенные методы позволяют получать нижние оценки собственных чисел и оценки спектральной стабильности для равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме в широком классе областей, включающий выпуклые, звездные и фрактальные области.

Результаты работы по проекту были представлены на заседании Научной сессии НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «О спектральных характеристиках эллиптических операторов в дивергентной форме в областях с гладкой и негладкой границей» (устный доклад).

1.14 Исследование полей температуры и турбулентности в диффузионном пламени с применением оптических методов

Введение. Диффузионный режим горения топлива является одним из наиболее распространенных режимов горения. Он, как правило, реализуется в условиях развитой турбулентности. Известно, что перемещение турбулентных структур в диффузионном пламени приводит к пульсациям температуры в пламени [128], которые происходят с определенной частотой, связанной с размерами и скоростью движения турбулентных структур в пламени.

В [129] утверждается существование взаимосвязи между воздействиями колебаний давления на зону горения и наличии фазового сдвига между колебаниями давления и скоростью горения. Если работа зоны горения при изменении давления положительна, т.е. выполняется критерий Рэлея, то выделение теплоты должно быть согласовано с колебаниями давления, что в свою очередь приводит к потере устойчивости процесса. В [129] также утверждается, что взаимодействие акустических колебаний с когерентными вихревыми структурами при возникновении и развитии турбулентности в сдвиговых слоях оказывает заметное воздействие на процесс горения и приводятся данные о результатах исследования воздействия акустических колебаний на поющее пламя. Очевидно, что ввиду особого режима горения выбор параметров воздействия на пламя был обусловлен звуковыми колебаниями, вызываемыми поющим пламенем в граничных слоях. В [130] рассматривается дробление вихрей, возникающих в пламени, вследствие процессов диссипации на меньшие объемы, поверхности раздела которых с горячими газами достаточны для поддержания реакции. Следует отметить, что выделение теплоты

происходит в отдельных микрообъемах и соответственно изменение размеров этих микрообъемов должны быть согласованы с колебаниями давления [130].

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования горения жидкого углеводородного топлива (бензин) при воздействии на факел пламени внешних пульсаций давления малой амплитуды.

Методы. Масса жидкого топлива составляла 10 г. В качестве метода регистрации инфракрасного (ИК) излучения пламени для последующей оценки поля температуры в факеле пламени использовался метод ИК термографии. Для регистрации ИК излучения применялась инфракрасная камера JADE J530SB с узкополосным фильтром с полосой пропускания 2.5 – 2.7 мкм длин волн. Для данного оптического фильтра использовались калибровки завода изготовителя, а его использование обусловлено рекомендациями [131]. Генератором инфразвука служил низкочастотный динамик 25-ГД-26 с мягким подвесом, на который подавался синусоидальный сигнал, сформированный генератором сигналов специальной формы Г6-28, предварительно усиленный при помощи усилителя LV 103. Дополнительно температура в пламени контролировалась термопарой типа К для нахождения эффективного коэффициента излучения пламени. Для оценки высоты факела пламени производилась запись процесса горения в видимом диапазоне длин волн, при помощи камеры Canon LEGRIA HF R86.

Топливо диффузионно сжигалось в емкости диаметром 0.15 м, установленной на контрольно-измерительных весах с термоизолирующей подложкой. Регистрирующая аппаратура располагалась на удалении 1.5 м. Расстояние от источника колебаний до пламени составляло 0.2 м.

Полученные в результате съемки термограммы обрабатывались с использованием программного обеспечения «Altair». Спектры изменения температуры в пламени по центральному сечению факела были получены с использованием программы «TempSpectrum-v.1», а для анализа спектра изменения температуры во всей регистрируемой области была разработана специализированная программа.

Для анализа распределения температурных неоднородностей в рабочей области кадра была разработана программа, позволяющая производить покадровую обработку изображений с 8-и битной градацией серого цвета. Обработка производилась в пакете прикладных программ MATLAB, с использованием инструментов по работе с изображениями «Image processing toolbox».

Результаты и обсуждения. На рисунке 14.1 приведен спектр изменения температуры в пламени при горении бензина при отсутствии внешних воздействий.

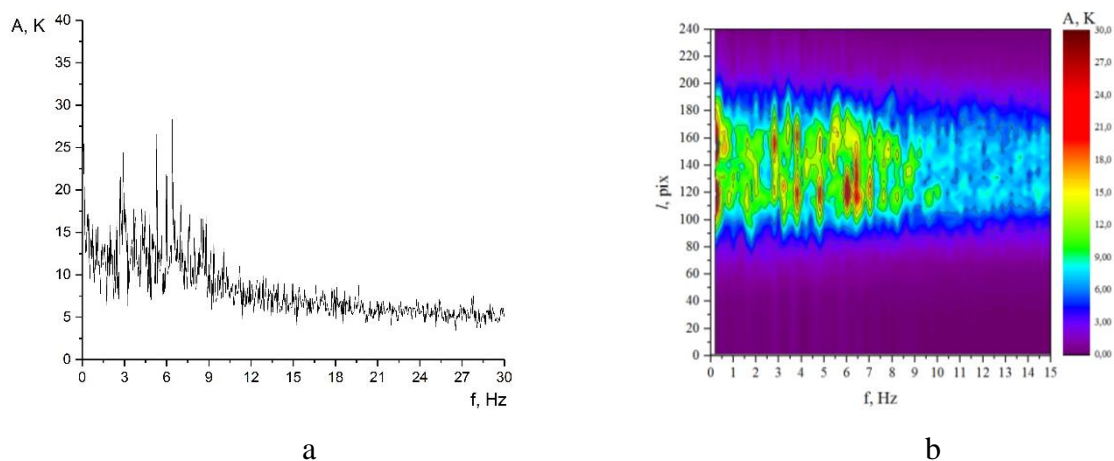
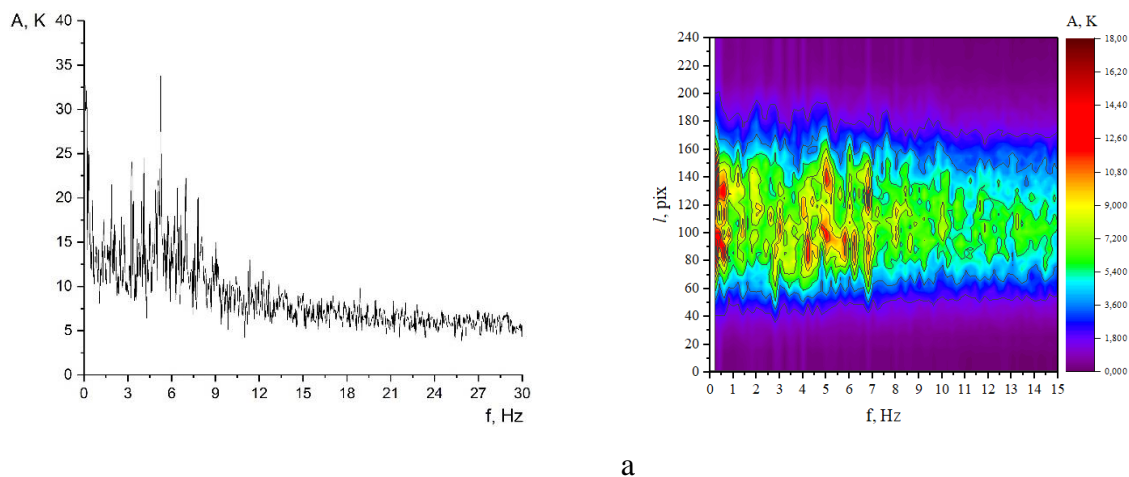
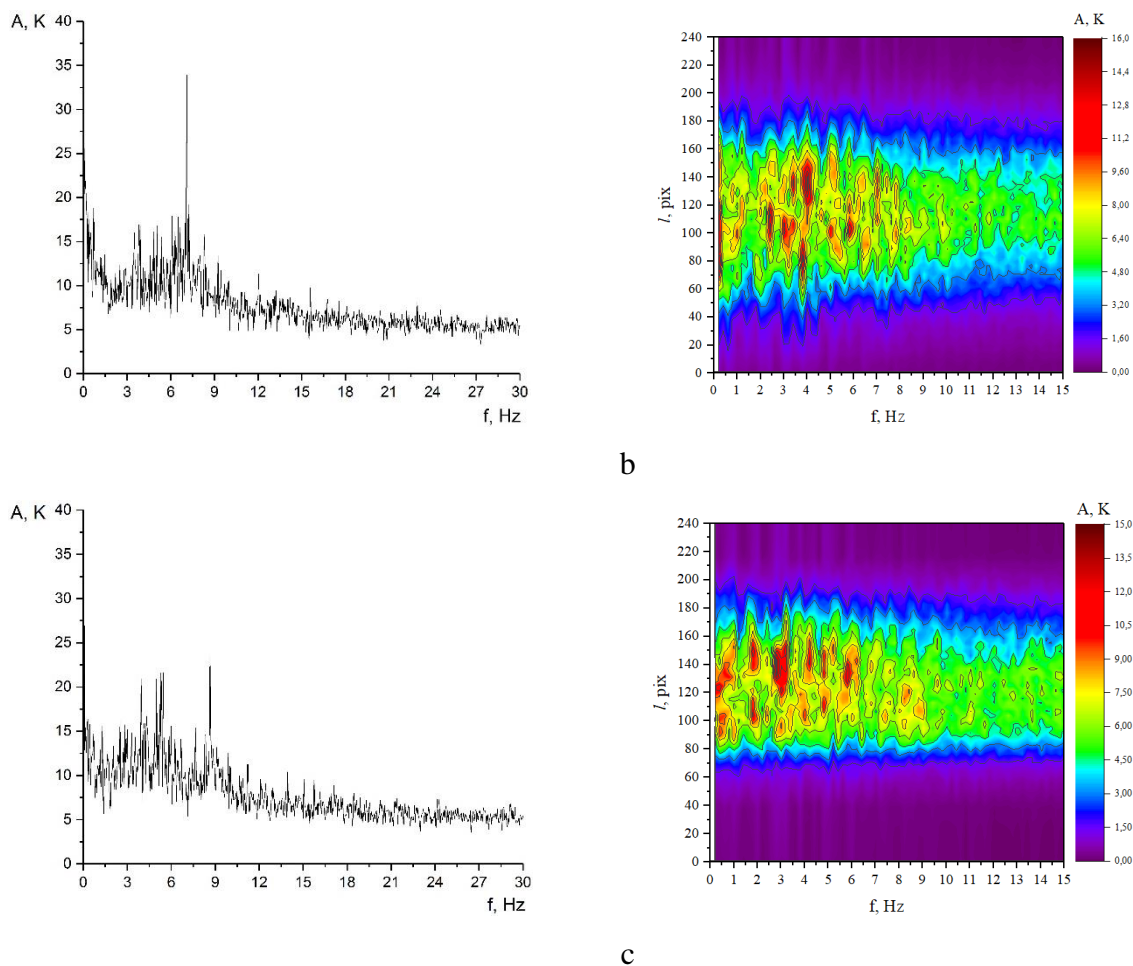


Рисунок 14.1 – Спектр изменения температуры в пламени, образующемся при диффузионном горении бензина без внешних воздействий в центральном сечении факела пламени (a) и во всей регистрируемой области (b)

Следует отметить, что для данного топлива можно выделить характерный частотный интервал (3 – 9 Гц), который характеризуется высокой амплитудой изменения температуры.

На рисунке 14.2 представлены спектры изменения температуры факела пламени, при воздействии на него звуковых колебаний с частотами 5.2 Гц, 7.1 Гц, 8.7 Гц в центральном сечении факела и по всей регистрируемой области.





a) – 5.2 Гц, b) – 7.1 Гц; c) – 8.7 Гц

Рисунок 14.2 – Спектры изменения температуры в пламени при воздействии инфразвуковых колебаний

На спектре изменения температуры, который был получен для всей рабочей области кадра (рисунок 14.2, правый столбец), можно заметить неравномерное распределение очагов пульсаций температуры большой амплитуды. При этом максимальная амплитуда для данных спектров значительно отличается от тех, которые были получены по центральному сечению факела пламени. Такое различие можно объяснить увеличением количества анализируемых точек на термограмме с последующим усреднением.

Анализ данных, полученных при съемке процесса горения в видимом диапазоне длин волн, показал тенденцию увеличения высоты факела с увеличением частоты внешних пульсаций давления.

На рисунке 14.3 приведены зависимости скорости убыли массы топлива от времени при воздействии на процесс горения пульсациями внешнего давления с различной частотой.

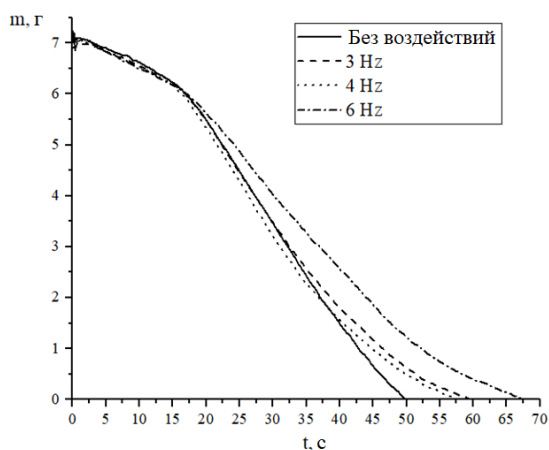


Рисунок 14.3 – Изменение массы топлива при воздействии инфразвуковых колебаний

Из рисунка 14.3 следует, что пульсации давления вносят изменение в структуру факела пламени, ухудшая перемешивание горючих газообразных продуктов с окислителем, что приводит к увеличению времени горения.

З а к л ю ч е н и е. Из анализа рисунков 14.2 и 14.3 можно сделать вывод, что при определенных частотах воздействия, возникает интенсификация горения топлива, которая сопровождается ростом амплитуды пульсаций температуры в пламени с частотами, близкими к частоте воздействия. Этот феномен можно объяснить, как интенсификацию горения в отдельных турбулентных структурах вследствие улучшения перемешивания летучих горючих компонент с окислителем из внешней атмосферы, так и за счет возникновения механического резонанса.

Были выявлены характерные режимы работы внешнего источника возмущений (частота: 2.8 Гц, 3.3 Гц, 4.9 Гц, 5.2 Гц, 6.2 Гц, 6.3 Гц, 6.5 Гц, 7.1 Гц, 7.2 Гц, 7.7 Гц, 8.0 Гц, 8.4 Гц, 8.7 Гц, 9.1 Гц, 12 Гц), при которых наблюдается значительное увеличение амплитуды пульсации температуры.

На основании выводов работы можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.16]. Результаты прошли апробацию на конференциях и семинарах:

1) XXVI Международном симпозиуме «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы», ИОА СО РАН, г. Москва, Россия, 6–10 июля 2020 г. – «Исследование влияния пульсаций давления на характеристики горения жидких топлив» (стендовый доклад).

2) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Исследование полей температуры и турбулентности в диффузионном пламени с применением оптических методов» (устный доклад).

1.15 Численное исследование ламинарных режимов естественной конвекции в замкнутых областях на основе решёточного метода Больцмана и метода конечных разностей

Введение. Непрерывное развитие сферы цифровизации повлекло за собой ряд нетривиальных задач, требующих эффективного решения. Одной из таких задач является отведение излишков тепла из замкнутых блоков, которые представляют собой все современные элементы радиоэлектронной техники. В настоящий момент времени уже разработан ряд эффективных систем охлаждения электронной техники, однако такие системы как правило применяются только к узкому классу приборов, либо их применение связано с определёнными рисками. Пассивные системы охлаждения не являются самыми эффективными с точки зрения объёмов отводимого тепла, однако они имеют и свои преимущества – не требуют регулярного обслуживания, дешевизна установки, отсутствие рисков, связанных с режимами их работы, а также возможность использования в самых сложных геометрических блоках.

В настоящем исследовании проведён численный анализ нестационарных режимов естественной конвекции в замкнутых квадратных областях, с целью разработки эффективной пассивной системы охлаждения, а также оценки влияния формы нагревательного элемента на особенности теплообмена в рассматриваемой области. Кроме того, данная задача была решена на основе двух численных методик – метода конечных разностей и решёточного метода Больцмана.

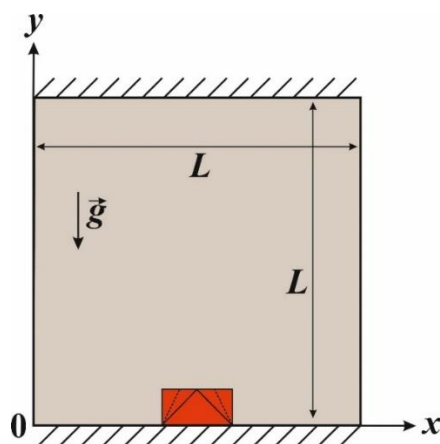


Рисунок 15.1 – Область решения задачи

Область исследования представлена на рисунке 15.1. Считается что внутри полости находится вязкая несжимаемая жидкость, удовлетворяющая приближению Буссинеска. На вертикальных стенках поддерживается постоянная минимальная температура T_c , горизонтальные стенки считаются адиабатическими. Внутри полости, в центре нижней стенки, располагаются источники энергии квадратной, треугольной и трапециевидной

формы. Температура внутри нагревателей была равна T_h , и являлась максимальной во всей расчётной области.

Методы. Представленная выше задача была численно решена на основе метода конечных разностей (МКР) и решёточного метода Больцмана (РМБ). При решении задачи методом конечных разностей используется классическое уравнения Навье-Стокса, а также уравнение энергии. В представленной работе, для ускорения процессов расчёта были использованы преобразованные функции – функция тока и вихрь. Кроме того, система уравнений решалась в безразмерном виде [132]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Ra}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (15.3)$$

Обезразмеривание данных уравнений было проведено с помощью следующих комплексов:

$$X = x/L, Y = y/L, \tau = t\sqrt{g\beta\Delta T/L}, U = u/\sqrt{g\beta\Delta TL}, V = v/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \\ \Theta = (T - T_c)/\Delta T, \Psi = \psi/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \Omega = \omega\sqrt{L/g\beta\Delta T}, \Delta T = T_h - T_c$$

Здесь X, Y – Декартовы безразмерные координаты; τ – безразмерное время; Θ – безразмерная температура; Ψ – безразмерная функция тока; U, V – безразмерные компоненты вектора скорости; Ω – безразмерная завихрённость скорости, $Ra = g\beta\Delta TL^3/\nu\alpha_f$ – число Рэлея (β – коэффициент объёмного теплового расширения; ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, L – длина полости, ΔT – разность температур, α_f – температуропроводность жидкости). $Pr = \nu/\alpha_f$ – число Прандтля.

Начальные условия:

$$\Psi(X, Y, 0) = \Omega(X, Y, 0) = \Theta(X, Y, 0) = 0;$$

$$\text{Внутри источника энергии: } \Theta = 1;$$

Граничные условия:

На вертикальных стенках $X = 0, X = 1$:

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0$$

На горизонтальных стенках $Y = 0, Y = 1$:

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

На поверхности источника энергии:

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0$$

В случае применения решётчного метода Больцмана, необходимо решить кинетическое уравнение вида:

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] + \Delta t F_i c_i$$

где $f_i^{eq}(x, t) = w_i \rho \left(1 + \frac{u \cdot c_i}{c_s^2} + \frac{(u \cdot c_i)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2} \right)$ – функция локального равновесного

распределения, w_i – весовые коэффициенты: $w_0 = \frac{4}{9}$, $w_{1-4} = \frac{1}{9}$, $w_{5-9} = \frac{1}{36}$, $c_s^2 = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t^2}$ – скорость

звука, $F_i = 3w_i \rho g_y \beta (T - T_{avg}) c_i$ – сила тяжести.

При решении неизотермической задачи воспользуемся подходом DDF, т.е. будем использовать две функции распределения (f_i и g_i) для определения макроскопических параметров. Таким образом добавится еще одно уравнение вида:

$$g_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(r, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} (g_i - g_i^{eq})$$

где $g_i^{eq} = w_i T \left(1 + 3 \frac{c_i u}{c_s^2} \right)$ – функция локального равновесного распределения для определения энергии.

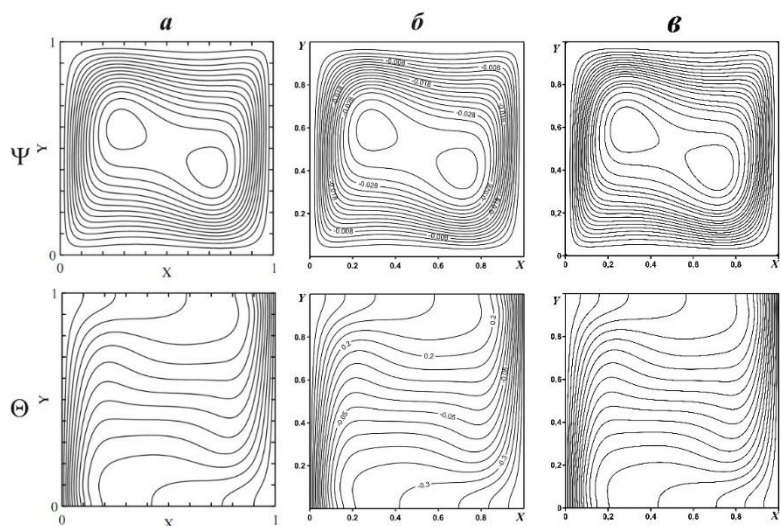
Связь макроскопических функций с функциями распределения выражается следующими равенствами:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \quad \rho u = \sum_{i=0}^8 f_i c_i, \quad T = \sum_{i=0}^8 g_i, \quad \text{где параметр } i \text{ обуславливается выбором}$$

структуры решётки, на которой производится решение.

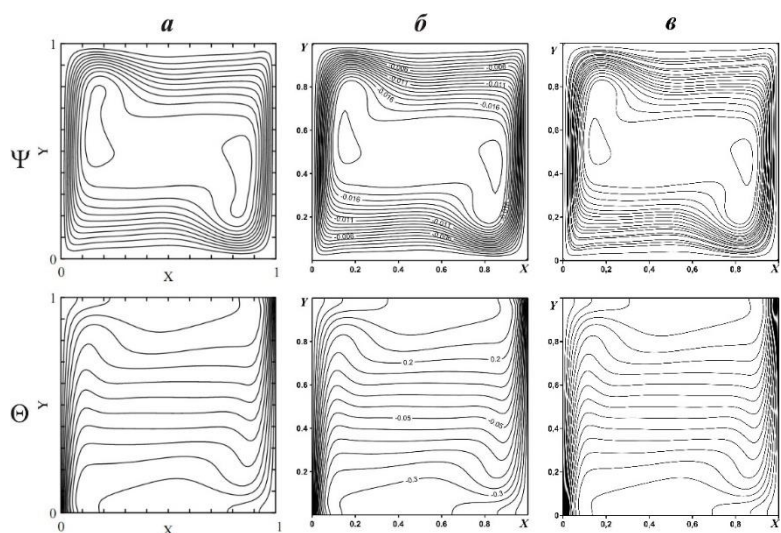
Времена релаксации τ_f и τ_g определяются как $\nu = c_s^2 \left(\tau_f - \frac{\Delta t}{2} \right)$ и $\alpha = c_s^2 \left(\tau_g - \frac{\Delta t}{2} \right)$ соответственно [133].

Представленные методы решения были протестированы на модельной задаче конвективного теплообмена в замкнутой квадратной дифференциально обогреваемой полости. Полученные результаты были сравнены с результатами других авторов и представлены на рисунках 15.2, 15.3:



а) – результаты [134], *б)* – результаты, полученные методом конечных разностей,
в) – результаты, полученные решеточным методом Больцмана

Рисунок 15.2 – Изолинии функции тока Ψ и изотермы Θ для $Ra=10^5$



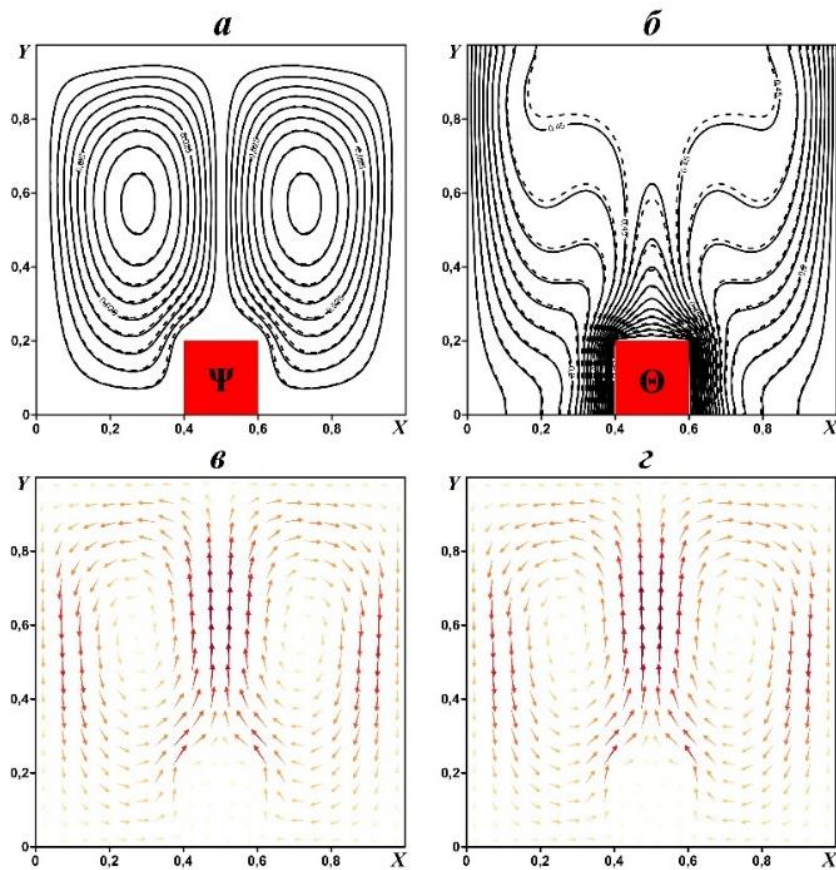
а) – результаты [134], *б)* – результаты, полученные методом конечных разностей,
в) – результаты, полученные решеточным методом Больцмана

Рисунок 15.3 – Изолинии функции тока Ψ и изотермы Θ для $Ra=10^6$

Результаты и обсуждения. Решение представленной краевой задачи было проведено при значениях определяющих параметров: число Рэлея $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$, число Прандтля $Pr = 0.7$ а также при трёх геометрических формах источника энергии – прямоугольной, треугольной и трапецевидной.

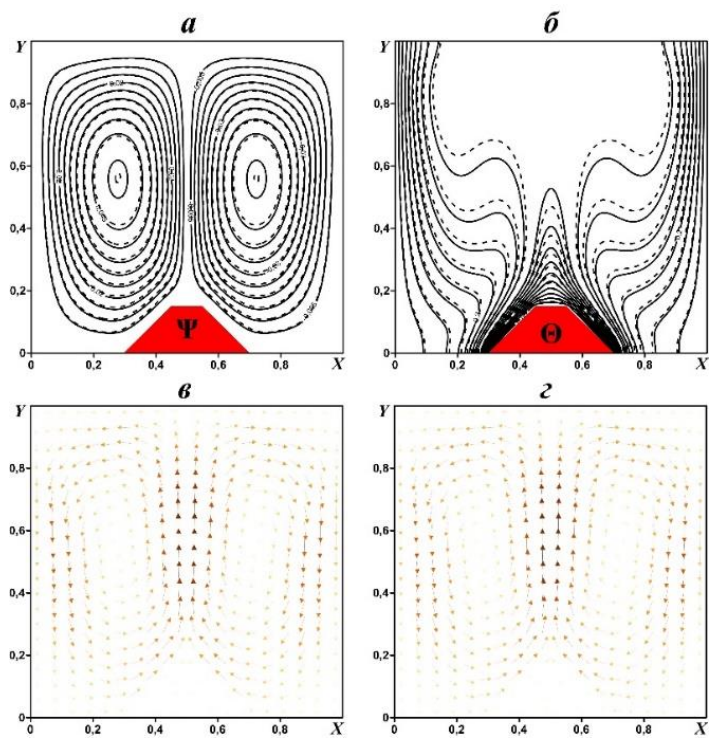
Влияние геометрической формы нагревателя на распределения линий тока и температуры при фиксированном числе Рэлея, равном 10^5 , а также на поле скорости представлено на рисунках 15.4–15.6. Как можно заметить из рисунков, вне зависимости от

формы источника тепловыделения внутри рассматриваемой области формируются две конвективные ячейки, характеризующие восходящие потоки в центре полости и нисходящие вблизи охлаждающих стенок. Изменение формы нагревателя сказывается оказывает влияние на структуру конвективных ячеек, в особенности, вблизи поверхности источника тепла, вследствие наличия угловых точек. Искривление линий тока вблизи угловых точек нагревателя приводит к снижению интенсивности движения внутри конвективных ячеек.



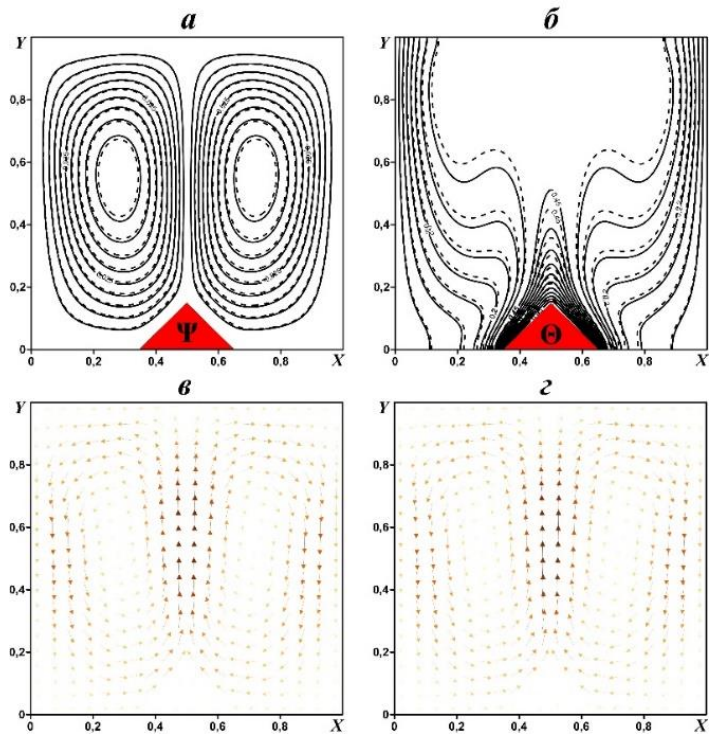
a) – поля функции тока, *б)* – поля температур, *в)* – поле скорости LBM,
г) – поле скорости МКР

Рисунок 15.4 – Сравнение результатов МКР (сплошные линии)
и LBM (пунктирные линии)



a) – поля функции тока, *б)* – поля температур, *в)* – поле скорости LBM,
г) – поле скорости МКР

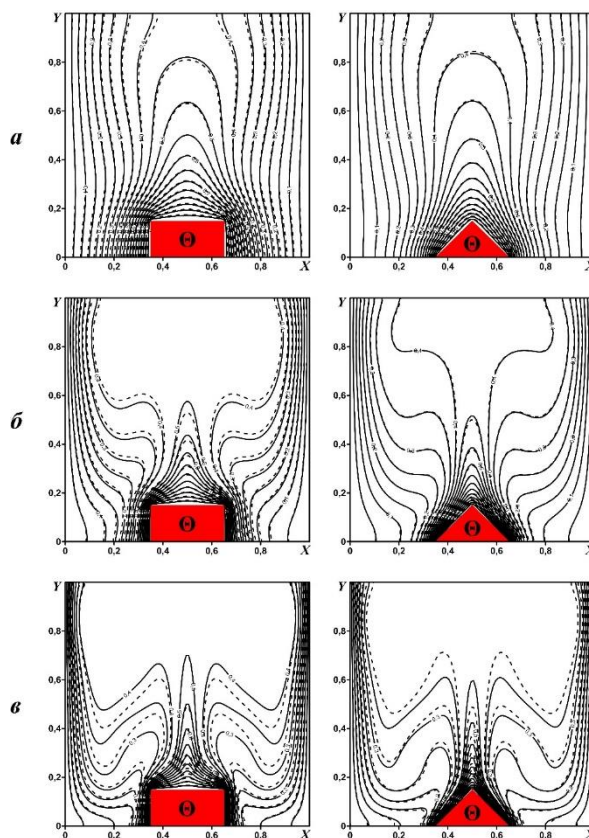
Рисунок 15.5 – Сравнение результатов МКР (сплошные линии)
и LBM (пунктирные линии)



a) – поля функции тока, *б)* – поля температур, *в)* – поле скорости LBM,
г) – поле скорости МКР

Рисунок 15.6 – Сравнение результатов МКР (сплошные линии)
и LBM (пунктирные линии)

На рисунке 15.7 представлен сравнительный анализ методов полей температур, полученных различными численными методиками при различных числах Рэлея. Из рисунка видно, что полученные результаты достаточно хорошо согласованы между собой, однако с ростом числа Рэлея растёт и отличия в значениях, что может быть обусловлено выбором структуры решёток в решёточном методе Больцмана, а также типом граничных условий. Увеличивая количество связей внутри решётки, или применяя граничные условия более высокого порядка, можно корректировать получаемые результаты.



а) – $Ra = 10^4$, б) – $Ra = 10^4$, в) – $Ra = 10^4$, г) – поле скорости МКР

Рисунок 15.7 – Сравнение полей температуры (Θ) полученных методом конечных разностей (сплошные линии) и решёточным методом Больцмана (пунктирные линии)

З а к л ю ч е н и е. В результате проведённых исследований были получены распределения поля температур и линий тока в широком диапазоне чисел Рэлея, а также для различных геометрических форм нагревательного элемента. Полученные результаты говорят о возможности регулирования тепловыми режимами, путём изменения геометрических форм источника энергии. Проведён сравнительный анализ численных методов. В рамках работы по проекту была подготовлена статья [А.25]. Полученные в

процессе научных исследований результаты были представлены на всероссийских и международных конференциях и семинарах:

1) XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия. 21–24 апреля 2020 г. – «Математическое моделирование трехмерных задач естественной конвекции методом решеточных уравнений Больцмана. Сравнительный анализ различных подходов к решению пространственных задач» (секционный доклад).

2) Всероссийская конференция с элементами научной школы для молодых учёных XXXVI «Сибирский теплофизический семинар», посвящённый 70-летию академика Алексеенко Сергея Владимировича, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. 5–7 октября 2020 г. – «Использование решеточного метода Больцмана в пространственных задачах естественно-конвективного теплообмена в замкнутых областях с локальными источниками энергии различных форм» (секционный доклад).

3) Международная конференция «III Международная конференция “Границы промышленной и прикладной математики”-2020», Национальный технологический институт, Джайпур, Индия. 21–22 декабря 2020 г. – Influence of the lattice type and boundary conditions of the lattice Boltzmann method on the accuracy of solving natural convection problems in closed cavities» (секционный доклад).

4) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Численное моделирование плоских и пространственных задач конвективного теплообмена решёточным методом Больцмана» (устный доклад).

1.16 Построение параллельного метода численного решения трехмерного уравнения переноса для мезомасштабной метеорологической модели

Введение. Вопросы экологии являются наиболее актуальными в современной реальности. Процесс урбанизации и ускорение технологического прогресса приводят к повышенным темпам роста загрязнения атмосферного воздуха над городами, что отрицательно воздействует на окружающую среду и здоровье человека. В то же время развитие вычислительных технологий и компьютерной техники позволяет использовать инструменты математического моделирования для изучения и решения различных задач экологии, в том числе и качества атмосферного воздуха.

Основу большинства математических моделей механики сплошных сред и гидрометеорологии, исследующих процессы загрязнения воздуха, составляют неоднородные нестационарные трехмерные уравнения «конвекции-диффузии», которые

описывают изменение таких параметров, как плотность, компоненты скорости, температура, концентрация, турбулентность.

Для решения подобных уравнений применяются уже хорошо изученные: методы конечных разностей, конечного объема или конечных элементов. Вне зависимости от выбранного метода исходное дифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений большой размерности. Таким образом, для получения результатов моделирования может понадобиться большое количество времени, что может негативно отразиться на их актуальности. Возможность ускорить процесс получения решения описанной выше системы дает применение современной многопроцессорной и многоядерной вычислительной техники, снабженной сопроцессорами или графическими ускорителями [135].

Разнообразие в архитектуре и компоновке высокопроизводительных вычислительных систем порождает разнообразие инструментов для построения параллельных программ. На сегодняшний день в области научных вычислений самыми популярными и узнаваемыми для написания параллельных программ являются технологии MPI, OpenMP и OpenACC/CUDA. Это подталкивает исследователей к оценке перспективности использования разных подходов и их комбинации для решения своих задач.

Периодически появляются работы по исследованию эффективности использования технологии распараллеливания MPI в сравнении с различными гибридными вариантами MPI+OpenMP, MPI+CUDA. Гибридные алгоритмы построены как комбинация двух технологий параллельного программирования. Библиотека передачи сообщений MPI обычно используется для взаимодействия между вычислительными узлами кластера. Распараллеливание внутри одного вычислительного узла выполняется с использованием технологии программирования для компьютеров с общей памятью OpenMP или на каждом вычислительном узле дополнительно задействуется сопроцессор/видеокарта с помощью технологии CUDA/OpenACC.

Целью данной работы было проведение вычислительных экспериментов и выбор оптимального с точки зрения быстродействия способа распараллеливания (MPI, OpenMP, CUDA) численного метода решения уравнения переноса на вычислительной системе с общей памятью и графическим ускорителем.

Характеристики вычислительной системы: два процессора Intel(R) Xeon(R) Silver 4214 CPU @ 2.20GHz, с 192 Гб оперативной памяти и двумя графическими ускорителями NVidia RTX2080 Ti.

Полученные результаты будут использованы при создании параллельной версии, развиваемой в Томском государственном университете мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения TSUNM3 (Tomsk State University Nonhydrostatic Mesoscale Meteorology Model) для прогнозирования опасных погодных явлений и качества атмосферного воздуха над городом. Мезомасштабная модель TSUNM3 прогнозирует составляющие скорости ветра и температурно-влажностные характеристики в пограничном слое атмосферы на 50 вертикальных уровнях (до 10 км) для площади 200x200 км с вложенной областью 50x50 км (шаг сетки 1 км с центром в городе Томск). Математическая формулировка модели TSUNM3 включает одиннадцать нестационарных трехмерных неоднородных уравнений «конвекции-диффузии» и несколько замыкающих алгебраических соотношений.

Методы. Рассматривается процесс распространения газообразной инертной примеси от точечного источника в идеализированной области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с горизонтальными размерами 50 на 50 км и высотой 0.6 км. Источник примеси находится в центре области исследования на некоторой высоте над землей. Предполагается, что примесь не поглощается почвой и может свободно покидать область исследования.

Процесс распространения примеси можно описать, используя обобщенное трехмерное дифференциальное уравнение конвективно-диффузионного переноса:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho W \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_{\Phi}, \quad (16.1)$$

где t, x, y, z – время и координаты (ось Oz направлена вертикально вверх); U, V, W – компоненты вектора скорости, удовлетворяющего условию соленидальности; ρ – плотность; K_{xy}, K_z – коэффициенты турбулентного обмена; S_{Φ} – источниковый член.

В качестве граничных условий для уравнения (16.1) на всех границах задаются простые условия Неймана (производная по нормали к поверхности равна нулю):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (16.2)$$

В качестве начального условия используется нулевое значение концентрации примеси во всей области исследования:

$$\Phi(0, x, y, z) = 0. \quad (16.3)$$

Для дискретизации используется декартовая равномерная по горизонтальным направлениям и сгущающаяся к поверхности Земли сетка. Аппроксимация дифференциальной задачи (16.1)–(16.3) выполнена методом конечного объема со вторым

порядком аппроксимации по времени и пространству. Для обеспечения второго порядка точности по времени используется комбинация неявной схемы Кранка-Николсон для вертикальной диффузии и явной схемы Адамса-Бэшфорда для остальных слагаемых уравнения (16.1). Для получения конечно объемного аналога дифференциальной задачи каждое слагаемое уравнения (16.1) интегрируется по каждому конечному объему.

Неявная аппроксимация для вертикального диффузионного переноса позволяет избежать жесткого ограничения на шаг интегрирования по времени. Результатом приближенного интегрирования является система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей следующего вида:

$$a_{i,j,k} \Phi_{i,j,k-1}^{n+1} - b_{i,j,k} \Phi_{i,j,k}^{n+1} + c_{i,j,k} \Phi_{i,j,k+1}^{n+1} = d_{i,j,k};$$

$$i = \overline{1, Nx}; j = \overline{1, Ny}; k = \overline{1, Nz}; n = 1, 2, 3, \dots$$
(16.4)

Здесь $a_{i,j,k}$, $b_{i,j,k}$, $c_{i,j,k}$, $d_{i,j,k}$ - коэффициенты, вычисляющиеся явно в результате выполнения приближенного численного интегрирования уравнения. Выбранный способ аппроксимации по времени позволяет использовать при численном решении экономичный метод прогонки по вертикальной координате. Величина шага интегрирования по времени τ выбиралась из условия устойчивости разностной схемы. Аппроксимация конвективных членов уравнения переноса выполняется с использованием монотонизированной противопотоковой схемы MLU Ван Лира [136].

Программная реализация алгоритма численного решения уравнения переноса выполнена на языке программирования C++. Ядро вычислительной части алгоритма содержит два цикла по i и j перебирающих последовательно все узлы на плоскости xOy . Для каждого узла (i, j) выполняются отыскание численного решения в вертикальном направлении с использованием метода прогонки (рисунок 16.1).

```

1 For для шагов по времени
2
3 /* Циклы по пространственным координатам x и y */
4 For по i от 1 до Nx с шагом 1
5   For по j от 1 до Ny с шагом 1
6
7     /* Отыскание решения вдоль i-й, j-й вертикальной линии
8     методом прогонки */
9     For по k от 1 до Nz с шагом 1
10      Расчет коэффициентов a, b, c, d для разностного

```

```

11    уравнения (7). При вычислениях используется решение
12    с предыдущего шага по времени C0, C00;
13    Вычисление прогоночных коэффициентов P[k], Q[k]
14
15    For по k от Nz до 1 с шагом -1
16    C[i][j][k] ← P[k] * C[i][j][k+1] + Q[k];
17
18    For по i от 1 до Nx с шагом 1
19    For по j от 1 до Ny с шагом 1
20    For по k от 1 до Nz с шагом 1
21    C[i][j][k] ← C0 [i][j][k]
22    C0[i][j][k] ← C00[i][j][k]

```

Рисунок 16.1 – Упрощенное представление алгоритма численного решения рассматриваемой задачи

Оценка времени работы программной реализации выполнена для случая моделирования переноса примеси от постоянно действующего точечного источника в области с горизонтальными размерами (L) 50 на 50 км и высотой (H) 0.6 км. Источник примеси смещен относительно центра области исследования на $0,007L$ и $0,007L$ по осям Ox и Oy соответственно и расположен на высоте $0,0101H$. Компоненты скорости принимались постоянными: $U = 1 \text{ м/с}$, $V = 1 \text{ м/с}$, $W = 0 \text{ м/с}$. Коэффициенты диффузии также принимались постоянными $K_{xy} = K_z = 100 \text{ м}^2/\text{с}$. Шаг по времени τ выбирался равным 6 сек, а время окончания моделирования 5000τ . Расчет проводился на сетке $256 \times 256 \times 32$. Среднее время счета последовательной программы составило 644,5 сек. Точность проведения расчета контролировалась по известному аналитическому решению рассматриваемой задачи [137].

После отладки и верификации последовательной программы выполнено ее распараллеливание с использованием следующих технологий параллельного программирования: OpenMP, MPI и CUDA.

Результаты и обсуждения. Распараллеливание программы с помощью технологии OpenMP осуществлялось путем вставки директив компилятора в исходный код последовательной программы. OpenMP-программа может быть использована как последовательная, так как директивы OpenMP игнорируются последовательным компилятором. Для исполнения разработанного последовательного алгоритма в

многопоточном режиме достаточно добавить перед вычислительными циклами по i , j директиву, указывающую на параллельное исполнение следующего за ней блока:

```
3  /* Циклы по пространственным координатам x и y */
   #pragma omp parallel for private (P, Q, j, k)
4  For по  $i$  от 1 до  $N_x$  с шагом 1
   #pragma omp parallel for private (P, Q, k)
5  For по  $j$  от 1 до  $N_y$  с шагом 1
```

При расчетах получено, что распараллеливание двух вложенных циклов дает такие же результаты, как и распараллеливание только внешнего цикла. Использование ключа SCHEDULE с параметрами STATIC, DYNAMIC, GUIDED не дает ускорения по сравнению с распараллеливанием по умолчанию.

Параллельное программирование с использованием библиотеки OpenMP, можно без преувеличения считать простым с точки зрения сложности применения.

В данной работе при применении технологии MPI в качестве основного подхода распараллеливания выбрана двумерная (2D) декомпозиция сеточной области на подобласти. При разработке параллельной программы используется ряд функций MPI для создания двумерной декартовой логической топологии, создания пользовательских типов данных для обеспечения эффективной пересылки между процессами, а также функции MPI_Isend() и MPI_Irecv() для проведения парных неблокирующих пересылок значений сеточной функции в соседние подобласти двумерной XY-декомпозиции сеточной области.

Выбор в пользу двумерной декомпозиции сделан потому, что 2D-декомпозиция являются более перспективной в сравнении с 1D-декомпозицией с точки зрения масштабирования на большое количество задействованных процессов [138]. В тоже время 3D декомпозиция не подходит для решения данной задачи, так как метод прогонки плохо поддается распараллеливанию.

Выбор двумерной геометрической декомпозиции подразумевает распределение каждому процессу, задействованному в вычислениях, некоторой сеточной подобласти со всеми неизвестными, принадлежащими ей. В разностной схеме в горизонтальной плоскости используется девятиточечный шаблон крест, поэтому для расчета в приграничных узлах каждой области требуются данные с соседней подобласти. Здесь используется стандартный прием с созданием фиктивных ячеек [139] (рисунок 16.2). Важно отметить, что MPI-распараллеливание требует значительно больше времени на разработку параллельной программы

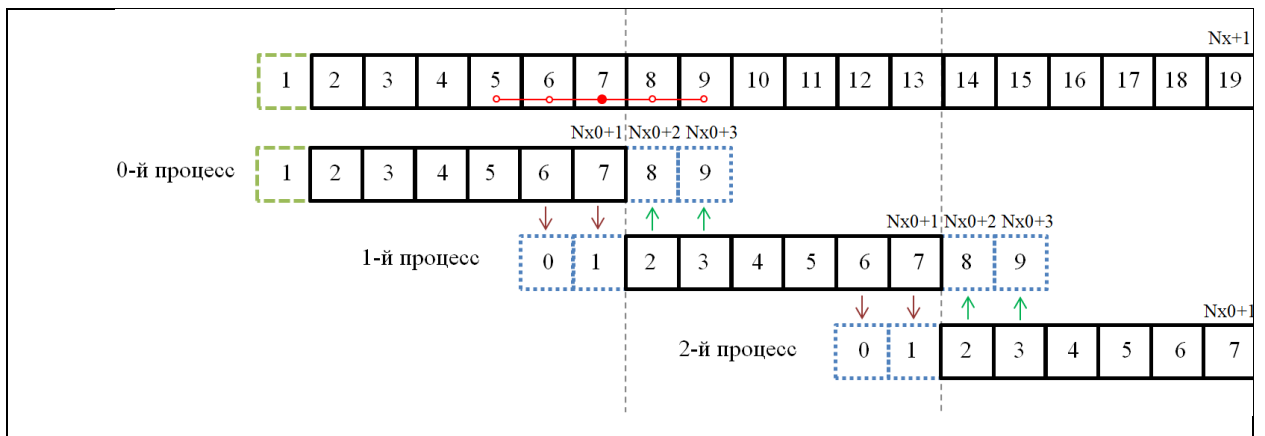


Рисунок 16.2 – Иллюстрация создания фиктивных ячеек и пересылки данных.

В таблице 2 представлено ускорение выполнения параллельной OpenMP и MPI программ при использовании от 1 до 48 потоков/процессоров. Результаты показывают, что при использовании OpenMP и задействовании всех вычислительных потоков доступных на сервере можно ускорить процесс получения решения в 17,3 раза, а при использовании MPI – в 18,1 раз.

Таблица 2 – Ускорение работы параллельных программ в зависимости от числа задействованных расчете потоков/процессов.

	1	2	4	8	16	24	32	48
OPENMP	1,0	2,0	3,8	7,1	13,5	16,5	14,6	17,3
MPI	1,0	2,0	3,9	7,4	13,7	17,6	13,8	18,1

CUDA-алгоритм решения задачи состоял из следующих этапов:

- 1) Выделение необходимого количества памяти хостом на девайсе (GPU).
- 2) Копирование данных массивов из памяти хоста в память устройства.
- 3) Запуск с хоста основного расчетного ядра (kernel) для каждого шага по времени.
- 4) Выполнение расчетного ядра на устройстве.
- 5) Копирование полученных результатов из памяти устройства на хост.

Использование технологии параллельного программирования CUDA для реализации рассматриваемого алгоритма позволяет получить решение задачи за 16,6 секунды. В это же время 36,7 секунды — это наилучший результат, полученный при использовании всех вычислительных ресурсов сервера «Thor» с помощью рассмотренных технологий параллельного программирования.

З а к л ю ч е н и е . Результаты расчетов решения нестационарной 3D задачи переноса примеси с помощью полунявной разностной схемы на структурированной сетке размером более 2 миллионов ячеек показали, что ускорение и эффективность OpenMP-программы

практически не уступает MPI-программе. Однако параллельная реализация программ с использованием технологии OpenMP является более простой, поэтому при решении вычислительных задач на системах с общей памятью предпочтительным является применение технологии OpenMP.

Использование технологии параллельного программирования CUDA и графической карты NVidia RTX2080Ti позволяет получить решение за 16,6 секунды. Использование технологии CUDA выгодно применять для обработки большого числа параллельных потоков. Если вычислительный алгоритм эффективно распараллеливается с использованием технологии OpenMP, то с большой вероятностью алгоритм можно эффективно распараллелить с использованием технологии CUDA.

Использование технологий параллельного программирования MPI/OpenMP и CUDA позволяет ускорить процесс получения решения примерно в 18 и 38 раз, соответственно.

Полученные результаты опубликованы в статье [A.17]. Результаты прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях и семинарах:

1) Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», Томск, Россия, 12-15 мая 2020 г. – «Исследование влияния температурной неоднородности на структуру турбулентного течения в уличном каньоне» (секционный доклад).

2) Международная конференция «9th International Young Scientists Conference in Computational Science», Университет Крита, Ираклион, Греция, 5-13 сентября 2020 г. – «Parallel implementation of a numerical method for solving a three-dimensional transport equation for a mesoscale meteorological model» (секционный доклад).

3) Научная сессия НОМЦ ТГУ, Томск, 18–19 декабря 2020 г. – «Построение параллельного метода численного решения трехмерного уравнения переноса для мезомасштабной метеорологической модели» (устный доклад).

2 Образовательная составляющая

2.1 Научная кооперация

Сотрудники НОМЦ участвуют в научной кооперации практически по всем направлениям исследований.

Традиционным стало участие экспертов из научно-образовательных учреждений России в качестве пленарных докладчиков на еженедельном научном семинаре «Математический коллоквиум». В 2020 г. на семинаре выступили следующие иногородние докладчики: А.Н. Абызов (Казань), В.Г. Бардаков (Новосибирск), Т.Р. Насыбуллов (Новосибирск), Д.Т. Тапкин (Казань), С.Г.-Ц. Цыдыпов (Улан-Удэ).

Большое количество российских и зарубежных специалистов выступило с пленарными докладами на научных конференциях НОМЦ (см. подраздел 2.2). Приведем список некоторых из приглашенных пленарных докладчиков: А. Гилл (Индия), К. Гонгопадхья (Индия), Манприт Сингх (Индия), С. Матвеев (Челябинск), А.Д. Медных (Новосибирск), Р. Мишра (Индия), А. Мукерджи (Индия), Н. Нанда (Индия), М.В. Нецадим (Новосибирск), М. Прабхакар (Индия), Махендер Сингх (Индия), М.А. Гузев (Владивосток), И.А. Дынников (Москва), Д.В. Миллионщиков (Москва), С.К. Нечаев (Москва), Д.В. Паршин (Новосибирск), С.Б. Тихомиров (Санкт-Петербург), А.К. Цих (Красноярск), А.И. Шафаревич (Москва), Я.Р. Эфендиев (Якутск), Нгуен Тху Конг (Вьетнам), Суён Чой (Южная Корея), Руичжи Хуанг (Китай), Фей Хан (Сингапур), Джинхён Пак (Южная Корея), Пинг Ли (Китай), Донгюн Сео (Южная Корея), Хоанг Ань (Вьетнам), Чанчжэн Ли (Китай), Дайсукэ Кишимото (Япония), Вы Тху Нхо Куон (Вьетнам), Ян Су (Китай), Гочжэнь Ван (Китай), Келин Ся (Сингапур), Ю Чжан (Китай), Хиро Ли Танака (Япония), Самик Басу (Индия), Шикунан Рен (Китай), Соумен Саркар (Индия), Нгуен Хонг (Вьетнам), Йи Лю (Китай), А.В. Малютин (Санкт-Петербург), Ран Тао (Китай), Сончжон Ким (Москва), Н. Богачев (Москва), Хаймяо Чен (Китай), Сяо Ван (Китай), В.О. Мантуров (Москва), И.М. Никонов (Москва), Сян Лю (Китай), Цян Чжан (Китай), Цзимин Ма (Китай), Сяомин Ду (Китай) и др.

Партнеры по проведению научных мероприятий НОМЦ в 2020 г.:

- Бурятский государственный университет
- Московский физико-технический институт
- Новосибирский государственный университет
- Российско-французский Междисциплинарный научный центр Понселе
- Томский политехнический университет
- Московский государственный технический университет им. Баумана
- Beijing Normal University (Китай)

- Dalian University of Technology (Китай)
- Kyungpook National University (Корея)
- Indian Institute Science Education and Research Mohali (Индия)
- Peking University (Китай)
- Pusan National University (Корея)
- Soochow University (Китай)
- Vietnam National University (Вьетнам)
- Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (Вьетнам)

2.2 Научные мероприятия, организованные и проведенные НОМЦ

При участии НОМЦ были организованы и проведены следующие научные мероприятия:

1) VI научная конференция с международным участием «Геометрия многообразий и ее приложения – 2020», 27–29 августа 2020 г. (конференция прошла в очно-дистанционном формате, место проведения – г. Улан-Удэ, 68 участников).

2) III международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», 3 октября 2020 г. (конференция прошла в дистанционном формате, 20 участников).

3) I Корейско-Российская конференция по теории узлов и смежным темам, 3–6 ноября 2020 г. (конференция прошла в дистанционном формате, 40 участников).

4) VII Китайско-Российская конференция по теории узлов и смежным вопросам, 3–6 декабря 2020 г. (конференция прошла в очно-дистанционном формате, место проведения – Китай, г. Пекин, 50 участников).

5) III всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», 8–13 декабря 2020 г. (конференция прошла в очно-дистанционном формате, место проведения – г. Томск, 30 участников)

6) VIII Восточно-Азиатская конференция по алгебраической топологии, 14–17 декабря 2020 г. (конференция прошла в очно-дистанционном формате, место проведения – Вьетнам, г. Ханой, 90 участников).

7) XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 21–24 апреля 2020 г. (конференция проходила в дистанционном формате, 46 участников секции «Математика» – студенты вузов Сибирского региона). Ежегодная студенческая конференция, организуемая ВУЗами и НИИ г. Томска при поддержке ведущих предприятий. С 2020 г. Центр выступает соорганизатором секции «Математика».

8) Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», 12–15 мая 2020 г. (конференция проходила в дистанционном формате, 54 участника – студенты вузов Сибири).

9) Цикл лекций «Современные языки программирования» для студентов младших курсов, март-май 2020 г. (лекции проходили в дистанционном формате участники – 20 студентов). Лекции были посвящены разбору решения конкретных учебных задач с использованием языков программирования Python и Java.

10) Научный семинар «Математический коллоквиум» (заседания семинара проходили еженедельно: в феврале-марте – очно и, начиная с марта 2020 г., – в дистанционном формате, участники – студенты, аспиранты, преподаватели). Семинар ориентирован на студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей ВУЗов. Для выступления с докладами приглашаются ведущие российские ученые, специалисты в различных областях математики и механики.

11) Городской математический семинар имени Г.Г. Пестова (заседания семинара проходили еженедельно: в феврале-марте – очно и, начиная с марта 2020 г., – в дистанционном формате, участники – студенты и преподаватели). Семинар не имеет узко очерченного направления и посвящен актуальным вопросам современной алгебры, математического, комплексного анализа, геометрии и топологии.

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://gmc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

2.3 Стажировки студентов, аспирантов и молодых ученых в ведущих академических институтах и университетах

Согласно Плану развития центра, в 2020 г. шесть аспирантов и магистрантов были направлены на стажировки.

С 5 по 12 октября прошла очная стажировка аспирантки ММФ ТГУ в Институте лазерной физики СО РАН под руководством заведующей лабораторией лазерной биофизики д.б.н. О.П. Черкасовой по теме: «Математическое моделирование и статистическая обработка спектральных данных».

Совместно с Международным математическим центром в Академгородке г. Новосибирска с октября 2020 г. проводилась программа дистанционной стажировки в рамках Научного интернет-семинара «Актуальные проблемы прикладной математики». В ней принимали участие 5 аспирантов и магистрантов ТГУ. Семинар проводился каждую первую и третью пятницу месяца в 17:00 (GMT+7). Руководители семинара: акад. РАН

И.А. Тайманов, чл.-корр. РАН С.И. Кабанихин, чл.-корр. РАН А.Е. Миронов, д.ф.-м.н. М.А. Шишленин.

Целью стажировок было знакомство с ведущими научными школами в различных областях математики; обмен опытом; получение компетенций, которые будут полезны при выполнении научных исследований в рамках подготовки диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

2.4 Подготовка кадров высшей квалификации в НОМЦ

Под научным руководством ведущих научных сотрудников НОМЦ профессора А.М. Бубенчикова, профессора А.В. Старченко, доцента Е.А. Тимошенко, доцента М.А. Шеремета ведется научно-исследовательская работа аспирантов, магистрантов и бакалавров ММФ ТГУ по специальностям «Механика газотранспортных систем», «Математика», «Математика и компьютерные науки». В 2020 г. состоялись защиты 3 кандидатских диссертаций под их руководством, в том числе и защита диссертации сотрудника Центра – М.В. Агафонцева, а также 6 магистерских диссертаций и 5 выпускных квалификационных работ бакалавра.

2.5 Новые или модернизированные образовательные курсы и модули, реализуемые НОМЦ

Произведена модернизация содержания шести основных образовательных программ (ООП) бакалавриата по направлениям «01.03.01-Математика», «02.03.01-Математика и компьютерные науки», «01.03.03-Механика и математическое моделирование» и разработаны новые учебно-методические комплексы для новых и модернизированных дисциплин с учетом ФГОС 3++. Актуализированы преподаваемые на ММФ основные математические курсы: «Основы информационной безопасности», «Теория и вычислительная сложность алгоритмов», «Введение в методы параллельных вычислений», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», Учебно-вычислительная практика, элемент модуля «Компьютерные науки» — дисциплина «Программирование, элемент "Базы данных"». Все подготовленные учебно-методические материалы будут рассмотрены на заседании учебно-методической комиссии ММФ ТГУ в январе 2021 г.

2.6 Образовательные мероприятия НОМЦ

1) XIII Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск, январь-февраль 2020 г. (турнир проходил в очном формате в несколько этапов, 206 участников – 168 школьников, 28 учителей, 10 преподавателей вузов Томска). Математический бой – это

соревнование двух команд в решении математических задач, а также в умении представлять свои решения с четкими обоснованиями ключевых моментов и в умении проверять чужие решения, оппонировать. НОМЦ принимает активное участие в поддержке и проведении Турнира с 2019 г.

2) «Международный день числа Пи», 14 марта 2020 г. (мероприятие проходило в очном формате, 88 участников – 28 студентов и 60 школьников). Ежегодно Механико-математический факультет ТГУ при поддержке НОМЦ приглашает школьников Томска узнать новое и интересное о математических и компьютерных науках, проверить свои знания на математическом брейн-ринге, пройти интеллектуальную игру, попасть на экскурсию в лабораторию моделирования и прогноза катастроф и принять участие в шахматном турнире с суперкомпьютером.

3) Областная весенняя математическая школа «Готовимся к ЕГЭ по математике», 23–27 марта 2020 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 80 участников – школьников). В дни школьных каникул ТГПУ при участии НОМЦ проводит традиционную областную Математическую школу «Готовимся к ЕГЭ по математике». Преподаватели – ведущие лекторы-специалисты в области математического образования, в том числе канд. физ.-мат. наук Я.С. Гриншпон – зам. директора НОМЦ по работе со школьниками, ведущий эксперт ЕГЭ.

4) XXXI региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 31 марта 2020 г. (конференция проходила в дистанционном формате, 42 участника – школьники, учителя, преподаватели вузов). Традиционная конференция проводится при методической и организационной поддержке НОМЦ с целью выявления и развития у школьников творческих способностей, и интереса к научно-исследовательской деятельности в области математики.

5) Круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», 01–29 июня 2020 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, около 80 участников – школьников). Круглый стол предполагает совместное обсуждение школьниками и преподавателем способов решения нестандартных и интересных задач профильного ЕГЭ по математике. Отличительной чертой мероприятия является выбор задач для обсуждения самими школьниками. Модератор круглого стола – Я.С. Гриншпон, зам. директора НОМЦ по работе со школьниками, ведущий эксперт ЕГЭ.

6) Методический семинар для педагогов, курирующих математически одаренных обучающихся (семинары проходили еженедельно: в январе-марте – очно и, начиная с марта 2020 г., – в дистанционном формате, участники – учителя математики школ г. Томска). Под руководством Я.С. Гриншпона, заместителя директора НОМЦ по работе со школьниками,

на семинаре разбираются занимательные и олимпиадные задачи по математике и логике для школьников, обсуждается методика преподавания математики в школах, происходит обмен опытом проведения занятий с математически одаренными школьниками.

7) Практикум по математическому моделированию для учащихся старших классов школ г. Томска, ноябрь-декабрь 2020 г. (практикум проходил в дистанционном формате, участники – 20 школьников старших классов г. Томска). Занятия проходили в форме вебинаров и касались таких тем, как «Обработка цветных изображений», «Математическое моделирование смещения двух газов в потоке». В рамках практикума были проведены лабораторные работы по сглаживанию изображений и смещению газов в потоке. Рассмотрены результаты работы программных кодов, написанных участниками практикума.

2.7 Школьники, принявшие участие в мероприятиях НОМЦ и ставшие победителями и призерами олимпиад школьников по математике и информатике

В мероприятиях НОМЦ (см. подраздел 2.6) приняли участие 23 школьника, ставшие в 2020 г. победителями и призерами Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике и информатике (заключительный этап не проводился в виду неблагоприятной эпидемиологической обстановки) или олимпиад РСОШ по математике 1 и 2 уровня:

1. Барсуков Сергей Евгеньевич, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 11 класс, победитель Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

2. Кандинский Максим Андреевич, МАОУ Гимназия 29 г. Томска, 11 класс, победитель Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

3. Коротков Арсентий Максимович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 11 класс, победитель Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

4. Затеев Станислав Вадимович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике

5. Классен Федор Андреевич, МАОУ Гимназия 29 г. Томска, 11 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике

6. Климов Глеб Аркадьевич, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 11 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

7. Халин Алексей Владиславович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике
8. Черневич Константин Владимирович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 11 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
9. Золин Никита Андреевич, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс, победитель Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, диплом первой степени олимпиады "Росатом" по математике, победитель Всесибирской олимпиады школьников по математике
10. Хоцков Алесандр Александрович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, победитель по информатике и призер по математике Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год, диплом второй степени олимпиады "Росатом" по математике
11. Барышников Владимир Романович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике
12. Вежнин Егор Дмитриевич, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
13. Киреев Сергей Александрович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
14. Плющанский Иван Маркович, МБОУ "Северская гимназия", 10 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
15. Лучкин Вячеслав Александрович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс, победитель Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
16. Акулов Артем Олегович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
17. Карташов Даниил Олегович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
18. Селезнев Илья Дмитриевич, МБОУ СОШ 198 ЗАТО Северск, 9 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
19. Сушков Артем Александрович, МАОУ Гимназия 29 г. Томска, 9 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
20. Шаманаев Александр Сергеевич, МБОУ Академический лицей г. Томска имени Г.А. Псахье, 9 класс, призер Регионального этапа ВсОШ 2019-2020 уч. год по математике
21. Забейворота Кирилл Владимирович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

22. Зюбин Константин Сергеевич, МАОУ СОШ 32 г. Томска, 8 класс, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

23. Жуков Вадим Олегович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 8 класс, призер Всесибирской олимпиады школьников по математике

2.8 Дополнительная информация о научной и научно-образовательной деятельности НОМЦ

Работа в научных комиссиях, советах и журналах региона

Центр активно участвует в математической жизни Томского региона и ТГУ, в определении направлений ее развития. Директор НОМЦ, чл.-корр. РАН А.Ю. Веснин входит в Научно-аттестационную комиссию (НАК) ТГУ, Ученый совет ММФ ТГУ, в редколлегию научного журнала «Вестник ТГУ, Математика и механика», в программные комитеты конференций и научно-образовательных мероприятий, проводимых в регионе.

2.9 Научные гранты

Актуальность и востребованность научных исследований, проводимых в математическом центре, подтверждается, в том числе, грантовой поддержкой научных фондов. В 2019 году по результатам открытых конкурсов были признаны победителями 6 научных проектов НОМЦ с общим объемом финансирования 45,87 млн.руб., в том числе в 2020г. – 15,79 млн. руб.:

- Российско-Индийский проект РНФ-DST № 19-41-02005 «Теория глобальных узлов: инварианты и классификация», срок реализации гранта 2019-2021гг., объем финансирования – 18,0 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 6,0 млн.руб., руководитель проекта А.Ю. Веснин;

- исследовательский проект РНФ по президентской программе № 19-71-10049 «Исследование гиродинамического излучения нагретых фуллеренов в составе фуллерита, имеющих дипольный момент, под действием стационарного магнитного поля», срок реализации гранта 2019-2022гг., объем финансирования – 15,0 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 5,0 млн.руб., руководитель проекта М.А. Бубенчиков;

- исследовательский проект РНФ по президентской программе № 19-79-00296 «Математическое моделирование сложного теплообмена в строительных сооружениях», срок реализации гранта 2019-2021гг., объем финансирования – 3,0 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 1,5 млн.руб., руководитель проекта И.В. Мирошниченко;

- исследовательский проект РФФИ № 19-01-00569 «Геометрические 3-многообразия, аппроксимируемость и упорядочиваемость их групп», срок реализации

гранта 2019-2021гг., объем финансирования – 2,7 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 0,9 млн.руб., руководитель проекта А.Ю. Веснин;

- Российско-Монгольский проект РФФИ № 19-51-44002 «Математическое моделирование квантового просеивания изотопов посредством туннельного прохождения через резонансную систему энергетических барьеров при сверхнизких температурах», срок реализации гранта 2019-2021гг., объем финансирования – 5,97 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 1,99 млн.руб., руководитель проекта М.А. Бубенчиков;

- аспирантский научный проект РФФИ № 19-31-90087 «Проницаемость мембраны на основе фуллеренов, нанотрубок или наноткани в отношении дипольных молекул газовой фазы и углеводородных компонентов природной смеси газов», срок реализации гранта 2019-2021гг., объем финансирования – 1,2 млн.руб., в т.ч. в 2020 году – 0,4 млн.руб., руководитель проекта А.М. Бубенчиков.

В 2020 г. директор Центра – А.Ю. Веснин стал победителем конкурса на получение гранта «Ведущий ученый» Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все работы, запланированные на отчетный период проекта, успешно выполнены. Все ожидаемые к концу 2020 года результаты получены.

Результаты прошли апробацию на международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Участниками проекта сделано 49 докладов по тематике выполненных работ. Результаты работы по проекту опубликованы сотрудниками НОМЦ в 17 статьях в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus с указанием авторов на поддержку НОМЦ (статьи [A.1] – [A.17]). В том числе: 9 статей опубликованы в журналах, входящих в первый и второй квартиль (Q1, Q2) базы данных Web of Science, Scopus (работы [A.1], [A.2], [A.4], [A.8] – [A.12], [A.15]); 7 статей подготовлены молодыми научными сотрудниками НОМЦ (работы [A.6] – [A.8], [A.13], [A.14], [A.16], [A.17]). Кроме того, в 2020 г. подготовлены и/или сданы в печать еще 8 статей (работы [A.18] – [A.25]).

Под руководством научных сотрудников НОМЦ подготовлены и защищены в 2020 году 6 магистерских диссертаций и 5 выпускных квалификационных работ бакалавра студентов ММФ ТГУ по специальностям «Математика», «Математика и компьютерные науки» и «Механика газотранспортных систем». Под научным руководством ведущего научного сотрудника НОМЦ А.М. Бубенчикова в 2020 году защищены две диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, а также состоялась защита кандидатской диссертации сотрудника НОМЦ – М.В. Агафонцева.

В 2020 году сотрудниками НОМЦ организовано более 40 научных семинаров. Лекции проходили в рамках, организованного НОМЦ «Математического коллоквиума», ориентированного на студентов младших курсов. Кроме того, в форме открытых лекций проходили пленарные доклады на научных конференциях, организованных НОМЦ.

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://rnc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

При поддержке НОМЦ в 2020 г. 6 магистрантов и аспирантов ТГУ прошли стажировки в академических институтах РАН (г. Новосибирск), модернизированы 6 учебных программ механико-математического факультета ТГУ.

Сотрудники НОМЦ продолжают вести работу по 6 научным грантам, которые были получены в 2019 г. на конкурсной основе. Также директор Центра – А.Ю. Веснин стал победителем конкурса 2020 г. на получение гранта «Ведущий ученый» Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Отчет о работе Центра был заслушан и одобрен на заседании Ученого совета механико-математического факультета Томского государственного университета
24.12.2020 г.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Мат. заметки.* – 1972. – Т. 11, № 4. – С. 403–408.
- 2 Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами автоморфизмов / А. М. Себельдин // *Абелевы группы и модули.* – 1991. – С. 125–134.
- 3 Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород : 2014. – 73 с.
- 4 Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // *Memorie Reale Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena, III, VIII (Appendice)* – 1907. – P. 21–66
- 5 Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Лань, 2002. – 736 с.
- 6 Driscoll T. A. Schwarz-Christoffel mapping / T. A. Driscoll, L. N. Trefethen. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 132 p.
- 7 Wegmann R. Methods for numerical conformal mapping / R. Wegmann // *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Vol. 2.* Kühnau R. (Ed.). – Amsterdam: Elsevier, 2005. – P. 351–477.
- 8 Papamichael N. Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals / N. Papamichael, N. S. Stylianopoulos. – New Jersey-London-Singapore: World Scientific, 2010. – 241 p.
- 9 Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля / П. П. Куфарев // *ДАН СССР* – 1947. – Т. 57, № 6. – С. 535–537.
- 10 Байбарин Б. Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области. / Б. Г. Байбарин // *Труды Томского гос. ун-та* – 1966. – Т. 189. – С. 123–136.
- 11 Kolesnikov I. A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation / I. A. Kolesnikov // *Issues Anal.* – 2018. – Vol. 7(25), No 2. – P. 50–62.
- 12 Wolfson K. G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations / K. G. Wolfson // *Amer. J. Math.* – 1953. – Vol. 75, № 2. – P. 358–386.
- 13 Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones / D. Zelinsky // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1954. – Vol.5, № 4. – P. 627–630.

- 14 Skornyakov L. Complemented modular lattices and regular rings / L. Skornyakov. – Edinburgh: Oliver&Boyd, 1963. – 182 p.
- 15 Srivastava A. K. A survey of rings generated by units / Srivastava A. K. // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques. – 2010. – Vol. 6, № 19. – P. 203–213.
- 16 Goldsmith B. On unit sum numbers of rational groups / B. Goldsmith, C. Meehan // Rocky Mountain J. Math. – 2002. – Vol. 32, № 4. – P. 1431–1450.
- 17 Goldsmith B. Torsion-free groups and modules with involution property / B. Goldsmith, C. Meehan, S. L. Wallutis // J. Pure Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 208, № 1. – P. 127–134.
- 18 Goldsmith B. Unit sum number of rings and modules / B. Goldsmith, S. Pabst, A. Scott // Quart. J. Math. – 1998. – Vol. 49, № 3. – P. 331–344.
- 19 Henriksen M. Two classes of rings generated by their units / M. Henriksen // J. Algebra. – 1974. – Vol. 31, № 1. – P. 182–193.
- 20 Vamos P. 2-good rings / P. Vamos // Quart. J. Math. – 2005. – Vol. 56, № 3. – P. 417–430.
- 21 Норбосамбуев Ц. Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – Вып. 36(4). – С. 34–40.
- 22 Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups / L. Fuchs // Topics in Abelian groups. Chicago. – 1963. – P. 9–40.
- 23 Крылов П. А. sr -группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. В. Царев // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 159. – С. 68–110.
- 24 Strungman L. Does the automorphism group generate the endomorphism ring in $\text{Rep}(S, R)$ / L. Strungman // J. Algebra. – 2000. – Vol. 231. – P. 163–179.
- 25 Крылов П. А. Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов // Изв. вузов. Матем. – 1976. – Вып. 4. – С. 56–66.
- 26 Meehan C. Sums of automorphism groups and modules / C. Meehan // Math. proc. Royal Irish Acad. – 2004. – Vol. 104. – С. 59–66.
- 27 Numerical simulation of two-phase flows in 2-D petroleum reservoirs using a very high-order CPR method coupled to the MPFA-D finite volume scheme / G. Galindez-Ramirez [et al.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2020. – Vol. 192. – Article number: 107220.

- 28 Miroshnichenko I.V. Turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosures using experimental and numerical approaches: A review / I.V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2018. – Vol. 82. – P. 40–59.
- 29 Wei Y. Simulations of natural convection heat transfer in an enclosure at different Rayleigh number using lattice Boltzmann method / Y. Wei, H. Dou, Z. Wang, Y. Qian, W. Yan. // *Computers and Fluids*. – 2016. – Vol. 124. – P. 30–38.
- 30 Xu A. Lattice Boltzmann simulations of three-dimensional thermal convective flows at high Rayleigh number / A. Xu, L. Shi, H. Xi. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2019. – Vol. 140. – P. 359–370.
- 31 Nourgaliev R. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications / R. Nourgaliev, T. Dinh, T. Theofanous, D. Joseph // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2003. – Vol. 29. – P. 117–169.
- 32 Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond* / S. Succi. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 288 p.
- 33 Куперштох А. Л. Трёхмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU / А. Л. Куперштох // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – Т. 13. – С. 130–138.
- 34 Режимы неустойчивого истечения и диффузионного горения струи углеводородного горючего / В. В. Леманов [и др.] // *ФГВ*. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 1–10.
- 35 Кочергин Д. О. О структуре прямого и обращенного диффузионного водородо-воздушного пламени / Д.О. Кочергин // *Научный вестник НГТУ*. – 2016. – Т. 62, № 1. – С. 195–204. DOI: 10.17212/1814-1196-2016-1-195-204.
- 36 Управление диффузионным горением в пристенных турбулентных потоках [Электронный ресурс] / Б. Ф. Бояршинов [и др.] // *Материалы научно-практической конференции "Аэродинамика, термодинамика, горение в ГТД и ПВРД"*, 23 – 25 июня 2015 г., г. Новосибирск. – URL: http://lees.nsu.ru/pdf/%D0%A1_20_%D0%9B%D1%83%D0%BA%D0%B0%D1%88%D0%BE%D0%B2.pdf (дата обращения: 23.12.2020)
- 37 Накоряков В. Е. Диффузионное горение метана / В. Е. Накоряков, С. Л. Елистратов, С. Я. Мисюра // *Теплофизические основы энергетических технологий: сборник научных трудов IV всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 10–12 октября 2013 г.* – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2013. – С. 23–26.
- 38 Гильберт-диагностика пламён / Ю. Н. Дубнищев [и др.] // *GraphiCon 2018* : тр. 28 междунар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению, Томск, 24–27 сент. 2018 г. – Томск : Изд-во НИ ТПУ, 2018. – С. 123–126.

39 Комбинированное применение ОН PLIF, НСНО PLIF и STEREO PIV к турбулентному поворотному пламени [Электронный ресурс] / Л. М. Чикишев [и др.] // AIP. – 2018. – URL: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5065236> (дата обращения: 23.12.2020)

40 Комбинация PIV- и PLIF-методов для исследования конвективного теплообмена в ударной струе / А. С. Небучинов [и др.] // Экспериментальная теплотехника. – 2017. – Т. 80. – С. 139–146.

41 Когерентные структуры в области вращающейся турбулентной струи: изучение томографических PIV / С.В. Алексеенко [и др.] // Международный журнал тепла и течения жидкости. – 2018. – Т. 70. – С. 363–379.

42 Пат. 2713850 Российская Федерация, С1. Система мониторинга режимов горения топлива путем анализа изображений факела при помощи классификатора на основе свёрточной нейронной сети / О. А. Гобызов, С. С. Абдуракипов, М. П. Токарев, А. В. Серёдкин, В. М. Дулин, А. В. Бильский ; заявитель и патентообладатель Новосибирск. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук (ИТ СО РАН). заявлено 07.02.2020 ; опуб. 10.12.2018. – 16 с.

43 Пат. 2715302 Российская Федерация, С1. Автоматическая система диагностики процесса сжигания пылеугольного топлива в камере сгорания / В. М. Дулин, Л. М. Чикишев, Е. Б. Бутаков, С. С. Абдуракипов ; заявитель и патентообладатель Новосибирск. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук (ИТ СО РАН). заявлено 10.12.2018 ; опуб. 26.02.2020. – 12 с.

44 Zheng L. Experimental Investigation on the flame wrinkle fluctuation under external acoustic excitation / L. Zheng, S. Ji, Y. Zhang // ICDERS Proceedings. International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems (ICDERS), 30 July - 4 August 2017, Boston, USA. IDERS. – 2017. – p. 1–6.

45 Influence of an acoustic field on flame development and transition to detonation / V. V. Golub [et al.] // High Temp. – 2010. – Vol. 48. – P. 860–865.

46 Korobov A. E. Influence of sound absorbing surfaces on acoustic oscillations and flame acceleration in hydrogen–air mixture / A. E. Korobov, V. V. Volodin, S. V. Golovastov // Journal of Physics: Conference Series, Volume 774, XXXI International Conference on Equations of State for Matter (ELBRUS 2016) 1–6 March 2016, Elbrus, Russia. – 2016. – Vol. 774. – P. 1–4.

- 47 Arefyev K. Yu. Experimental study of premixed methane–air flame coupled with an external acoustic field / K. Yu. Arefyev, A. I. Krikunova, V. A. Panov // *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 1147, XXXIII International Conference on Equations of State for Matter 1–6 March 2018, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russian Federation. – 2018. – Vol. 1147. – P. 1–7.
- 48 Response of lean premixed swirl tubular flame to acoustic perturbations / M. Kang [et al.] // *Experimental Thermal and Fluid Science*. – 2020. – Vol. 119. – Article number: 110199.
- 49 High-speed simultaneous PLIF/PIV imaging of a lift-off swirling flame under acoustic forcing / X. Liu [et al.] // *Experimental Thermal and Fluid Science*. – 2021. – Vol. 121. – Article number: 110259.
- 50 The local extinction and the nonlinear behaviors of a premixed methane/air flame under low-frequency acoustic excitation / Y. Sun [et al.] // *Modern Physics Letters B*. – 2020. – Vol. 34, № 13. – P. 1–21.
- 51 Bachman D. Sweepouts of amalgamated 3-manifolds / D. Bachman, S. Schleimer, E. Sedgwick // *Algebr. Geom. Topol.* – 2006. – Vol. 6. – P. 171–194.
- 52 Hempel J. 3-manifolds / J. Hempel // *Annals of Math. Studies*. – 1976. – Vol. 86.
- 53 Jaco W. Lectures on Three-Manifold Topology cover image / W. Jaco. – CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Volume: 43, 1980. – 251 p.
- 54 Jaco W. Adding a 2-handle to a 3-manifold: an application to property / W. Jaco // *R. Proc. Amer. Math. Soc.* – 1984. – Vol. 92, № 2. – P. 288–292.
- 55 Jaco W. Three-manifolds with fundamental group a free product / W. Jaco // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1969. – Vol. 75. – P. 972–977.
- 56 Kobayashi T. The amalgamation of high distance Heegaard splittings is always efficient / T. Kobayashi, R. Qiu // *Math. Ann.* – 2008. – Vol. 341. – P. 707–715.
- 57 Lackenby M. The Heegaard genus of amalgamated 3-manifolds / M. Lackenby // *Geom. Dedicata*. – 2004. – Vol. 109. – 139–145.
- 58 Lei F. Some properties of an annulus sum of 3-manifolds / F. Lei // *Noutheast. Math. J.* – 1994. – Vol. 10, № 3. – P. 325–329.
- 59 Li T. Rank and genus of 3-manifolds / T. Li // *J. Amer. Math. Soc.* – 2013. – Vol. 26, № 3. – P. 777–829.
- 60 Lyndon R. C. Combinatorial group theory / R. C. Lyndon, P. E. Schupp. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 339 p.
- 61 Magnus W. The Combinatorial group theory / W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar. – Hoboken: Wiley Interscience, 1966.

- 62 Mednykh A. On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups / A. Mednykh, J. Parker, A. Vesnin // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*. – 2004. – Vol. 10, № 3. – P. 357–381.
- 63 Munkres J. *Topology: Pearson New International Edition* / J. Munkres. – Harlow: Pearson Education Limited, 2014. – 537 p.
- 64 Przytycki J. H. Incompressibility of surfaces after Dehn surgery / J. H. Przytycki // *Michigan Math. J.* – 1983. – Vol. 30. – P. 289–303.
- 65 Scharlemann M. Heegaard splittings of compact 3-manifolds in *Handbook of geometric topology*. Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher. / M. Scharlemann. – Amsterdam: North-Holland, 2002. – P. 921–953
- 66 Schultens J. Additivity of tunnel number for small knots / J. Schultens // *Comment. Math. Helv.* – 2000. – Vol. 75. – P. 353–363.
- 67 Schultens J. Destabilizing amalgamated Heegaard splittings / J. Schultens, R. Weidmann // *Geom. Topol. Monogr.* – 2007. – Vol. 12. – P. 319–334.
- 68 Yang G. On amalgamations of Heegaard splittings with high distance / G. Yang, F. Lei // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2009. – Vol. 137, № 2. – P. 723–731.
- 69 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы // *Том 2.* / Л. Фукс. – М., 1977. – 415 с.
- 70 Urroz G. E. Bend ice jams: laboratory observations / G. E. Urroz, R. Ettema // *Canadian Journal of Civil Engineering*. – 1992. – Vol. 19. – P. 855–864.
- 71 Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – № 3(1). – С. 174–177.
- 72 Vildanov V. K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group / V. K. Vildanov // *J. Math. Sci. (New York)*. – 2014. – Vol. 197, № 5. – P. 590–594.
- 73 Leptin H. Abelsche p -gruppen und ihre Automorphismengruppen / H. Leptin // *Math. Z.* – 1960. – Vol. 73. – P. 235–253.
- 74 Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups / W. Liebert // *Abelian Group Theory. Proceedings of the 1985 Oberwolfach Conference*, Gordon and Breach. – 1987. – P. 9–31.
- 75 Fuchs L. *Abelian groups* / L. Fuchs. – Springer, 2015. – 747 p.
- 76 Тимошенко Е. А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел / Е. А. Тимошенко // *Журнал СФУ. Математика и физика*. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 541–550.
- 77 Тимошенко Е. А. Проективные модули над csp -кольцами / Е. А. Тимошенко // *Журнал СФУ. Математика и физика*. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 581–585.

- 78 Fuchs L. On subdirect unions, I / L. Fuchs // *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* – 1952. – Vol. 3, №. 1–2. – P. 103–120.
- 79 Beaumont R. A. Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two / R. A. Beaumont, R. J. Wisner // *Acta Sci. Math. Szeged.* – 1959. – Vol. 20, №. 2–3. – P. 105–116.
- 80 Beaumont R. A. Torsion free groups of rank two / R. A. Beaumont, R. S. Pierce // *Memoirs Amer. Math. Soc.* – 1961. – Vol. 38. – P. 1–41.
- 81 Bejan A. Entropy generation minimization: The method of thermodynamic optimization of finite-size systems and finite-time processes / A. Bejan. – New York: CRC Press, 1995. – 400 p.
- 82 Khan Z. H. Entropy generation analysis of triple diffusive flow past a horizontal plate in porous medium / Z. H. Khan, W. A. Khan, J. Tang, M. A. Sheremet // *Chemical Engineering Science.* – 2020. – Vol. 228. – 115980.
- 83 Hsiang W.-Y. On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons / W.-Y. Hsiang // *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* – 1988. – Vol. 39, № 156. – P. 463–468.
- 84 Cho Yu. On the volume formula for hyperbolic tetrahedral / Yu. Cho, H. Kim // *Discrete Comput. Geom.* – 1999. – Vol. 22, № 3. – P. 347–366.
- 85 Murakami J. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron / J. Murakami, M. Yano // *Comm. Anal. Geom.* – 2005. – Vol. 13, № 2. – P. 379–400.
- 86 Ushijima A. Volume formula for generalised hyperbolic tetrahedral // *Non-Euclidean geometries* (A. Prékopa and E. Molnár, eds.), János Bolyai memorial volume, papers from the International Conference on Hyperbolic Geometry held in Budapest, July 6–12, 2002, *Mathematics and Its Applications* (New York), 581. – New York: Springer, 2006. – P. 249–265.
- 87 Derevnin D. A. A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // *Russian Math. Surveys.* – 2005. – Vol. 60, № 2. – P. 346–348.
- 88 Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // *Memorie Reale Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena, III, VIII (Appendice)* – 1907. – P. 21–66.
- 89 Abrosimov N. V. Volumes of polytopes in constant curvature spaces / N. V. Abrosimov, A. D. Mednykh // *Fields Institute Communications.* – 2014. – Vol. 70. – P. 1–26.
- 90 Murakami J. A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths / J. Murakami, A. Ushijima // *J. Geom.* – 2005. – Vol. 83. – P. 153–163.
- 91 A cell centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in

heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs / F. R. L. Contreras [et al.] // *Computers and Fluids*. – 2016. – Vol. 127. – P. 1–16.

92 Artin E. Theory of braids / E. Artin. // *Ann. of Math.* – 1947. – Vol. 48, №1. – P. 101–126.

93 Марков А. А. Основы алгебраической теории кос / А. А. Марков // *Труды МИАН*. – 1945. – Т. 16.

94 Bardakov V. G. On 3-strand singular pure braid group / V. G. Bardakov, T. A. Kozlovskaya // *Journal of knot theory and Its Ramifications*. – 2020. – Vol. 29, №. 10. – Article number: 2042001.

95 Fenn R. The Singular braid monoid embeds in a group. / R. Fenn, E. Keyman, C. Rourke // Brighton: Univ. of Sussex, 1996.

96 Birman J. S. New points of view in knot theory / J. S. Birman // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1993. – Vol. 28, № 2. – P. 253–287.

97 Magnus W. Combinatorial group theory, presentations of groups in terms of generators and relations / W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar // New York–London–Sydney: Interscience publishers, 1966. – 444 p.

98 Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Лань, 2002. – 736 с.

99 Driscoll T. A. Schwarz-Christoffel mapping / T. A. Driscoll, L. N. Trefethen. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 132 p.

100 Wegmann R. Methods for numerical conformal mapping. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Vol. 2. Kühnau R. (ed.). / R. Wegmann // Amsterdam: Elsevier, 2005. – P. 351–477

101 Papamichael N. Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals / N. Papamichael, N. S. Stylianopoulos. – New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2010. – 241 p.

102 Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля / П. П. Куфарев // *ДАН СССР*. – 1947. – Т. 57, № 6. – С. 535–537.

103 Байбарин Б. Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области / Б. Г. Байбарин // *Труды Томского гос. ун-та*. – 1966. – Т. 189. – С. 123–136.

104 Kolesnikov I. A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation. / I. A. Kolesnikov // *Issues Anal.* – 2018. – Vol. 7(25), № 2. – P. 50–62.

105 Колесников И. А. Однопараметрическое семейство конформных отображений из полуплоскости на семейство многоугольников / И. А. Колесников, А. Х. Шарофов // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 5. – С. 1027–1040.

106 Wang Y. Influence of convection and radiation on the thermal environment in an industrial building with buoyancy-driven natural ventilation / Y. Wang, X. Menga, X. Yang, J. Liua // Energy and Buildings. – 2014. – Vol. 75. – P. 394–401.

107 Ridouane E. H. Interaction between natural convection and radiation in a square cavity heated from below / E. H. Ridouane, M. Hasnaoui, A. Amahmid, A. Raji // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2004. – Vol. 45. – P. 289–311.

108 Sharma A. K. Conjugate turbulent natural convection with surface radiation in air-filled rectangular enclosures / A. K. Sharma, K. Velusamy, C. Balaji, S. P. Venkateshan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. – Vol. 50. – P. 625–639.

109 Sole P. Completely regular codes and completely transitive codes / P. Sole // Discrete Mathematics. – 1990. – P. 193–201.

110 Grigorescu E. Explicit low-weight bases for BCH Codes / E. Grigorescu, T. Kaufman // IEEE Transactions on Information Theory. – 2011. – Vol. 58, №. 2. – P. 78–81.

111 Мак-Вильямс Ф. Д. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Д. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн // Москва: Связь, 1979. – 746 с.

112 Mogilnykh I. Yu. A concatenation construction for propelinear perfect codes from regular subgroups of $GA(r,2)$ / I. Yu. Mogilnykh, F. I. Solov'eva // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2019. – Vol. 16. – P. 1689–1702.

113 Carlet C. Codes, bent functions and permutations suitable for DES-like cryptosystems / C. Carlet, P. Charpin, V. Zinoviev // Designs, Codes and Cryptography. – 1998. – Vol. 15. – P. 125–156.

114 Stringall R. W. Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups / R. W. Stringall // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1967. – Vol. 18. – P. 401–404.

115 Freedman H. On endomorphisms of primary Abelian groups / H. Freedman // J. London Math. Soc. – 1968. – Vol. 43. – P. 305–307.

116 Castagna F. Sums of automorphisms of a primary Abelian group / F. Castagna // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 463–473.

117 Krylov P. Formal matrices / P. Krylov, A. Tuganbaev. – Springer, 2017. – 156 p.

118 Krylov P. A. Endomorphism rings of Abelian groups / P. A. Krylov, A. B. Mikhalev, A. A. Tuganbaev. – Boston–London: Springer–Verlag, 2003. – 443 p.

119 Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition / K. Morita // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Diagaku Sect. – 1958. – Vol. 6. – P. 83–142.

- 120 Shapiro J. Morita contexts / J. Shapiro, P. Loustaunau // *Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics.* – 1990. – Vol. 1448. – P. 80–92.
- 121 Astarita G. Principles of non-Newtonian fluids mechanics / G. Astarita, G. Marucci. – New York: McGraw-Hill, 1974. – 289 p.
- 122 Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators, *Frontiers in Mathematics* / A. Henrot. – Basel–Boston–Berlin: Birkhauser Verlag, 2006. – 202 p.
- 123 Payne L. E. An optimal Poincare inequality for convex domains / L. E. Payne, H. F. Weinberger // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1960. – Vol. 5. – P. 286–292.
- 124 Maz'ya V. Sobolev spaces: with applications to elliptic partial differential equations / V. Maz'ya. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2010.
- 125 Vodop'yanov S. K. Lattice isomorphisms of the spaces $W^{1,n}$ and quasiconformal mappings / S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dstein // *Siberian Math. J.* – 1975. – Vol. 16. – P. 224–246.
- 126 Ukhlov A. On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces / A. Ukhlov // *Siberian Math. J.* – 1993. – Vol. 34. – P. 185–192.
- 127 Gol'dshtein V. On the first eigenvalues of free vibrating membranes in conformal regular domains / V. Gol'dshtein, A. Ukhlov // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 2016. – Vol. 221. – P. 893–915.
- 128 Loboda E. L. Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale / E. L. Loboda, O. V. Matvienko, V. P. Vavilov, V. V. Reyno // *Infrared Phys. Technol.* – 2015. – Vol. 72. – P. 1–7.
- 129 Афанасьев В. В. Диагностика и управление устойчивостью горения в камерах энергетических установок / В. В. Афанасьев, Н. И. Кидин. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
- 130 Spalding D. B. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames / D. B. Spalding // *Thirteenth Symposium (International) on Combustion.* – 1971. – P. 649–657.
- 131 Damköhler G. Der einfluss der turbulenz auf die flammengeschwindigkeit in gasgemischen. Volume 46. / G. Damköhler. – *Zs. Elektrochem*, 1940. – 601 p.
- 132 Гибанов Н. С. Влияние положения локального источника объемного тепловыделения полуцилиндрической формы на теплообмен внутри замкнутого контура / Н. С. Гибанов, М. А. Шеремет // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2018. – Т. 28. Вып. 1. – С. 119–130.
- 133 The lattice Boltzmann method / T. Kruger [et al.] – Switzerland: Springer, 2017. – 694 p.

134 Dixit H. N. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method / H. N. Dixit, V. Babu // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2006. – Vol. 49. – P. 727–739.

135 Ridwan R. Performance evaluation of hybrid parallel computing for WRF model with CUDA and OpenMP / R. Ridwan, A. I. Kistijantoro, M. Kudsy, D. Gunawan // *3rd International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*. – 2015. – P. 425–430.

136 Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme: II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme / B. Van Leer // *Journal of Computational Physics*. – 1974. – Vol. 14, № 4. – P. 361–370.

137 Marchuk G. I. *Mathematical modeling for problems of environment* / G. I. Marchuk. – Moscow: Science Publishing, 1982. – 319 p.

138 Danilkin E. A. High performance computation for large eddy simulation // E. A. Danilkin, A. V. Starchenko // Hsu C. H., Malyshkin V. (eds) *Methods and Tools of Parallel Programming Multicomputers. MTPP 2010. Lecture Notes in Computer Science*. – 2010. – Vol. 6083. – P. 163–172.

139 Starchenko A. V. Parallel algorithms for a 3D photochemical model of pollutant transport in the atmosphere / A. V. Starchenko, E. A. Danilkin, A. Semenova, A. A. Bart // *Communications in Computer and Information Science*. – 2016. – Vol. 687. – P. 158–171.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

Публикации

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

A.1 Lei F. A necessary and sufficient condition for a surface sum of two handlebodies to be a handlebody / F. Lei, H. Liu, F. Li, A. Vesnin // *Sci. China Math.* – 2020. – Vol. 63, № 10. – P. 1997–2004. – DOI 10.1007/s11425-019-1647-9 (журнал входит в WoS Q2, Scopus Q1)

A.2 Gill A. Gordian complexes of knots and virtual knots given by region crossing changes and arc shift moves / A. Gill, M. Prabhakar, A. Vesnin // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* – 2020. – Vol. 29, № 10. – Article number: 2042008. – DOI 10.1142/S0218216520420080 (журнал входит в Scopus Q2)

A.3 Kaur K. An unknotting invariant for welded knots / K. Kaur, A. Gill, M. Prabhakar, A. Vesnin // *Proceedings – Mathematical Sciences* (в печати), 18 pages. Preprint version is available at arXiv: 2008.03479

A.4 Dobrynin A. Generalized topological efficiency – case study with C84 fullerene / A. Dobrynin, O. Ori, M. Putz, A. Vesnin // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures.* – 2020. – Vol. 28, № 7. – P. 545–550. – DOI 10.1080/1536383X.2020.1719482 (журнал входит в Scopus Q2)

A.5 Тимошенко Е. А. Тензорное произведение модулей над csp-кольцами / Е. А. Тимошенко // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* – 2020. – Вып. 66. – С. 56–63. – DOI 10.17223/19988621/66/4

A.6 Gongopadhyay K. On some decompositions of the 3-strand singular braid group / K. Gongopadhyay, T. Kozlovskaya, O. Mamonov // *Topology and Its Applications.* – 2020. – Vol. 283. – Article number: 107398. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107398.

A.7 Mogilnykh I. Yu. Coordinate transitivity of a class of extended perfect codes and their SQS / I. Yu. Mogilnykh, F. I. Solov'eva // *Siberian Electronic Mathematical Reports* – 2020. – Vol. 17. – P. 1451–1462.

A.8 Могильных И. Ю. О базисах расширенных кодов БЧХ с конструктивным расстоянием 3 и их расширений / И. Ю. Могильных, Ф. И. Соловьева // *Проблемы передачи информации* – 2020. – Т. 56, Вып 4. – С. 10–19. (журнал входит в Scopus Q2)

A.9 Bubenchikov A. M. The dynamic state of a pseudo-crystalline structure of B₄₂ molecules / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, D. V. Mamontov // *Crystals.* – 2020. –

Vol. 10. – Article number: 510. – DOI 10.3390/cryst10060510 (журнал входит в WoS Q2, Scopus Q2)

A.10 Bubenchikov A. M. Low-temperature separation of helium-helion mixture / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, A. S. Chelnokova, S. Jambaa, A. V. Lun-Fu // *Reviews on Advanced Materials Science*. – 2020. – Vol. 59. – P. 361–370. – DOI 10.1515/rams-2020-0004 (журнал входит в Scopus Q2)

A.11 Khan Z. H. Entropy generation analysis of triple diffusive flow past a horizontal plate in porous medium / Z. H. Khan, W. A. Khan, J. Tang, M. A. Sheremet // *Chemical Engineering Science*. – 2020. – Vol. 228. – Article number: 115980. – DOI 10.1016/j.ces.2020.115980 (журнал входит в WoS Q1, Scopus Q1)

A.12 Umavathi J. C. Heat transfer of viscous fluid in a vertical channel sandwiched between nanofluid porous zones / J. C. Umavathi, M. A. Sheremet // *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. – 2020. – DOI 10.1007/s10973-020-09664-1 (журнал входит в WoS Q2)

A.13 Dil D.O. Higher order fully implicit cell-centered finite volume method for simulation of oil-water displacement in porous medium // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – Vol. 1611. – Article number: 012022. – DOI 10.1088/1742-6596/1611/1/012022.

A.14 Miroshnichenko I. V. Numerical analysis of heat source surface emissivity impact on heat transfer performance in a rectangular enclosure at high Rayleigh numbers / I. V. Miroshnichenko, N. S. Gibanov, M. A. Sheremet // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. – 2020. – Vol. 21. – P. 205–214.

A.15 Churuksaeva V. V. Numerical Modeling of the Two-Phase Flow of Water with Ice in the Tom River / V. V. Churuksaeva, A. V. Starchenko // *Computational Science – ICCS 2020. ICCS 2020. Lecture Notes in Computer Science*. – 2020. – Vol. 12138. – P. 212–224. – DOI 10.1007/978-3-030-50417-5_16 (журнал входит в Scopus Q2)

A.16 Agafontsev M. V. Effects of pressure pulsations on liquid fuel combustion characteristics / M. V. Agafontsev, A. S. Klimentiev, E. L. Loboda, Yu. A. Loboda, V. V. Reyno // *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. – 2020. – Vol. 11560. – Article number: 1156018. – DOI 10.1117/12.2575007

A.17 Leshchinskiy D.V. Parallel implementation of a numerical method for solving a three-dimensional transport equation for a mesoscale meteorological model / D.V. Leshchinskiy, A.V. Starchenko, E.A. Danilkin, S.A. Prohanov // *Procedia Computer Science Journal*. – 2020. Vol. 178. – P. 47–54. – DOI 10.1016/j.procs.2020.11.006.

Статьи, сданные в печать, и препринты:

A.18 Зонов М. Н. О факторно делимых группах ранга 2 / М. Н. Зонов, Е. А. Тимошенко. // Математические заметки (в печати)

A.19 Abrosimov N. V. The volume of a hyperbolic tetrahedron in terms of edge lengths / N. V. Abrosimov, B. Vuong // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. (в печати)

A.20 Колесников И. А. Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца // Сибирский математический журнал (в печати)

A.21 Крылов П. А. Хорошие кольца формальных матриц бесконечного порядка / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // Известия высших учебных заведений. Математика (в печати)

A.22 Gol'dshtein V. Space quasiconformal composition operators with applications to Neumann eigenvalues / V. Gol'dshtein, R. Hurri-Syrjanen, V. Pchelintsev, A. Ukhlov // Journal d'Analyse Mathématique Preprint version is available at arXiv: 2006.07009 (в печати)

A.23 Gol'dshtein V. Quasiconformal mappings and Neumann eigenvalues of divergent elliptic operators / V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, A. Ukhlov // Complex Variables and Elliptic Equations (в печати)

A.24 Bubenchikov A. M. Movement of fullerenes and their dimers inside open carbon nanotubes / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, D. V. Mamontov, A. S. Chelnokova, S. P. Chumakova // Fullerenes Nanotubes and Carbon Nanostructures (в печати)

A.25 Gibanov N. S. Comparative analysis of the lattice Boltzmann method and the finite difference method for two-dimensional and three-dimensional problems of natural convection in closed cavities with heat sources / N. S. Gibanov, M. A. Sheremet // Mathematical Methods in the Applied Sciences (в печати)