

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГУ)

УДК 514.1
Reg. № НИОКТР АААА-А19-119120690010-8
Reg. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной и
инновационной деятельности
д-р физ.-мат. наук, профессор

А.Б. Ворожцов

« 27 » декабря 2019 г.



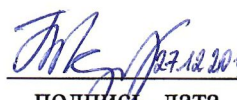
ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
(промежуточный, этап 2)


Соглашение № 075-02-2019-2245

Книга 1

Начальник научного управления
канд. геол.-минерал. наук

 Т.С. Краснова
подпись, дата

Руководитель НИР,
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

 А.Ю. Веснин
подпись, дата

Томск 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР

гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук,
чл.-корр. РАН


27.12.2019
подпись, дата

А.Ю. Веснин
(введение, разделы 1-2,
заклучение)

Исполнители:

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


27.12.2019
подпись, дата

А.М. Бубенчиков
(подразделы 1.7, 2.3)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


27.12.2019
подпись, дата


Е.А. Тимошенко
(подраздел 1.4)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


27.12.2019
подпись, дата

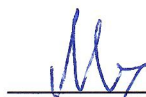
Н.В. Абросимов
(подраздел 1.2.)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


27.12.2019
подпись, дата

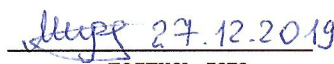
Т.А. Козловская
(подраздел 1.3.)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


28.12.2019
подпись, дата

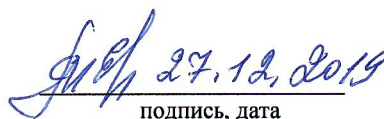
И.Ю. Могильных
(подраздел 1.5.)

Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


27.12.2019
подпись, дата

И.В. Мирошниченко
(подраздел 1.6.)

Нормоконтролер


27.12.2019
подпись, дата

Е.Н. Соколенко

РЕФЕРАТ

Отчет 58 с., 1 кн., 11 рис., 1 табл., 49 источн., 1 прил.

АБЕЛЕВА ГРУППА, ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК, КОДИРОВАНИЕ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, НАНОЖИДКОСТЬ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Объектами исследования являются многообразия малой размерности, гиперболические многогранники, абелевы группы, группы автоморфизмов кода Адамара и кода Хэмминга, конвективный теплоперенос в наножидкостях, межмолекулярное взаимодействие фуллеренов в фуллерите.

Цель научно-исследовательской работы (НИР) – получение новых научных результатов, направленных на развитие теорий, описывающих свойства исследуемых объектов.

В ходе выполнения НИР построены новые инварианты нотоидов, опирающиеся на инварианты виртуальных узлов; получены необходимые и достаточные условия, при которых трехмерное многообразие, склеенное из двух полноториев вдоль общей поверхности с краем, является полноторием; установлены условия реализации компактного тетраэдра общего вида в гиперболическом пространстве в терминах сигнатуры его второй матрицы Грама; дано геометрическое доказательство гипотезы Бардакова-Веснина-Сингха о ранге группы крашенных твинов; установлен критерий единственности стандартной формы матриц с элементами из произвольного подкольца поля рациональных чисел; получен критерий определяемости вполне разложимой группы ранга 2 ее группой автоморфизмов; построены конструкции гомогенных совершенных кодов и решена проблема их рангов; определены основные закономерности конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых областях при наличии источников тепловыделения; разработана модель молекулярного взаимодействия внутри фуллерита и определена частота вращения фуллереновых сфер в его пластической фазе.

В рамках научно-образовательной деятельности Центра в 2019 году было модернизировано содержание пяти образовательных модулей, прочитаны два новых спецкурса сотрудниками Центра, организована работа двух еженедельных научных семинаров, проведено 9 научно образовательных мероприятий, в диссертационный совет представлены 2 диссертации на соискание ученой степени кандидата наук под руководством сотрудника Центра, при поддержке Центра 3 аспиранта ТГУ прошли стажировки в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва).

Таким образом, все запланированные результаты в соответствии с Планом развития Центра на 2019 год получены.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 Научная составляющая	11
1.1 Развитие теории сложности трехмерных многообразий, построение новых инвариантов узлов и их обобщений.....	11
1.2 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	15
1.3 Исследование структурных свойств группы твинов	20
1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп.....	24
1.5 Исследование оптимальных кодов, исправляющих ошибки, а также их связи с теорией графов	28
1.6 Проведение численных исследований в области турбулентного конвективно-радиационного теплопереноса.....	33
1.7 Математическое моделирование физических явлений в области молекулярной физики	39
2 Образовательная составляющая.....	44
2.1 Приглашение в Томск ведущих ученых и лекторов.....	44
2.2 Проведение научно-образовательных мероприятий при поддержке Центра.....	45
2.3 Стажировки студентов, аспирантов и молодых ученых в ведущих академических институтах и университетах	46
2.4 Модернизация содержания образовательных модулей и программ.....	46
2.5 Научное руководство студентами и аспирантами, осуществляемое сотрудниками Центра	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	50
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	53
Приложение А (обязательное) Публикации	57

ВВЕДЕНИЕ

Проведенная научно-исследовательская работа была сконцентрирована на семи основных направлениях:

1) Развитие теории сложности трехмерных многообразий, построение новых инвариантов узлов и их обобщений. В отчетный период исследования по топологии малых размерностей проходили в двух направлениях: первое направление было связано с исследованием сложности строения трехмерных многообразий, а второе – с построением инвариантов узлов и их обобщений. При исследовании многих свойств связанных замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий удобно представлять такое многообразие в виде объединения двух полноториев одного и того же рода вдоль их общей границы с помощью гомеоморфизма поверхности. Такое представление называют представлением Хегора, обычно оно описывается диаграммой Хегора, а соответствующая двумерная поверхность называется поверхностью Хегора. Родом Хегора трехмерного многообразия называется минимальных род полноториев среди всех его представлений Хегора (см. [1]). Многообразия рода один хорошо известны, в то время как класс многообразий рода два далек от полного описания. Для многих задач род Хегора удобно использовать в качестве меры сложности трехмерного многообразия. Пусть теперь два полнотория объединяются вдоль поверхности с краем, являющейся частью их общей границы. Очевидно, результатом такого объединения будет трехмерное многообразие с краем. Возникает следующий вопрос: при каких условиях полученное трехмерное многообразие является полноторием? Проведенное исследование позволило ответить на этот вопрос и получить необходимые и достаточные условия.

Второе направление исследований, проведенное за отчетный период, связано с построением полиномиальных инвариантов нотоидов. Понятие нотоида было предложено В.Г. Тураевым [2] в 2012 г. Во многом, это понятие аналогично понятию узла, однако, рассматриваются вложения не окружности, а отрезка. А именно, под диаграммой нотоида понимают такое погружение отрезка в двумерную сферу, при котором множество сингулярных точек конечно и каждая из них является двойным трансверсальным перекрестком с указанием, какая дуга проходит «над», а какая – «под». При таком подходе под нотоидом понимают класс эквивалентности диаграмм нотоидов относительно трех классических движений Рейдемейстера в областях, не затрагивающих концы диаграммы (отрезка). Гугумчи и Кауффман [3] предложили метод построения некоторых инвариантов нотоидов по инвариантам соответствующих виртуальных узлов. В рамках данного проекта мы строим инварианты нотоидов, основанные на полиномиальных инвариантах узлов, построенных А. Весниным, К. Каур и М. Прабхакаром [4] в 2018 г.

2) Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многообразий и орбифолдов. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. Как известно, в силу теоремы жесткости Мостова, любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Примерами таких геометрических инвариантов являются длины геодезических и объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести проблему вычисления объема многообразия к проблеме вычисления объема многогранника. Задача получения формул объемов гиперболических многогранников в частных случаях решалась еще Н.И. Лобачевским. В общем случае задача является настолько сложной, что к настоящему времени она решена лишь для гиперболических многогранников простейшего комбинаторного типа – тетраэдров. Как правило, получение формул объемов опирается на предварительное получение соотношений между длинами ребер и двугранными углами многогранника, с последующим применением вариационной формулы Шлефли.

В 1988 г. В.-Ю. Хсянг [5] предложил возможный подход для получения объема гиперболического тетраэдра. Решение задачи удалось получить лишь в 1999 г. Ю. Чо и Х. Киму [6], однако предложенная формула была несимметрична относительно перестановки аргументов – двугранных углов. В 2005 г. Дж. Мураками и Ю. Яно [7] получили симметричную формулу. В 2006 году А. Ушиджима [8] предложил геометрическое доказательство формулы Мураками-Яно. Однако и формула Чо-Кима, и формула Мураками-Яно выражают объем гиперболического тетраэдра с помощью 16 дилוגарифмических функций или функций Лобачевского, зависящих от двугранных углов и дополнительных комплексных параметров, геометрический смысл которых неочевиден. С другой стороны, в 2005 г. Д.А. Деревнин и А.Д. Медных [9] предложили интегральную формулу, выражающую объем гиперболического тетраэдра через его двугранные углы. Удивительно, но еще в 1907 г. итальянский математик Г. Сфорца [10] нашел другую интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах его (первой) матрицы Грама, то есть в терминах двугранных углов. К сожалению, работа [10], опубликованная на итальянском языке, долгое время оставалась забытой. Новое простое доказательство формулы Сфорца дано в недавней работе Н.В. Абросимова и А.Д. Медных [11].

В данном проекте нами установлены критерии реализации гиперболического тетраэдра общего вида в терминах его второй матрицы Грама, то есть длин его ребер. Также

нами получены формулы, выражающие косинусы двугранных углов гиперболического тетраэдра через длины ребер. Указанные соотношения позволяют решать систему дифференциальных уравнений типа Шлефли в частных производных. Планируется, что это позволит на следующем этапе выполнения проекта впервые получить точную формулу для объема гиперболического тетраэдра общего вида в терминах длин ребер.

3) Исследование структурных свойств группы твинов. Предметом изучения были группы, которые связаны с комбинаторной топологией, а именно группы твинов. Эти группы были введены Г. Шабатом и В. Воеводским и принадлежат к классу прямоугольных групп Кокстера. В работе [7] исследованы группы крашенных твинов на трех и четырех нитях, найдены порождающие этих групп, представлены геометрические свойства.

В данном проекте мы отвечаем на некоторые открытые вопросы, поставленные в работе [12] В.Г. Бардакова, А.Ю. Веснина и М. Сингха, связанные с группами твинов и предлагаем подходы для их изучения. В отчетном периоде нами найдены порождающие группы крашенных твинов RT_5 . Построен фундаментальный многогранник и изучены структурные свойства этой группы.

4) Изучение автоморфизмов абелевых групп. Так называемые теоремы изоморфизма, описывающие ситуации, в которых абелева группа может быть восстановлена по некоторой связанной с ней алгебраической структуре, стали появляться еще в первой половине XX века (в качестве одной из отправных точек можно указать работу Р. Бэра [13]) и к настоящему моменту представляют собой интенсивно развивающееся алгебраическое направление. Одной из наиболее известных теорем изоморфизма является классическая теорема Бэра – Капланского, согласно которой две периодические абелевы группы с изоморфными кольцами эндоморфизмов должны быть изоморфны.

Ряд теорем изоморфизма, связанных с кольцами эндоморфизмов, был получен в работах С. Баццони и К. Метелли [14], У. Мэя [15] и многих других авторов. В работах Ф. Шульца [16], М. Флэгг [17] и ряда других алгебраистов вместо изоморфизма колец эндоморфизмов рассматривался изоморфизм радикалов Джекобсона этих колец; Е.И. Бунина и А.В. Михалёв [18] рассматривали вопрос об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов p -групп.

Основатель томской алгебраической школы И.Х. Беккер вместе с учениками рассматривал вопрос об определяемости абелевой группы ее голоморфом. Один из упомянутых учеников, А.М. Себельдин, в работе [19] описал все вполне разложимые группы без кручения, определяющиеся своим кольцом эндоморфизмов. Позднее в [20] он же описал все вполне разложимые группы без кручения, определяющиеся своей полугруппой эндоморфизмов.

Поскольку группа автоморфизмов абелевой группы G несет меньше информации о G , чем полугруппа или кольцо эндоморфизмов группы G , то следующим этапом исследования вполне разложимых групп естественным образом стал вопрос о том, какие вполне разложимые группы без кручения определяются своей группой автоморфизмов. Этой теме была посвящена защищенная в 2014 году в ТГУ диссертация В.К. Вильданова (ученика А.М. Себельдина) [21], в которой доказан ряд важных теорем. Одним из основных инструментов доказательства упомянутых теорем стали инволюции, т.е. автоморфизмы, квадрат которых совпадает с тождественным автоморфизмом.

Важным частным случаем, помогающим понять строение групп автоморфизмов вполне разложимых групп в общем случае, являются однородные вполне разложимые группы, приводящие к необходимости изучения полных линейных групп $GL_n(R)$ над подкольцом R поля рациональных чисел \mathbf{Q} . Посвятивший отдельную статью [17] ситуации $n = 2$ П.М. Кон особо отмечает, что этот случай заслуживает самого пристального внимания, так как существенно отличается от случая $n > 2$ тем, что при $n = 2$ строение группы $GL_n(R)$ значительно меньше зависит от мультипликативного строения кольца R .

В данном проекте получен полный ответ на вопрос о том, когда для колец $R, S \subset \mathbf{Q}$ возможен изоморфизм $GL_2(R) \cong GL_2(S)$, что позволило получить необходимые и достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов вполне разложимых групп ранга 2 и найти все вполне разложимые группы ранга 2, определяемые своими группами автоморфизмов.

Предполагается, что в дальнейшем это поможет получить ответы на аналогичные вопросы для вполне разложимых групп более высоких рангов.

5) Исследование оптимальных кодов, исправляющих ошибки, а также их связи с теорией графов. Исследование пропелинейных и гомогенных кодов представляется важным в теории оптимальных кодов в силу того обстоятельства, что эти коды близки по многим свойствам к классическим линейным кодам, представляя собой уникальную иерархию строго вложенных друг в друга семейств совершенных кодов: класс линейных кодов вкладывается в класс пропелинейных, который вложен в класс транзитивных кодов, последний класс, в свою очередь, вложен в класс гомогенных кодов, см. [22]. Более того, часто нелинейные коды, будучи пропелинейными, имеют лучшие параметры, чем линейные. Например, Z_4 -линейные классы кодов Препараты и Кердока, Рида-Маллера, совершенных кодов, кодов Адамара [23]. Коды Препараты двукратно превосходят по мощности лучшие линейные коды с таким же кодовым расстоянием – знаменитые коды БЧХ, широко используемые на практике.

Следует отметить, что на сегодняшний день классы пропелинейных кодов недостаточно глубоко исследованы, по сравнению с классами классических линейных кодов. Тем не менее, они обладают глубокими возможностями как с теоретической точки зрения – научного интереса с точки зрения теории корректирующих кодов, так и с практической, например, для использования в криптографии в криптосистемах с открытыми ключами – криптосистемах по типу Мак-Элиса или Нидеррайтера. В рамках проекта построена новая серия пропелинейных кодов, полностью решена проблема их рангов и ядер.

б) Проведение численных исследований в области конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых областях при наличии источников энергии. Исследование сложного теплообмена (конвекция, теплопроводность и излучение) в замкнутых областях имеет большое значение при моделировании физических процессов, связанных с рациональным использованием энергии. Существенный интерес к данному виду исследований обусловлен, в первую очередь, их первостепенной важностью для понимания физических процессов, протекающих в современных энергетических и технологических сооружениях различного рода.

В процессе работы оборудования выделяется тепловая энергия, которую необходимо своевременно отводить для обеспечения его надежного функционирования. Математическое моделирование помогает предвидеть потенциальные проблемы, которые возникают при недостаточно эффективном охлаждении источников тепловыделения, и помогает определить оптимальные тепловые характеристики для устойчивой работы устройств. Одним из подходов к разработке эффективных систем пассивного охлаждения тепловыделяющих элементов является схема, основанная на интенсификации процессов конвективно-радиационного теплопереноса. В частности, ранее показано [24], что изменение степени черноты тепловыделяющего устройства позволяет снизить его тепловое сопротивление до 25%.

Во многих прикладных задачах рассматриваются такие режимы течения и теплопереноса, которые характеризуются либо большими скоростями движения сплошной среды, либо большими характерными размерами области решения. В этой связи для корректного описания процессов теплопереноса необходимо учитывать их турбулентный характер. Детальный обзор существующих экспериментальных и численных работ в области турбулентной естественной конвекции в замкнутых областях без и при наличии источников тепловыделения проведен в [25]. Установлено, что работ, посвященных численному исследованию сложного теплообмена (излучение, конвекция и кондукция) в областях различной геометрии не так много. Связан данный факт, прежде всего, с

математическими и вычислительными сложностями при описании совместных эффектов рассматриваемых процессов передачи тепла. В этой связи особое внимание должно уделяться исследованиям турбулентных режимов конвективно-радиационного теплопереноса в областях с локальными источниками тепловыделения.

7) Математическое моделирование физических явлений в области молекулярной физики, в частности процессов синтеза и состояния молекулярных кристаллов, решает важную задачу разработки новых материалов, используемых в фундаментальных и прикладных исследованиях. В сущности, метод математического моделирования является единственным способом анализа динамики не измеряемых характеристик материала. Нельзя не упомянуть о прогностической функции достаточно универсальной математической модели, которая позволяет оценить свойства еще конструируемых материалов. Еще одно важное качество – это экономичность метода математического моделирования, позволяющая в кратчайшие сроки проанализировать большое количество вариантов и решить задачу оптимизации параметров системы при создании нового функционального материала. В связи с этим описание вращения стандартных фуллеренов в твердой фазе фуллерита было проведено с использованием математического моделирования. Для нахождения угловой скорости фуллерена и определения характера вращения предложен путь интегрирования динамических уравнений Эйлера для проекций вектора угловой скорости молекулы на оси координат, связанные с фуллереном. Последовательно описаны этапы компьютерной симуляции движения фуллеренов, которая проведена без использования уже разработанных пакетов молекулярно-динамического моделирования.

Все запланированные на 2019 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены. Все полученные результаты являются новыми, они прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

1 Научная составляющая

1.1 Развитие теории сложности трехмерных многообразий, построение новых инвариантов узлов и их обобщений

В отчетном периоде исследования по топологии малых размерностей проходили в двух направлениях: первое направление было связано с исследованием сложности строения трехмерных многообразий, а второе – с построением инвариантов узлов и их обобщений. При исследовании многих свойств связанных замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий удобно представлять такое многообразие в виде объединения двух полноториев одного и того же рода вдоль их общей границы с помощью гомеоморфизма поверхности. Такое представление называют представлением Хегора, обычно оно описывается диаграммой Хегора, а соответствующая двумерная поверхность называется поверхностью Хегора. Родом Хегора трехмерного многообразия называется минимальный род полноториев среди всех его представлений Хегора [1]. Для многих задач род Хегора удобно использовать в качестве меры сложности трехмерного многообразия. В последнее время интенсивно исследуется поведение рода Хегора при операциях суммы многообразий (см. [26], [27]).

Если мы предположим, что два полнотория объединяются не по всей общей поверхности, а лишь по лежащему в ней диску, то получим новый объект, называемый связной суммой полноториев. Это объединение также является полноторием. Рассмотрим теперь случай, когда два полнотория объединяются вдоль поверхности, являющейся лишь частью их общей границы. Очевидно, результатом такого объединения будет трехмерное многообразие с краем. Некоторые свойства суммы многообразий вдоль общего кольца исследовались в [28]. Возникает следующий вопрос: при каких условиях полученное трехмерное многообразие является полноторием? Проведенное в рамках данного проекта исследование позволило ответить на этот вопрос и получить необходимые и достаточные условия. Второе направление исследований, проведенное за отчетный период, связано с построением полиномиальных инвариантов нотоидов. Понятие нотоида было предложено В. Г. Тураевым [2]. Во многом это понятие аналогично понятию узла, однако, рассматриваются вложения не окружности, а отрезка. А именно, под диаграммой нотоида понимают такое погружение отрезка в двумерную сферу, при котором множество сингулярных точек конечно и каждая из них является двойным трансверсальным перекрестком с указанием, какая дуга проходит «над», а какая – «под». При таком подходе под нотоидом понимают класс эквивалентности диаграмм нотоидов относительно трех классических движений Рейдемейстера в областях, не затрагивающих концы диаграммы (отрезка). Новая идея нотоидов и их активное использование при моделировании

биополимеров инициировали активные исследования по построению инвариантов нотоидов. В работе [3] Гугумчи и Кауффман предложили метод построения некоторых инвариантов нотоидов по инвариантам соответствующих виртуальных узлов. В данном проекте мы строим инварианты нотоидов, основанные на полиномиальных инвариантах узлов, построенных в 2018 г. в работе А. Веснина, К. Каур и М. Прабхакара [4].

Методы. Тематика исследования относится к топологической теории трехмерных многообразий. Классические методы этой теории описаны в замечательных монографиях Хемпеля. Современные методы были развиты в работах Шарлемана, Джейко, Шультенц, Лея. Доказательства основных утверждений работы используют топологические и алгебраические подходы к характеристике полноториев. Напомним, что полноторием рода n называется такое трехмерное многообразие, для которого существует множество D из попарно непересекающихся собственно вложенных дисков такое, что разрезание вдоль дисков этого множества приводит к трехмерному шару. Параллелью на полнотории называется простая замкнутая кривая на его границе, которая только пересекает существенный диск только в одной точке. Хорошо известно следующее свойство: если M – компактное неприводимое трехмерное многообразие с непустой границей и его фундаментальная группа свободна, то M является полноторием. Доказательства приведенных ниже теорем используют следующую лемму.

Лемма. Пусть N – полноторие рода n , а J – простая замкнутая кривая на его границе. Обозначим через $N(J)$ трехмерное многообразие, полученное приклеиванием к N 2-ручки вдоль кривой J . Многообразие $N(J)$ является полноторием тогда и только тогда, когда J является параллелью N .

Доказательство теоремы 2 проводится индукцией по абсолютной величине эйлеровой характеристики поверхности, вдоль которой происходит склеивание. Идеи доказательства подробно рассматриваются на примере проколотого тора. В этом случае две замкнутые кривые могут быть расположены как на рисунке 1.

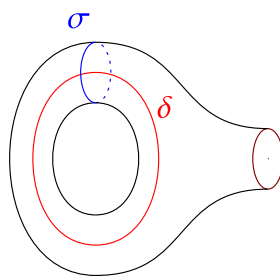


Рисунок 1 – Замкнутые кривые на проколотом торе

Здесь одна кривая является примитивной в одном полнотории, а другая – во втором.

Результаты и обсуждения. В рамках выполнения проекта исследованы свойства трехмерных многообразий, представимых как объединение двух полноториев вдоль общей поверхности. Получены необходимые и достаточные условия того, что объединение двух полноториев вдоль кольца или проколотого тора является полноторием. А именно, доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1. Объединение двух полноториев N_1 и N_2 вдоль кольца A является полноторием тогда и только тогда, когда сердцевинная кривая кольцо A является параллелью для полнотория N_1 или для полнотория N_2 .

Теорема 1.2. Пусть N – объединение двух полноториев N_1 и N_2 вдоль поверхности S . Пусть S имеет по крайней мере один прокол, род полноториев не меньше двух, и S является несжимаемой поверхностью в каждом из них. Многообразие N является полноторием тогда и только тогда, когда существует набор $\{J_1, \dots, J_m\}$ порождающих кривых фундаментальной группы поверхности S , допускающий разбиение на два множества, первое из которых является примитивным в N_1 , а второе – примитивным в N_2 .

В части построения инвариантов нотоидов основной метод состоит в использовании инвариантов соответствующих виртуальных узлов. Сопоставление нотоиду виртуального узла было независимо предложено в работе С. Сато и в работе Н. Гугумчи и Л. Кауффмана [3]. Оно состоит в рассмотрении преобразования, позволяющего «протаскивать» концы отрезка в соседние области благодаря введению новых виртуальных перекрестков. Осуществляя такие «протаскивания», можно определить виртуальное замыкание нотоида. В силу преобразования обхода (detour move), виртуальное замыкание нотоида корректно определено. Такой подход позволяет использовать в качестве инвариантов нотоидов известные инварианты из виртуальных замыканий. В работе [3] этот метод был реализован для построения инварианта нотоида, соответствующего аффинному индексному полиному виртуального узла. В данной работе мы строим инварианты нотоидов, соответствующие семейству полиномиальных инвариантов виртуальных узлов, которые были построены в работе [4]. Эти полиномы возникают как обобщение конструкции аффинного индексного полинома. В дальнейшем будет разработано программное обеспечение для компьютерного вычисления указанных инвариантов нотоидов.

З а к л ю ч е н и е. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых сумма двух полноториев вдоль поверхности с краем является полноторием. Построены инварианты нотоидов, основанные на полиномиальных инвариантах виртуальных узлов. Таким образом, все запланированные на 2019 год результаты получены. Часть полученных результатов, а именно, для случаев кольца и проколотого тора, была опубликована в препринте [A.12], а затем общий случай – в работе [A.13], принятой в печать. Установлено,

что нули полиномов Ямады заузленных графов образуют всюду плотное множество на комплексной плоскости [А.1]. Это свойство аналогично свойству нулей полиномиальных инвариантов узлов. Построены инварианты нотоидов, являющиеся инвариантами Веснина-Каур-Прабхакара виртуальных замыканий нотоидов. Эти инварианты обобщают ранее известный инвариант, связанный с аффинным индексным полиномом Кауффмана. Результаты, относящиеся к инвариантам нотоидов находятся в стадии оформления. Полученные результаты были представлены на международных конференциях по топологии трехмерных многообразий и теории узлов, и на конференциях по алгебраической топологии. Были сделаны следующие научные доклады:

1) А.Ю. Веснин, «Новые инварианты виртуальных узлов», Топологический семинар в Челябинском государственном университете под руководством академика С.В. Матвеева, 5 ноября 2019 г.

2) А.Ю. Веснин, «Right-angled hyperbolic Coxeter groups, census of polyhedral and construction of 3-manifolds», приглашенный доклад в Корейском институте передовых исследований (Сеул, Корея), 21 октября 2019 г. <http://www.kias.re.kr>

3) А.Ю. Веснин, «On a census of right-angled hyperbolic polyhedra», приглашенный доклад в Сеульском национальном университете (Сеул, Корея), 18 октября 2019 г.

4) А.Ю. Веснин, «New polynomial invariants of virtual knots», приглашенный доклад на математическом коллоквиуме в Университете Инха (Инчон, Корея), 16 октября 2019 г.

5) А.Ю. Веснин, «О прямоугольных гиперболических многогранниках», пленарный доклад на международной конференции по геометрическому анализу, посвященной 90-летию академика Ю.Г. Решетняка, Новосибирск, 22-28 сентября 2019 г.

<https://sites.google.com/view/conf-ga-2019-ru/главная?authuser=0>

6) А.Ю. Веснин, «Various aspects of cyclically presented groups», доклад в Харбинском инженерном университете (Харбин, Китай), 2 августа 2019 г.

7) А.Ю. Веснин, «Distance properties of fullerene graphs», пленарный доклад на Конференции по вычислительной топологии (Далянь, Китай), 21-31 июня 2019 г.

8) А.Ю. Веснин, «New polynomial invariants of virtual knots», доклад на Топологическом семинаре в Даляньском технологическом университете, 19 июня 2019 г.

9) А.Ю. Веснин, «On the Wiener complexity and the Wiener index of fullerene graphs», пленарный доклад на 6-й Российско-Китайской конференции по теории узлов и смежным вопросам, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 18-21 июня 2019 г. <http://labtd.nsu.ru/6RCCCT>

1.2 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

Введение. Гиперболический тетраэдр T – это выпуклая оболочка четырех точек (вершин) в гиперболическом пространстве \mathbb{H}^3 .

Обозначим вершины T числами 1, 2, 3 и 4. Через l_{ij} обозначим гиперболическую длину ребра, соединяющего i -ю и j -ю вершины, а через θ_{ij} – двугранный угол вдоль этого ребра (рисунок 2).

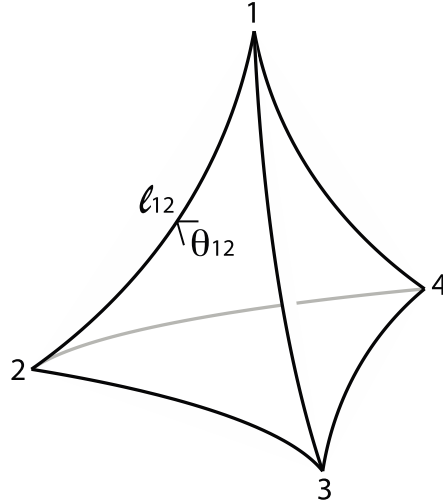


Рисунок 2 – Гиперболический тетраэдр T

(Первая) матрица Грама $G(T)$ гиперболического тетраэдра T определяется как

$$G(T) = \langle -\cos\theta_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{14} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} & -\cos\theta_{24} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 & -\cos\theta_{34} \\ -\cos\theta_{14} & -\cos\theta_{24} & -\cos\theta_{34} & 1 \end{pmatrix}, \text{ здесь мы полагаем}$$

$-\cos\theta_{ii} = 1$.

Вторая матрица Грама (или реберная матрица) $E(T)$ гиперболического

$$\text{тетраэдра } T \text{ определяется как } E(T) = \langle \text{chl}_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & \text{chl}_{12} & \text{chl}_{13} & \text{chl}_{14} \\ \text{chl}_{12} & 1 & \text{chl}_{23} & \text{chl}_{24} \\ \text{chl}_{13} & \text{chl}_{23} & 1 & \text{chl}_{34} \\ \text{chl}_{14} & \text{chl}_{24} & \text{chl}_{34} & 1 \end{pmatrix},$$

где $l_{ii} = 0$ и $\text{chl}_{ii} = 1$.

Хорошо известно, что гиперболический тетраэдр T определяется с точностью до изометрии как длинами своих ребер, так и набором своих двугранных углов. Поэтому как матрица Грама $G(T)$, так и реберная матрица $E(T)$ – каждая содержит всю геометрическую информацию о тетраэдре T . Здесь мы видим некоторое отличие от евклидовой геометрии,

в которой лишь длины ребер определяют тетраэдр, в то время как двугранные углы задают тетраэдр только с точностью до подобия.

В работах А. Ушиджимы (2003) и А. Медных, М. Пашкевич (2006) были установлены основные свойства матрицы Грама гиперболического тетраэдра:

Теорема (Ушиджима, Медных, Пашкевич). Пусть T – компактный гиперболический тетраэдр, заданный своей матрицей Грама G . Тогда

- (i) $\det G < 0$,
- (ii) $c_{ii} > 0, i \in \{1,2,3,4\}$,
- (iii) $\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}$,

где $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$ – ij -кофактор матрицы Грама G .

Указанная теорема была применена в недавней работе [11] для доказательства классической формулы Сфорца, выражающей объем гиперболического тетраэдра в терминах его матрицы Грама.

В данном проекте были установлены аналогичные свойства – но для второй матрицы Грама $E(T)$ гиперболического тетраэдра T . В том числе, получены формулы, выражающие косинусы его двугранных углов через длины ребер. Установлены условия реализации компактного тетраэдра общего вида в гиперболическом пространстве в терминах сигнатуры его второй матрицы Грама.

Другое направление исследований связано с изучением самоподобных дендритов. Посткритически конечные множества заняли значительное место в теории самоподобных множеств. Они обладают рядом замечательных геометрических свойств. К. Бандт доказал [29], что множество хаусдорфовых размерностей минимальных поддуг любого посткритически конечного множества конечно. Значительно меньше известно про не посткритически конечные множества. В данном проекте мы показываем, что в случае не посткритически конечных дендритов такие свойства также могут возникнуть. Нами построено бесконечное семейство не посткритически конечных дендритов на плоскости, у которых все поддуги (то есть путь, соединяющий любые две точки дендрита) имеют одинаковые хаусдорфовы размерности (то есть множество размерностей дуг не просто конечно, а состоит из единственного значения). Этот пример показывает, что в теореме Бандта условие посткритической конечности является в некотором смысле избыточным.

Методы. Для изучения многогранников в пространстве Лобачевского, допускающих нетривиальные симметрии, авторами разработан оригинальный и достаточно универсальный подход. Сначала соответствующий многогранник моделируется в евклидовом пространстве. Затем координаты вершин евклидова многогранника помещаются в проективную модель Кэли-Клейна пространства Лобачевского и

рассматривается выпуклая оболочка этих вершин в гиперболической метрике. Это дает проективную модель соответствующего гиперболического многогранника. Мы используем векторную алгебру в пространстве Минковского для вычисления гиперболических длин ребер и двугранных углов такого многогранника. Далее, симметрия многогранника позволяет исключить из выражений параметры, зависящие от выбора системы координат, и найти прямые соотношения между длинами и углами гиперболического многогранника в форме теорем косинусов. Полученные соотношения между длинами и углами дают возможность найти точные решения уравнения Шлефли в частных производных, которые дают интегральные формулы для гиперболического объема.

Результаты и обсуждения. Первый результат состоит в получении критерия существования компактного тетраэдра общего вида в пространстве Лобачевского в терминах длин его ребер.

Теорема 2.1. Компактный гиперболический тетраэдр T существует тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств

$$(i) \quad a + b \geq e \geq |a - b|,$$

$$(ii) \quad c + d \geq e \geq |c - d|,$$

$$(iii) \quad f_1 \leq f \leq f_2, \text{ где } chf_{1,2} = cha chd - (cha che - chb)(chd che - chc) \operatorname{csch}^2 e \pm \pm \sqrt{(ch b - ch(a + e))(ch b - ch(a - e))(ch c - ch(d + e))(ch c - ch(d - e))}$$

Второй результат устанавливает свойства второй матрицы Грама (реберной матрицы) $E(T)$ гиперболического тетраэдра T , и, в частности, дает формулы, выражающие косинусы его двугранных углов через длины ребер.

Теорема 2.2. Пусть T – компактный гиперболический тетраэдр, заданный реберной матрицей E . Тогда имеют место следующие соотношения

$$(i) \quad \det E < 0,$$

$$(ii) \quad c_{ii} \cdot c_{jj} > 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$(iii) \quad \cos \theta_{ij} = \frac{-c_{5-i,5-j}}{\sqrt{c_{5-i,5-i} c_{5-j,5-j}}}, \text{ где } c_{ij} = (-1)^{i+j} E_{ij} - ij\text{-кофактор реберной матрицы } E.$$

Другой результат связан с изучением самоподобных дендритов на плоскости. Пусть Δ – треугольник на плоскости \mathbb{R}^2 с вершинами $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Обозначим множество вершин $\{A_1, A_2, A_3\}$ через V_Δ . Пусть r_1, r_2, r_3 – такие положительные числа, что $r_1 + r_2 + r_3 < 1$. Зададим сжимающие подобия с неподвижными точками в вершинах V_Δ следующим образом

$$S_1 = r_1 z, S_2 = r_2 z - r_2 + 1, S_3 = r_3 z - r_3 e^{i\pi/3} + e^{i\pi/3}.$$

Обозначим $\Delta_k = S_k(\Delta)$. Пусть K' – канторово множество, порожденное сжимающими отображениями S_1, S_2, S_3 . Каждая точка $x \in K'$ определяется единственной последовательностью индексов $\tilde{a} = a_1 a_2 \dots$, где $a_k \in \{1, 2, 3\}$.

Рассмотрим равносторонний треугольник Δ_0 , вершины B_1, B_2, B_3 которого удовлетворяют условиям

$$B_1 \in K' \cap S_{12}([A_2 A_3]), B_2 \in K' \cap S_{23}([A_1 A_3]), B_3 \in K' \cap S_{31}([A_1 A_2]). \quad (1)$$

Пусть S_0 – подобие, которое отображает точки A_1, A_2, A_3 в точки B_1, B_2, B_3 соответственно, и пусть $O = \text{fix}(S_0)$ – его неподвижная точка.

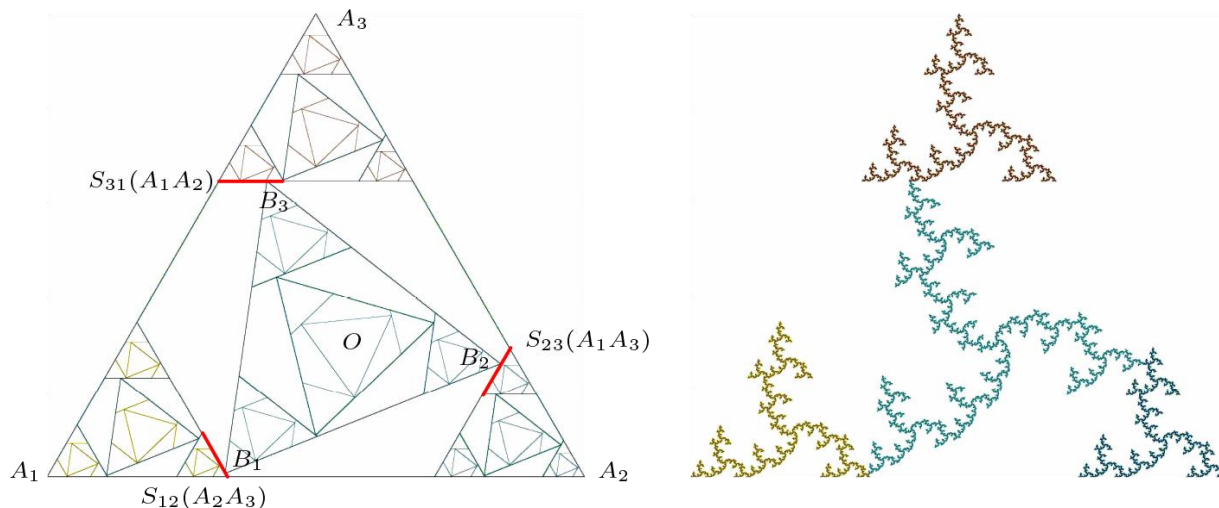


Рисунок 3 – Самоподобный дендрит, порожденный системой подобий S_1, S_2, S_3, S_0

Результат состоит в построении бесконечного семейства самоподобных не посткритически конечных дендритов (рисунок 3), все поддуги которых имеют одинаковую хаусдорфову размерность.

Теорема 2.3. Пусть $S = \{S_1, S_2, S_3, S_0\}$ – система сжимающих подобий, определенных выше, с параметрами $r_1, r_2, r_3, B_1, B_2, B_3$, удовлетворяющих условию (1). Тогда аттрактор K системы сжимающих отображений S является дендритом. Более того, все поддуги K имеют одинаковую хаусдорфову размерность. При дополнительном условии, что адрес хотя бы одной из точек B_1, B_2, B_3 выбран непериодическим, построенный дендрит K является не посткритически конечным множеством.

З а к л ю ч е н и е . Установлены условия реализации компактного тетраэдра общего вида в гиперболическом пространстве в терминах сигнатуры его второй матрицы Грама. Получены формулы, выражающие косинусы его двугранных углов через длины ребер. Построено бесконечное семейство не посткритически конечных дендритов, все поддуги которых имеют одинаковую хаусдорфову размерность. Таким образом, все запланированные на 2019 год результаты получены. Часть полученных результатов

опубликована в статье [А.2], другая часть готовится к публикации. Все результаты прошли апробацию на международных конференциях и исследовательских семинарах:

1) VI Российско-Китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, 17-21 июня 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge matrix» (пленарный доклад) <http://labtd.nsu.ru/6RCCKT>

2) Вторая международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», Томский государственный университет, Томск, Россия, 25-28 июня 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge matrix» (приглашенный доклад) http://gqlt.rmc.math.tsu.ru/?page_id=106&lang=ru

3) Международная конференция «Combinatorial and algebraic aspects of geometric structures», Университет Чиангмая, Чиангмай, Таиланд, 22-26 июля 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge matrix» (устный доклад) <http://www.math.science.cmu.ac.th/lst/index.php>

4) Международная конференция «Groups and graphs, designs and dynamics» (G2D2-2019), Математический центр Три ущелья, Ичан, Китай, 12-25 августа 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge matrix» (устный доклад) <http://math.sjtu.edu.cn/conference/G2D2/Conference/index.html>

5) Международная конференция «28th Workshop on Cycles and Colourings» (C&C 2019), Университет им. П. Шафарика в Кошице, Новый Смоковец, Словакия, 1-6 сентября 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge matrix» (устный доклад) <https://candc.upjs.sk/history/19list.pdf>

6) Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», Томский государственный университет, Томск, Россия, 23-27 апреля 2019 г. – Н.В. Абросимов «Formulas for a compact hyperbolic tetrahedron» (секционный доклад) <http://conf.math.tsu.ru/>

7) Topology Seminar of School of Mathematical Sciences, Даляньский Университет Технологий, Далянь, Китай, 17-18 октября 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge lengths» (приглашенный доклад) <http://math.dlut.edu.cn/info/1019/10785.htm>

8) Научный семинар «Математический коллоквиум», Томский государственный университет, Томск, Россия, 25 октября 2019 г. – Н.В. Абросимов «Объем произвольного компактного гиперболического тетраэдра в терминах его реберной матрицы» (приглашенный доклад) <http://rmc.math.tsu.ru/shestoe-zasedanie-matematicheskogo-lektoriya-i-kollokviuma/>

9) Research Seminar of Institute for Advanced Study in Mathematics, Институт перспективных исследований в области математики, Харбинский Институт Технологий, Харбин, Китай, 1 ноября 2019 г. – Н.В. Абросимов «Volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edge lengths» (приглашенный доклад) <http://im.hit.edu.cn/2019/1021/c8405a230979/page.htm>

10) Seminario Cruz del Sur, Университет Ла-Фронтера, Темуко, Чили, 25-26 ноября 2019 г. – Н.В. Абросимов «The volume of a compact hyperbolic tetrahedron in terms of its edges» (приглашенный доклад) <http://dme.ufro.cl/index.php/investigacion/seminarios-cruz-del-sur>

1.3 Исследование структурных свойств группы твинов

Введение. Конечный набор замкнутых кривых на сфере, плоскости или другом многообразии, не имеющих самопересечений и тройных пересечений называется каракулем (doodles). Каракули были определены Р. Феном и П. Тейлором в [30]. Позже М.Г. Хованов рассматривал каракули как конечные наборы замкнутых кривых, не имеющих тройных пересечений на ориентированной поверхности [31]. К дудлам применима теория инвариантов В. Васильева, эти инварианты конечного порядка классифицируют каракули. В теории дудлов, твины (twin) являются аналогами кос из теории зацеплений. Каждое зацепление может быть получено как замыкание косы, а каждый дудл – как замыкание твина (см. [31]). Группы твинов T_n , $n \geq 2$ принадлежат классу прямоугольных групп Кокстера, они были введены Г. Шабатом и В. Воеводским как картографические группы Гротендика. Известно, что с именем Гротендика связано понятие «детский рисунок» (dessin d'enfant), поскольку объектом его изучения были линии, нарисованные на замкнутых поверхностях. Геометрическая интерпретация группы твинов приведена М. Ховановым (рисунок 4), в отличие от кос мы не различаем, что проходит «сверху», а что «снизу».

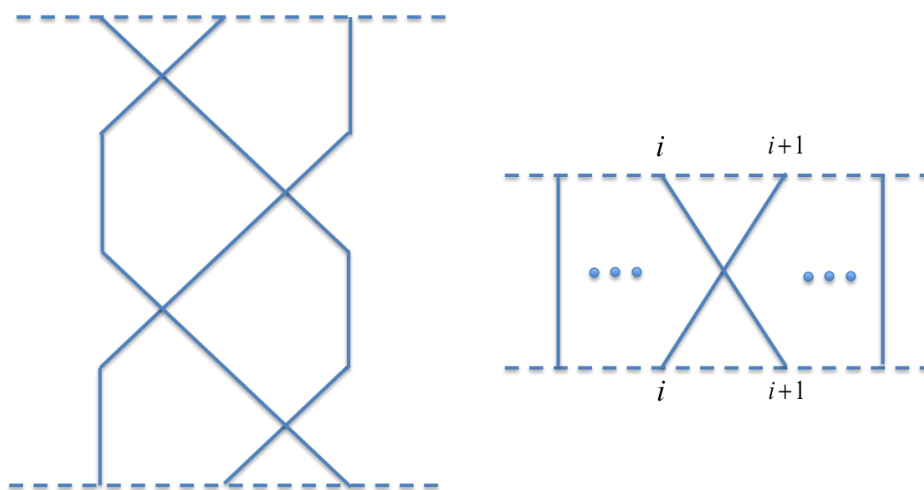


Рисунок 4 – Геометрическая интерпретация группы твинов. Порождающий s_i

Группа твинов $T_n, n \geq 2$ задается порождающими $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ и определяющими соотношениями $s_i^2 = 1$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i - j| \geq 2$. Отметим, что $T_2 = \langle s_1 | s_1^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2$ и $T_3 = \langle s_1, s_2 | s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Группой крашенных твинов $PT_n, n \geq 2$ называется ядро гомоморфизма группы твинов T_n на группу подстановок S_n , отображающего порождающий s_i в транспозицию $(i, i+1), i = \overline{1, n-1}$. Заметим, что $PT_2 = 1, PT_3 = \langle (s_1 s_2)^3 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

В работе В.Г. Бардакова, А.Ю. Веснина и М. Сингха исследованы группы крашенных твинов на 4-х нитях, найдены порождающие этой группы, представлены геометрические свойства этой группы. Показано, что PT_4 реализуется как фундаментальная группа двумерной сферы с 8 проколами, доказано, что $PT_4 \cong \mathbb{Z}_7$.

Методы. Для нахождения конечного копредставления группы мы используем метод Рейдемейстера-Шрайера (см. [32]) и геометрический метод склеивания трехмерного многообразия из набора тетраэдров. Геометрический подход позволяет дать доказательство, отличное от алгебраического доказательства, предложенного в [33].

Результаты и обсуждения. Построим фундаментальный многогранник (рисунок 5) с использованием методов Рейдемейстера-Шрайера [32]. Выпишем следующие отождествления сторон многогранника:

$$\begin{aligned}
 & B_1^1 \rightarrow B_0^1; B_{12}^1 \rightarrow B_2^1; B_{121}^1 \rightarrow B_2^1; B_2^2 \rightarrow B_0^2; B_{121}^2 \rightarrow B_{12}^2; B_1^2 \rightarrow B_{21}^2; B_3^3 \rightarrow B_0^3; B_{31}^3 \rightarrow B_1^3; \\
 & B_{32}^3 \rightarrow B_2^3; B_{312}^3 \rightarrow B_{12}^3; B_{3121}^3 \rightarrow B_{121}^3; B_{31}^1 \rightarrow B_3^1; B_{312}^1 \rightarrow B_{32}^1; B_{321}^1 \rightarrow B_{21}^1; B_{3121}^1 \rightarrow B_{321}^1; \\
 & B_{32}^2 \rightarrow B_{232}^2; B_3^3 \rightarrow B_{23}^3; B_{123}^1 \rightarrow B_{23}^1; B_{1231}^1 \rightarrow B_{231}^1; B_{1232}^1 \rightarrow B_{232}^1; B_{321}^2 \rightarrow B_{2321}^2; \\
 & B_{3121}^2 \rightarrow B_{23121}^2; B_{31}^2 \rightarrow B_{231}^2; B_{312}^2 \rightarrow B_{2312}^2; B_{12321}^1 \rightarrow B_{2321}^1; B_{12312}^1 \rightarrow B_{2312}^1; \\
 & B_{123121}^1 \rightarrow B_{23121}^1; B_{1231}^2 \rightarrow B_{123}^2; B_{12312}^2 \rightarrow B_{1232}^2; B_{123121}^2 \rightarrow B_{12321}^2; B_{1232}^3 \rightarrow B_{123}^3; \\
 & B_{12321}^3 \rightarrow B_{1231}^3; B_{123121}^3 \rightarrow B_{12312}^3; B_{2312}^3 \rightarrow B_{23121}^3; B_{232}^3 \rightarrow B_{23}^3; B_{2321}^3 \rightarrow B_{231}^3.
 \end{aligned}$$

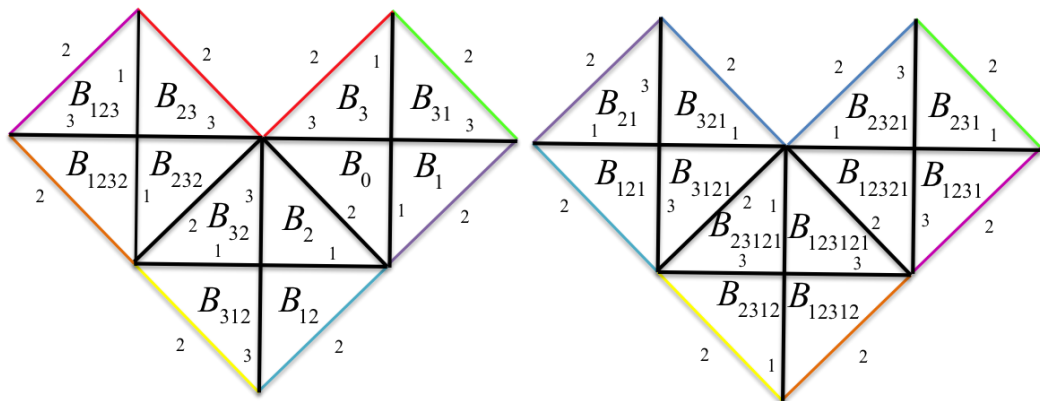


Рисунок 5 – Фундаментальный многогранник при $n = 4$

Получим многообразие размерности 2, фундаментальной группой которого является данная группа. С помощью программы SnapPy установлено, что $PT_4 \cong \mathbb{Z}_7$.

В недавней работе [12] доказано, что PT_n при $n = 3, 4$ - свободная группа и не свободная при $n \geq 6$. Авторами статьи сформулирована гипотеза о том, что PT_5 свободная группа ранга 31. Для геометрического доказательства верности гипотезы Бардакова-Веснина-Сингха о ранге группы крашенных твинов рассмотрим случай $n = 5$. Аналогично группе крашенных твинов на 4-х нитях, выпишем отождествления граней тетраэдров (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Отождествления граней тетраэдров

$T_0^1 \rightarrow T_1^1$	$T_0^2 \rightarrow T_2^2$	$T_2^1 \rightarrow T_{12}^1$	$T_1^2 \rightarrow T_{21}^2$	$T_0^3 \rightarrow T_3^3$
$T_0^4 \rightarrow T_4^4$	$T_1^3 \rightarrow T_{13}^3$	$T_1^4 \rightarrow T_{14}^4$	$T_3^1 \rightarrow T_{13}^1$	$T_2^4 \rightarrow T_{24}^4$
$T_3^2 \rightarrow T_{23}^2$	$T_2^3 \rightarrow T_{32}^3$	$T_4^1 \rightarrow T_{14}^1$	$T_4^2 \rightarrow T_{24}^2$	$T_3^4 \rightarrow T_{43}^4$
$T_4^3 \rightarrow T_{34}^3$	$T_{12}^2 \rightarrow T_{121}^2$	$T_{12}^3 \rightarrow T_{132}^3$	$T_{12}^4 \rightarrow T_{124}^4$	$T_{13}^2 \rightarrow T_{213}^2$
$T_{14}^2 \rightarrow T_{214}^2$	$T_{14}^3 \rightarrow T_{134}^3$	$T_{13}^4 \rightarrow T_{143}^4$	$T_{23}^4 \rightarrow T_{243}^4$	$T_{21}^4 \rightarrow T_{214}^4$
$T_{21}^1 \rightarrow T_{121}^1$	$T_{21}^3 \rightarrow T_{321}^3$	$T_{23}^3 \rightarrow T_{232}^3$	$T_{24}^3 \rightarrow T_{324}^3$	$T_{23}^1 \rightarrow T_{123}^1$
$T_{24}^1 \rightarrow T_{124}^1$	$T_{32}^1 \rightarrow T_{132}^1$	$T_{34}^1 \rightarrow T_{134}^1$	$T_{43}^1 \rightarrow T_{143}^1$	$T_{32}^2 \rightarrow T_{232}^2$
$T_{34}^2 \rightarrow T_{234}^2$	$T_{43}^2 \rightarrow T_{243}^2$	$T_{123}^2 \rightarrow T_{1213}^2$	$T_{132}^2 \rightarrow T_{2132}^2$	$T_{413}^2 \rightarrow T_{2413}^2$
$T_{143}^2 \rightarrow T_{2143}^2$	$T_{43}^3 \rightarrow T_{343}^3$	$T_{121}^3 \rightarrow T_{1321}^3$	$T_{123}^3 \rightarrow T_{1232}^3$	$T_{143}^3 \rightarrow T_{1343}^3$
$T_{32}^4 \rightarrow T_{432}^4$	$T_{34}^4 \rightarrow T_{343}^4$	$T_{121}^4 \rightarrow T_{1214}^4$	$T_{123}^4 \rightarrow T_{1243}^4$	$T_{132}^4 \rightarrow T_{1432}^4$
$T_{134}^4 \rightarrow T_{1343}^4$	$T_{213}^1 \rightarrow T_{1213}^1$	$T_{124}^2 \rightarrow T_{1214}^2$	$T_{213}^3 \rightarrow T_{2321}^3$	$T_{124}^3 \rightarrow T_{3412}^3$
$T_{213}^4 \rightarrow T_{2143}^4$	$T_{232}^1 \rightarrow T_{1232}^1$	$T_{234}^1 \rightarrow T_{1234}^1$	$T_{243}^1 \rightarrow T_{1243}^1$	$T_{321}^1 \rightarrow T_{1321}^1$
$T_{234}^3 \rightarrow T_{2324}^3$	$T_{243}^3 \rightarrow T_{3243}^3$	$T_{232}^4 \rightarrow T_{2432}^4$	$T_{234}^4 \rightarrow T_{2343}^4$	$T_{343}^1 \rightarrow T_{1343}^1$
$T_{324}^1 \rightarrow T_{1324}^1$	$T_{321}^2 \rightarrow T_{2321}^2$	$T_{324}^2 \rightarrow T_{2324}^2$	$T_{343}^2 \rightarrow T_{2343}^2$	$T_{321}^4 \rightarrow T_{4321}^4$
$T_{324}^4 \rightarrow T_{3432}^4$	$T_{214}^1 \rightarrow T_{1214}^1$	$T_{432}^1 \rightarrow T_{1432}^1$	$T_{432}^2 \rightarrow T_{2432}^2$	$T_{1232}^2 \rightarrow T_{12132}^2$
$T_{1234}^2 \rightarrow T_{12134}^2$	$T_{1243}^2 \rightarrow T_{14213}^2$	$T_{214}^3 \rightarrow T_{3214}^3$	$T_{432}^3 \rightarrow T_{3432}^3$	$T_{1213}^3 \rightarrow T_{12321}^3$
$T_{1234}^3 \rightarrow T_{12324}^3$	$T_{1214}^3 \rightarrow T_{13214}^3$	$T_{1243}^3 \rightarrow T_{13243}^3$	$T_{1213}^4 \rightarrow T_{12143}^4$	$T_{1213}^4 \rightarrow T_{12432}^4$
$T_{1234}^4 \rightarrow T_{12343}^4$	$T_{2132}^1 \rightarrow T_{12132}^1$	$T_{1321}^2 \rightarrow T_{21321}^2$	$T_{1324}^2 \rightarrow T_{21324}^2$	$T_{1343}^2 \rightarrow T_{21343}^2$
$T_{1432}^3 \rightarrow T_{13432}^3$	$T_{1321}^4 \rightarrow T_{14321}^4$	$T_{1324}^4 \rightarrow T_{13432}^4$	$T_{1432}^2 \rightarrow T_{21432}^2$	$T_{2132}^4 \rightarrow T_{21432}^4$
$T_{2132}^3 \rightarrow T_{21321}^3$	$T_{2321}^1 \rightarrow T_{12321}^1$	$T_{2321}^4 \rightarrow T_{24321}^4$	$T_{2134}^1 \rightarrow T_{12134}^1$	$T_{2134}^3 \rightarrow T_{23214}^3$

Продолжение таблицы 1

$T_{2134}^4 \rightarrow T_{21343}^4$	$T_{2324}^4 \rightarrow T_{23432}^4$	$T_{2324}^1 \rightarrow T_{12324}^1$	$T_{2343}^1 \rightarrow T_{12343}^1$	$T_{2343}^3 \rightarrow T_{23243}^3$
$T_{2143}^3 \rightarrow T_{32143}^3$	$T_{2143}^1 \rightarrow T_{12143}^1$	$T_{2432}^1 \rightarrow T_{12432}^1$	$T_{3214}^1 \rightarrow T_{13214}^1$	$T_{3243}^1 \rightarrow T_{13243}^1$
$T_{3432}^1 \rightarrow T_{13432}^1$	$T_{3214}^2 \rightarrow T_{23214}^2$	$T_{3243}^2 \rightarrow T_{23243}^2$	$T_{3432}^2 \rightarrow T_{23432}^2$	$T_{2432}^3 \rightarrow T_{32432}^3$
$T_{3214}^4 \rightarrow T_{34321}^4$	$T_{3243}^4 \rightarrow T_{32432}^4$	$T_{4321}^2 \rightarrow T_{24321}^2$	$T_{4321}^3 \rightarrow T_{34321}^3$	$T_{4321}^1 \rightarrow T_{14321}^1$
$T_{12132}^3 \rightarrow T_{121321}^3$	$T_{12132}^4 \rightarrow T_{121432}^4$	$T_{12321}^2 \rightarrow T_{121321}^2$	$T_{12321}^4 \rightarrow T_{124321}^4$	$T_{12324}^4 \rightarrow T_{123432}^4$
$T_{12343}^2 \rightarrow T_{121343}^2$	$T_{12324}^2 \rightarrow T_{123124}^2$	$T_{12343}^3 \rightarrow T_{123243}^3$	$T_{12134}^3 \rightarrow T_{123214}^3$	$T_{12134}^4 \rightarrow T_{121343}^4$
$T_{12143}^3 \rightarrow T_{132143}^3$	$T_{12432}^2 \rightarrow T_{121432}^2$	$T_{13214}^2 \rightarrow T_{213214}^2$	$T_{12432}^3 \rightarrow T_{132432}^3$	$T_{13214}^4 \rightarrow T_{134321}^4$
$T_{13243}^2 \rightarrow T_{213243}^2$	$T_{13432}^1 \rightarrow T_{213432}^1$	$T_{14321}^2 \rightarrow T_{214321}^2$	$T_{14321}^3 \rightarrow T_{134321}^3$	$T_{13243}^4 \rightarrow T_{132432}^4$
$T_{21321}^1 \rightarrow T_{121321}^1$	$T_{23243}^1 \rightarrow T_{123243}^1$	$T_{23214}^1 \rightarrow T_{123214}^1$	$T_{21324}^3 \rightarrow T_{213214}^3$	$T_{21321}^4 \rightarrow T_{214321}^4$
$T_{21324}^1 \rightarrow T_{121324}^1$	$T_{23432}^1 \rightarrow T_{123432}^1$	$T_{21343}^1 \rightarrow T_{121343}^1$	$T_{23432}^3 \rightarrow T_{232432}^3$	$T_{23214}^4 \rightarrow T_{234321}^4$
$T_{34321}^2 \rightarrow T_{234321}^2$	$T_{32432}^2 \rightarrow T_{232432}^2$	$T_{31343}^3 \rightarrow T_{232143}^3$	$T_{21324}^4 \rightarrow T_{213432}^4$	$T_{23243}^4 \rightarrow T_{232432}^4$
$T_{34321}^1 \rightarrow T_{134321}^1$	$T_{32432}^1 \rightarrow T_{132432}^1$	$T_{32143}^1 \rightarrow T_{132143}^1$	$T_{24321}^3 \rightarrow T_{324321}^3$	$T_{32143}^2 \rightarrow T_{232143}^2$
$T_{24321}^1 \rightarrow T_{124321}^1$	$T_{21432}^1 \rightarrow T_{121432}^1$	$T_{23214}^2 \rightarrow T_{1213214}^2$	$T_{21432}^3 \rightarrow T_{321432}^3$	$T_{32143}^4 \rightarrow T_{324321}^4$
$T_{123432}^2 \rightarrow T_{1213432}^2$	$T_{121324}^3 \rightarrow T_{1213214}^3$	$T_{123243}^2 \rightarrow T_{1213243}^2$	$T_{123214}^4 \rightarrow T_{1234321}^4$	$T_{121321}^4 \rightarrow T_{1214321}^4$
$T_{134321}^2 \rightarrow T_{2134321}^2$	$T_{132432}^2 \rightarrow T_{2132432}^2$	$T_{121343}^3 \rightarrow T_{1232143}^3$	$T_{121324}^4 \rightarrow T_{1213432}^4$	$T_{123243}^4 \rightarrow T_{1232432}^4$
$T_{132143}^2 \rightarrow T_{2132143}^2$	$T_{124321}^3 \rightarrow T_{1324321}^3$	$T_{123432}^3 \rightarrow T_{1232432}^3$	$T_{132143}^4 \rightarrow T_{1324321}^4$	$T_{232143}^4 \rightarrow T_{2324321}^4$
$T_{232143}^1 \rightarrow T_{1232143}^1$	$T_{124321}^2 \rightarrow T_{1214321}^2$	$T_{121432}^3 \rightarrow T_{1321432}^3$	$T_{213432}^3 \rightarrow T_{2321432}^3$	$T_{213243}^4 \rightarrow T_{2132432}^4$
$T_{213243}^1 \rightarrow T_{1213243}^1$	$T_{213432}^1 \rightarrow T_{1213432}^1$	$T_{213243}^3 \rightarrow T_{2132143}^3$	$T_{321432}^1 \rightarrow T_{1321432}^1$	$T_{213214}^4 \rightarrow T_{2134321}^4$
$T_{213214}^1 \rightarrow T_{1213214}^1$	$T_{234321}^1 \rightarrow T_{1234321}^1$	$T_{232432}^1 \rightarrow T_{1232432}^1$	$T_{324321}^2 \rightarrow T_{2324321}^2$	$T_{2321432}^2 \rightarrow T_{2321432}^2$
$T_{324321}^1 \rightarrow T_{1324321}^1$	$T_{234321}^3 \rightarrow T_{2324321}^3$	$T_{321432}^4 \rightarrow T_{3214321}^4$	$T_{1213243}^4 \rightarrow T_{12132432}^4$	$T_{214321}^3 \rightarrow T_{3214321}^3$
$T_{214321}^1 \rightarrow T_{1214321}^1$	$T_{1232143}^2 \rightarrow T_{12132143}^2$	$T_{1232143}^4 \rightarrow T_{12324321}^4$	$T_{1234321}^3 \rightarrow T_{12324321}^3$	$T_{1213243}^3 \rightarrow T_{12132143}^3$
$T_{1213432}^3 \rightarrow T_{12321432}^3$	$T_{1234321}^2 \rightarrow T_{12134321}^2$	$T_{1213214}^4 \rightarrow T_{12134321}^4$	$T_{1214321}^3 \rightarrow T_{13214321}^3$	$T_{1232432}^2 \rightarrow T_{12132432}^2$
$T_{1321432}^2 \rightarrow T_{21321432}^2$	$T_{1321432}^4 \rightarrow T_{13214321}^4$	$T_{1324321}^2 \rightarrow T_{21324321}^2$	$T_{2132432}^3 \rightarrow T_{21321432}^3$	$T_{2321432}^4 \rightarrow T_{23214321}^4$
$T_{2321432}^1 \rightarrow T_{12321432}^1$	$T_{2132432}^1 \rightarrow T_{12132432}^1$	$T_{2132143}^1 \rightarrow T_{12132143}^1$	$T_{2134321}^3 \rightarrow T_{23214321}^3$	$T_{2132143}^4 \rightarrow T_{21324321}^4$
$T_{3214321}^1 \rightarrow T_{13214321}^1$	$T_{3214321}^2 \rightarrow T_{23214321}^2$	$T_{2324321}^1 \rightarrow T_{12324321}^1$	$T_{12321432}^2 \rightarrow T_{121321432}^2$	$T_{2134321}^1 \rightarrow T_{12134321}^1$
$T_{12134321}^3 \rightarrow T_{123214321}^3$	$T_{12132143}^4 \rightarrow T_{121324321}^4$	$T_{12132432}^3 \rightarrow T_{121321432}^3$	$T_{21321432}^1 \rightarrow T_{121321432}^1$	$T_{12321432}^4 \rightarrow T_{123214321}^4$
$T_{12324321}^2 \rightarrow T_{121324321}^2$	$T_{13214321}^2 \rightarrow T_{213214321}^2$	$T_{21324321}^3 \rightarrow T_{213214321}^3$	$T_{123214321}^2 \rightarrow T_{1213214321}^2$	$T_{23214321}^1 \rightarrow T_{123214321}^1$

Продолжение таблицы 1

$T_{21324321}^1 \rightarrow T_{121324321}^1$	$T_{213214321}^1 \rightarrow T_{1213214321}^1$	$T_{21321432}^4 \rightarrow T_{213214321}^4$	$T_{121324321}^3 \rightarrow T_{1213214321}^3$	$T_{121321432}^4 \rightarrow T_{1213214321}^4$
--	--	--	--	--

З а к л ю ч е н и е. В отчетном периоде найдены порождающие группы крашенных твинов PT_5 . Построен фундаментальный многогранник и изучены структурные свойства группы на пяти нитях. Исследованы геометрические свойства этой группы, позволяющие дать геометрическое доказательство гипотезы Бардакова-Веснина-Сингха о ранге группы крашенных твинов для $n = 5$. Также, с помощью применения топологических методов были получены новые результаты о группах, допускающих циклическое представление, опубликованные в статье [А.3]. Запланированные на 2019 год результаты получены. Результаты прошли апробацию на следующих конференциях:

1) Вторая международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», Томский государственный университет, Томск, Россия, 25-28 июня 2019 г. – Т.А. Козловская «Cyclically presented Sieradski groups with even number of generators and three dimensional manifolds (пленарный доклад)

http://gqlt.rmc.math.tsu.ru/?page_id=106&lang=ru

2) Конференция, посвященная 100-летию В.А. Рохлина «Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100», Институт им. Л. Эйлера, г. Санкт-Петербург, 19-23 августа 2019 г. – Т.А. Козловская «Cyclically presented Sieradski groups and 3-manifolds» (секционный доклад) <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2019/tgd/index.html>

1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп

В в е д е н и е. Как отмечал еще Л. Фукс в своей знаменитой монографии [34], при работе с инволюциями возникают определенные сложности: «эти автоморфизмы не обеспечивают нас информацией в том же объеме, что и проекции; к тому же во избежание излишних трудностей... необходимо предположить, что умножение на 2 есть автоморфизм группы». И действительно, многие теоремы в работах В. К. Вильданова [21, 35], посвящённых определяемости вполне разложимых групп их группами автоморфизмов, доказаны в предположении, что вполне разложимая группа 2-делима. Здесь можно проследить определенные параллели с задачей об определяемости абелевой p -группы ее группой автоморфизмов: для $p > 3$ она была решена Х. Лептином в 1960 году [36], для $p = 3$ – В. Либертом в 1980-х годах [37], а случай $p = 2$, как отмечается в последнем издании монографии Л. Фукса [38], до сих пор остается открытой проблемой. Таким образом, для решения поставленных в рамках данного проекта задач нужны новые подходы, которые

позволят избавиться от требования 2-делимости при рассмотрении определяемости вполне разложимой группы ее группой автоморфизмов.

Методы. Для исследования полной линейной группы $GL_2(R)$ матриц порядка 2 над произвольным подкольцом R поля рациональных чисел \mathbf{Q} использовались предложенные П. М. Коном [39] подходы, связанные с понятием стандартной формы матрицы. Для решения вопроса об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 её группой автоморфизмов использовались модифицированные В. К. Вильдановым для случая $R, S \subset \mathbf{Q}$ методы П. М. Кона, разработанные в той же статье [39] для изучения изоморфизмов вида $GL_2(R) \cong GL_2(S)$, где R и S – кольца. Методы В. К. Вильданова, в свою очередь, были усовершенствованы таким образом, чтобы они оказались применимы к ситуации, когда хотя бы одно из колец R и S не является 2-делимым.

Результаты и обсуждения. Для ассоциативного кольца с единицей R через $U(R)$ обозначаем множество всех обратимых элементов этого кольца; через $GL_2(R)$ – группу обратимых (2×2) -матриц с элементами из R .

Определение 4.1 [Кон]. Назовём стандартной формой матрицы $C \in GL_2(R)$ всякую запись этой матрицы в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $t \geq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\alpha, \beta \in U(R)$;
- 2) если $1 < i < t$, то $a_i \notin U(R) \cup \{0\}$;
- 3) если $t = 2$, то a_1 и a_2 не могут быть равны 0 одновременно.

Определение 4.2 [Кон]. Будем говорить, что кольцо R :

- имеет единственную стандартную форму, если всякая матрица $C \in GL_2(R)$ имеет не более одной стандартной формы;
- квазисвободно, если единичная матрица E обладает единственной стандартной формой (в которой $t = 0$ и $\alpha = \beta = 1$).

Следующие предложение и теорема дают полный ответ на вопрос о том, когда каким-либо из указанных двух свойств обладают факторкольца кольца целых чисел \mathbf{Z} и подкольца поля рациональных чисел \mathbf{Q} .

Предложение 4.1. Пусть $R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $n > 1$. Следующие условия эквивалентны:

- а) R имеет единственную стандартную форму;
- б) R квазисвободно;
- в) n – простое число.

Теорема 4.1. 1) Подкольцо поля \mathbf{Q} квазисвободно тогда и только тогда, когда оно совпадает с \mathbf{Q} или с \mathbf{Z} .

2) Подкольцо поля \mathbf{Q} имеет единственную стандартную форму тогда и только тогда, когда оно совпадает с \mathbf{Q} .

Через $\text{Aut}(G)$ обозначим группу автоморфизмов абелевой группы G . Сведения, полученные о строении групп $GL_2(R)$ для случая $R \subset \mathbf{Q}$, дают возможность завершить начатое в [18] исследование вопроса о том, при каких условиях для вполне разложимых групп (без кручения) G и H ранга 2 выполнено $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$, распространив полученные ранее результаты на более сложный случай, когда группы G и H не обязательно являются 2-делимыми.

Через $t(A)$ обозначается тип группы без кручения A , имеющей ранг 1.

Определение 4.3. Пусть $G = A \oplus B$, где A и B – группы без кручения ранга 1. Будем называть группу G :

- жёсткой, если типы $t(A)$ и $t(B)$ несравнимы;
- полуоднородной, если $t(A) < t(B)$ или $t(A) > t(B)$;
- однородной, если $t(A) = t(B)$ (т.е. если $A \cong B$).

Теорема 4.2. Если G – жёсткая (полуоднородная, однородная) вполне разложимая группа ранга 2 и для вполне разложимой группы H выполнено $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$, то H – тоже жёсткая (полуоднородная, однородная) вполне разложимая группа ранга 2.

Таким образом, остаётся по отдельности рассмотреть группы автоморфизмов жёстких, полуоднородных и однородных вполне разложимых групп ранга 2. Через $P(A)$ в следующем предложении обозначено множество всех простых чисел p , для которых абелева группа A является p -делимой.

Предложение 4.2. Пусть $G = A \oplus B$ и $H = C \oplus D$ – жёсткие вполне разложимые группы ранга 2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$;
- 2) $|P(A)| + |P(B)| = |P(C)| + |P(D)|$.

Через $\text{Hom}(B, A)$, как обычно, обозначается группа гомоморфизмов из B в A .

Теорема 4.3. Пусть $G = A \oplus B$ и $H = C \oplus D$ – полуоднородные вполне разложимые группы ранга 2, причём $t(A) > t(B)$ и $t(C) > t(D)$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$;
- 2) $\text{Hom}(B, A) \cong \text{Hom}(D, C)$ и $\text{Aut}(B) \cong \text{Aut}(D)$.

Ясно, что множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ всех матриц с определителем ± 1 является подгруппой в $GL_2(R)$. Следующая теорема даёт полный ответ на вопрос о том, когда две

однородные вполне разложимые группы ранга 2 имеют изоморфные группы автоморфизмов (через $E(A)$ обозначаем кольцо эндоморфизмов абелевой группы A):

Теорема 4.4. Пусть $G = A \oplus A$ и $H = C \oplus C$ – однородные вполне разложимые группы ранга 2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$;
- 2) $GL_2(E(A)) \cong GL_2(E(C))$;
- 3) $ML_2(E(A)) \cong ML_2(E(C))$;
- 4) $E(A) \cong E(C)$.

Определение 4.4. Пусть $G \in X$, где X – некоторый класс групп. Мы будем говорить, что G определяется своей группой автоморфизмов в классе X , если из $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$, где $H \in X$, всегда следует $G \cong H$.

Из предложения 4.2 и теорем 4.3 и 4.4 видно, что в большинстве случаев вполне разложимая группа ранга 2 не определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 2. Точнее, справедлива

Теорема 4.5. Пусть G – вполне разложимая группа ранга 2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 2;
- 2) G определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп;
- 3) $G \cong A \oplus A$, где группа A ранга 1 такова, что $P(A)$ содержит почти все простые числа.

З а к л ю ч е н и е. Таким образом, был установлен критерий единственности стандартной формы матриц с элементами из произвольного подкольца поля рациональных чисел. Для вполне разложимых абелевых групп (без кручения) ранга 2 дан полный ответ на вопрос о том, когда группы автоморфизмов таких абелевых групп изоморфны между собой. В частности, описаны все вполне разложимые группы ранга 2, определяющиеся своими группами автоморфизмов. Тем самым все запланированные на 2019 год результаты получены. Часть полученных результатов опубликована в статьях [А.4], [А.5] и [А.6], другая часть готовится к публикации. Все результаты прошли апробацию на семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета и на следующих конференциях:

- 1) XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Тула, Россия, 23-28

сентября 2019 г. – В. А. Гайдак и Е. А. Тимошенко «Инволюции группы GL_2 над подкольцом поля рациональных чисел» (секционный доклад) <http://poivs.tsput.ru/conf/international/XVII/info>

2) Всероссийская молодёжная научная конференция «Все грани математики и механики», Томский государственный университет, Томск, 23-27 апреля 2019 г. – М. Н. Зонов и Е. А. Тимошенко «О стандартных формах (2×2) -матриц» (секционный доклад) <http://conf.math.tsu.ru>

3) Всероссийская молодёжная научная конференция «Все грани математики и механики», Томский государственный университет, Томск, 23-27 апреля 2019 г. – В. А. Гайдак и Е. А. Тимошенко «Критерий сопряжённости инволюций для (2×2) -матриц» (секционный доклад) <http://conf.math.tsu.ru>

4) Научный семинар «Математический коллоквиум», Томский государственный университет, Томск, Россия, 22 марта 2019 г. – Е. А. Тимошенко «Универсальные множества простых чисел» (приглашенный доклад) <http://rnc.math.tsu.ru/doklad-e-a-timoshenko-na-matematicheskom-kollokviume/>

1.5 Исследование оптимальных кодов, исправляющих ошибки, а также их связи с теорией графов

Введение. Напомним необходимые определения и понятия: через F^n обозначим n -мерное пространство двоичных векторов длины n над полем Галуа F из двух элементов. В дальнейшем под двоичным кодом понимается произвольную совокупность двоичных векторов фиксированной длины. Группа автоморфизмов кода C это совокупность изометрий пространства F^n , т.е. преобразований, сохраняющих расстояние Хэмминга между парой различных кодовых слов, переводящих код в себя.

Совершенный код C называется гомогенным, если все системы троек Штейнера кодов $C+u$, u из C , изоморфны. Система троек Штейнера – это комбинаторная блок-схема, состоящая из трехэлементных блоков (троек) таких, что каждая неупорядоченная пара из базового множества точек содержится в точности в одной тройке. Хорошо известно, что носители кодовых слов веса 3 в любом совершенном двоичном коде образуют систему троек Штейнера. Гомогенные коды впервые были определены Остергардом с соавторами в 2010 г. Код называется транзитивным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на коде. Пропелинейным кодом [40] называется код, группа автоморфизмов которых действует регулярно на кодовых словах кода. Очевидно, что любой пропелинейный код является гомогенным, обратное, вообще говоря, неверно.

Известно, что пропелинейные коды могут быть получены классическими конструкциями Плоткина и Васильева. В 2013 г. Могильных с соавторами доказали, что все транзитивные коды Потапова малого ранга (т.е. размерности подпространства в F^n , натянутого на код) являются пропелинейными и, следовательно, гомогенными. Эти коды были впоследствии обобщены Кротовым и Потаповым для построения экспоненциального класса пропелинейных кодов (также малого ранга) с использованием квадратичной функции в конструкции Васильева. Заметим, что метод построения Васильева был обобщен посредством конструкции Моллара в работе Могильных с соавторами в 2012 г. Более того, известно, что ранги Z_4 -линейных совершенных расширенных кодов длины n не превосходят половины возможных значений рангов совершенных кодов, аналогичные ограничения верны и для рангов Z_2Z_4 -линейных совершенных кодов. Проблема построения пропелинейных совершенных кодов различных рангов – так называемая проблема рангов для пропелинейных совершенных кодов, была рассмотрена в работе [41]. Решение проблемы приведено за исключением нескольких малых значений длин кодов. Результат базируется на конструкции Моллара.

Основной проблемой теории пропелинейных кодов является конструирование кодов, чья группа автоморфизмов содержит регулярную подгруппу, которая либо абелева, либо близка к ней в некотором смысле, например, циклическая, подгруппа Z_4 или диэдральная группы. Долгое время оставался нерешенным вопрос построения пропелинейных кодов методом, отличным от метода построения Моллара, а также не было изучено применение классического каскадного метода построения совершенных кодов Соловьевой-1981, см. [42]. Также не была решена проблема ядер (каковы возможные размерности ядер – линейных подпространств максимальной мощности нелинейных кодов), как и проблема рангов и ядер пропелинейных совершенных двоичных кодов. Напомним, что последняя проблема для совершенных кодов была решена в работе [43].

В рамках данного проекта был получен новый класс пропелинейных и, как следствие, гомогенных совершенных и расширенных совершенных двоичных кодов длины n рангов из множества $\{2^r-1, \dots, 2^r-2\}$ и размерностей ядер $\{2^r-2r-2, \dots, 2^r-r-3\}$. Результат получен на базе каскадной конструкции [42], используя разбиение полного четно-веса кода на расширенные совершенные линейные коды (коды Хэмминга) длины 2^r и подстановку элементов разбиения. Предложенная конструкция использует автоморфизмы регулярных подгрупп общей аффинной группы F^r . Были исследованы ранги и размерности ядер полученных кодов. Показано, что любой такой код с размерностью ядра 2^r-2r-2 неэквивалентен ни одному пропелинейному коду Моллара. Построена бесконечная серия новых пропелинейных совершенных кодов рангов, отличных от полного (нетрудно

показать, что достижимость кодов полного ранга данной каскадной конструкцией невозможна). Для получения результатов были применены методы, разработанные в работе [44] к регулярным подгруппам полной аффинной группы, а также в работе [45].

Методы. Для построения нового класса гомотенных совершенных кодов была использована известная конструкция Соловьевой относящаяся к каскадным методам конструирования кодов. В ходе исследования выяснилось, что эти коды обладают дополнительными алгебраическими свойствами, а именно являются пропелинейными и такие коды проще конструировать. Напомним, что всякий пропелинейный код является гомотенным, однако обратное не верно [22]. Идейно исследования регулярных подгрупп группы $GA(r,2)$ восходят к работе [45] ранее написанной И. Ю. Могильных под эгидой НОМЦ ТГУ. Действие всякого автоморфизма такой подгруппы естественным образом индуцирует подстановку на двоичных векторах длины r . В основе конструкции нового класса кодов лежит разбиение на смежные классы по коду Хэмминга и вышеописанная подстановка, индуцированная действием автоморфизма регулярных подгрупп общей аффинной группы $GA(r,2)$ векторного пространства над полем из 2 элементов.

Для полученного класса кодов решена проблема рангов и ядер. Установлено, что ранг всякого кода из этого класса может быть выражен в терминах размерности пересечения кода Хэмминга длины n и его образа под действием подстановки, индуцированной автоморфизмом. Звездой в системе троек Штейнера называется совокупность всех ее троек, инцидентных одной общей точке. Показано, что размерность ядра пропелинейного кода Соловьевой определяется через число общих звезд системы троек Штейнера кода Хэмминга и ее образа под действием индуцированной подстановки. Для получения всех допустимых значений для рангов и размерностей ядер рассмотрены подстановки, получаемые из автоморфизмов прямых произведений регулярных подгрупп общей аффинной группы рекурсивным образом.

Установлено, что новая серия кодов отлична от ранее известных конструкций Моллара и Васильева. А именно, полученные пропелинейные расширенные совершенные коды Соловьевой длины n с размерностью ядра $2^f - 2r - 2$ неэквивалентны кодам Моллара. Этот факт доказан посредством локального анализа системы четверок Штейнера, принадлежащих ядрам этих кодов. Аналогичное утверждение доказано также для совершенных кодов.

Результаты и обсуждения. Рассмотрим произвольную регулярную подгруппу G группы $GA(r,2)$. Через g_a будем обозначать элемент группы G , равный (a, M_a) , где M_a невырожденная матрица. Отметим, что элемент g_a определяется единственным

образом в силу регулярности действия G . Всякий автоморфизм T группы G индуцирует действие на векторах пространства F^r по следующему правилу: $T(g_a) = g_{\tau(a)}$.

Рассмотрим нумерацию координат векторного двоичного векторного пространства пространства F^{2^r} двоичными векторами длины r . Определим расширенный код Хэмминга длины 2^r следующим образом: $H = \{c \in F^{2^r} : \sum_{a:c_a=1} a = 0\}$. Через H_a обозначим смежный класс по коду H с представителем $e_a + e_0$.

Обозначим конкатенацию двух двоичных векторов x и y через $x|y$. Для двух двоичных кодов C и D обозначим через $C \times D$ код состоящий из конкатенаций всевозможных векторов x из C и y из D .

Приведем основную конструкцию расширенных совершенных пропелинейных кодов: $S_{H,\tau} = \bigcup_{a \in F^r} H_a \times H_{\tau(a)}$

Теорема 5.1. Пусть τ есть подстановка, индуцированная автоморфизмом некоторой регулярной подгруппы G группы $GA(r,2)$. Тогда код $S_{H,\tau}$ является пропелинейным расширенным совершенным кодом.

Следствие. Пусть τ есть подстановка, индуцированная автоморфизмом некоторой регулярной подгруппы G группы $GA(r,2)$. Тогда верно следующее

1. Код $S_{H,\tau}$ является гомогенным расширенным совершенным кодом.
2. Код $S'_{H,\tau}$, полученный выкалыванием координатной позиции, индексированной нулевым вектором, является гомогенным совершенным кодом.

Ранг произвольного кода C , определим как размерность линейной оболочки натянутой на кодовые слова кода C и обозначим через $\text{rank}(C)$. Ядро кода C длины n состоит из всех векторов длины n что $x + C = C$. Пусть τ является произвольной подстановкой на векторах F^r . Коэффициентом растяжения подстановки τ назовем размерность кода $\tau(H) \cap H$. Дефектом подстановки τ назовем $\log_2(1+M)$, где M -число общих звезд в системе троек Штейнера кодов H' и $\tau(H')$, получаемых из кода Хэмминга H выкалыванием координатной позиции, индексированной нулевым вектором. Дефект и коэффициент растяжения подстановки являются характеристиками нелинейности кода $S_{H,\tau}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.2. Пусть τ есть подстановка на векторах пространства F^r , оставляющая нулевой вектор на месте, коэффициент растяжения которой равен l и дефект m . Тогда

1. Ранги кодов $S_{H,\tau}$ и $S'_{H,\tau}$ равны $(2^{r+1}-r-2) + 1$.
2. Размерности ядер кодов $S_{H,\tau}$ и $S'_{H,\tau}$ равны $(2^{r+1}-r-2) - m$.

Для класса новых пропелинейных кодов, то есть кодов $S_{H,\tau}$ и $S'_{H,\tau}$ значение рангов и ядер совпадают со всеми возможными значениями для этих инвариантов для класса кодов

Соловьевой с произвольной подстановкой τ . Таким образом, проблема рангов и ядер для этого класса кодов решена.

Теорема 5.3. Для всякого l , $l \in \{0, \dots, r\}$ существует подстановка τ , индуцированная некоторым автоморфизмом некоторой регулярной подгруппы $GA(r, 2)$, что код в $S_{H, \tau}$ имеет ранг $(2^{r+1} - r - 2) + 1$ и для всякого m , $m \in 0 \cup \{2, \dots, r\}$ существует подстановка τ , индуцированная некоторым автоморфизмом некоторой регулярной подгруппы $GA(r, 2)$, что код в $S_{H, \tau}$ имеет размерность ядра $(2^{r+1} - r - 2) + m$ и кодов с другими значениями рангов и ядер не существует.

Класс полученных новых пропелинейных кодов является новым и отделяется от известной конструкции Моллара, что можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.4. Для всякого $r \geq 3$ существует хотя бы одна подстановка подстановка τ , индуцированная некоторым автоморфизмом некоторой регулярной подгруппы $GA(r, 2)$, что код $S_{H, \tau}$ длины 2^{r+1} не является кодом Моллара.

Конструирование гомогенных, транзитивных и пропелинейных оптимальных кодов представляет собой сложную комплексную междисциплинарную задачу, для решения которой необходимо использование сразу нескольких разделов математики: комбинаторики, теории кодирования, теории блок-схем и графов, а также теории конечных групп. В рамках проекта решены проблемы рангов и проблемы ядер для рассмотренного класса кодов. Несмотря на это, актуальной задачей остается отыскание полного инварианта классов эквивалентности этих кодов.

З а к л ю ч е н и е. В 2019 году получена новая конструкция гомогенных совершенных и расширенных совершенных кодов. Для этих кодов исследовано поведение инвариантов – рангов и размерностей ядер. Получено полное решение проблемы рангов и ядер для этого класса кодов.

Все запланированные на 2019 год результаты получены. Результаты опубликованы в статье [А.7]. Они были доложены на следующих конференциях:

1) Conference on graphs, networks and their applications, МФТИ, Долгопрудный, 13-18 мая 2019 г. – Mogilnykh I. Yu. «On equitable partitions of Hamming graphs $H(n, q)$ with the second eigenvalue» (секционный доклад)

http://ru.discrete-mathematics.org/conferences/201905/workshop_graphs/abstracts.pdf

2) Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19-23 августа 2019 г. – Krotov D. S., Mogilnykh I. Yu., Vasilieva A. Yu. «On existence of completely regular codes in hypercube and halved cube graphs» (секционный доклад)

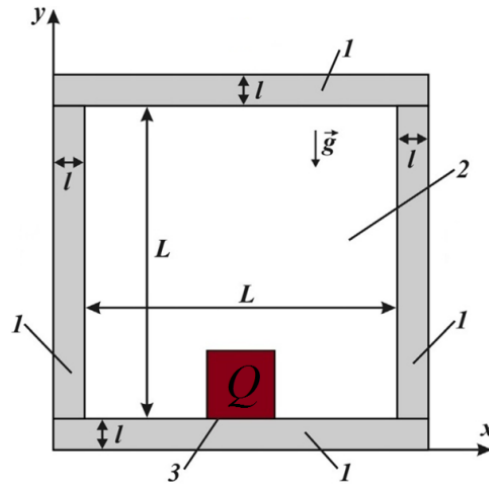
<http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/19/maltsev19.pdf>

1.6 Проведение численных исследований в области турбулентного конвективно-радиационного теплопереноса

Введение. В настоящее время развитие энергетики, электроники и машиностроения связано не только со сложностью архитектуры создаваемых устройств, но и серьезно ограничено производительностью систем теплоотведения. Источники питания выделяют тепло, которое впоследствии поглощается как корпусом оборудования, так и соседними деталями. Поэтому различные конструктивные элементы технологических устройств и сами элементы тепловыделения работают при более высоких температурах, чем изначально планировалось, что крайне неблагоприятно влияет на надежность и срок службы данных устройств. В этой связи математическое моделирование процессов тепломассопереноса позволяет определить оптимальные тепловые характеристики для устойчивой работы технологических устройств. Одним из методов повышения эффективности систем охлаждения тепловыделяющих элементов является подход, основанный на интенсификации процессов радиационного теплопереноса. Следует заметить, что если температура источника тепловыделения достаточно высока или течение среды проходит при относительно невысокой скорости (в частности, посредством термогравитационной конвекции), то вклад радиационной составляющей переноса энергии может быть довольно значительным.

Данный факт был подтвержден, например, в работе [46] посвященной численному исследованию турбулентного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой дифференциально нагретой полости. В рамках проведенных исследований соотношение сторон изменялось от 0.0625 до 16, отношение температур холодной T_c и горячей T_h стенок варьировалось от 1.02 до 2.61. В работе получены корреляционные соотношения для среднего числа Нуссельта в зависимости от чисел Прандтля и Грасгофа. Показано, что отношение между интенсивностью теплообмена за счет излучения и интенсивностью теплообмена за счет конвекции уменьшается с ростом T_h/T_c от 1.02 до 1.2, и увеличивается при $T_h/T_c > 1.2$.

Целью настоящего исследования являлся численный анализ конвективно-радиационного тепломассопереноса в замкнутой области с локальным источником объемного тепловыделения в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Рассматриваемая область представлена на рисунке 6.



1 – твердая стенка, 2 – воздушная полость, 3 – источник объемного тепловыделения

Рисунок 6 – Область решения рассматриваемой задачи

Внутри полости находится газ, который считается вязкой ньютоновской жидкостью удовлетворяющей приближению Буссинеска. На внешних поверхностях правой стенки ($X = 1+l/L$), верхней стенки ($Y = 1+l/L$) и левой стенки ($X = 0$) выполняются условия конвективного теплообмена с окружающей средой. Тепловыделяющий источник расположен на нижней стенке и имеет постоянный внутренний объемный тепловой поток Q . Внутренние поверхности ограждающих твердых стенок являются диффузно-серыми. Теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенками моделируется на основе приближения поверхностного излучения. Режим течения – турбулентный.

Методы. При математическом описании задачи турбулентного конвективно-радиационного теплопереноса в анализируемой области решения (рисунок 6) используются уравнения теплопроводности в твердых стенках и в источнике тепловыделения, а также система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, которые замыкаются с помощью $k-\varepsilon$ модели турбулентности. В данной постановке процессы переноса массы, количества движения и энергии описываются следующей системой дифференциальных уравнений в переменных «скорость-давление»:

в воздушной полости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + g\beta(T - T_0) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\alpha_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\alpha_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (c_{1\varepsilon} (P_k + c_{3\varepsilon} G_k) - c_{2\varepsilon} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (8)$$

внутри твердых стенок

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_w \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

внутри тепловыделяющего источника

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad (10)$$

Здесь $P_k = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$ – слагаемое, описывающее

порождение турбулентности за счет сдвиговых напряжений; $G_k = -\frac{g \beta \nu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y}$ – слагаемое,

характеризующее диссипацию либо генерацию турбулентной кинетической энергии за счет выталкивающей силы.

Представленная выше система дифференциальных уравнений (3) – (10) может быть записана в несколько иной форме более удобной в ряде случаев для численной реализации и не содержащей поле давления. Соотношения, связывающие функцию тока с составляющими скорости, задаются следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Компонента завихренности, направленная по нормали к плоскости течения имеет следующий вид:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В настоящей работе численное исследование рассматриваемых процессов теплопереноса проводилось в безразмерных переменных. Для адекватного разрешения вязкого пограничного слоя размещение узлов сетки вблизи твердых стенок и источника тепловыделения задавалось на основе представленного ниже алгебраического преобразования координат:

$$\xi = a + \frac{b-a}{2} \left\{ 1 + \operatorname{tg} \left[\frac{\pi \kappa}{b-a} \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \right] / \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} \kappa \right] \right\},$$

$$\eta = a + \frac{b-a}{2} \left\{ 1 + \operatorname{tg} \left[\frac{\pi \kappa}{b-a} \left(Y - \frac{a+b}{2} \right) \right] / \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} \kappa \right] \right\}.$$

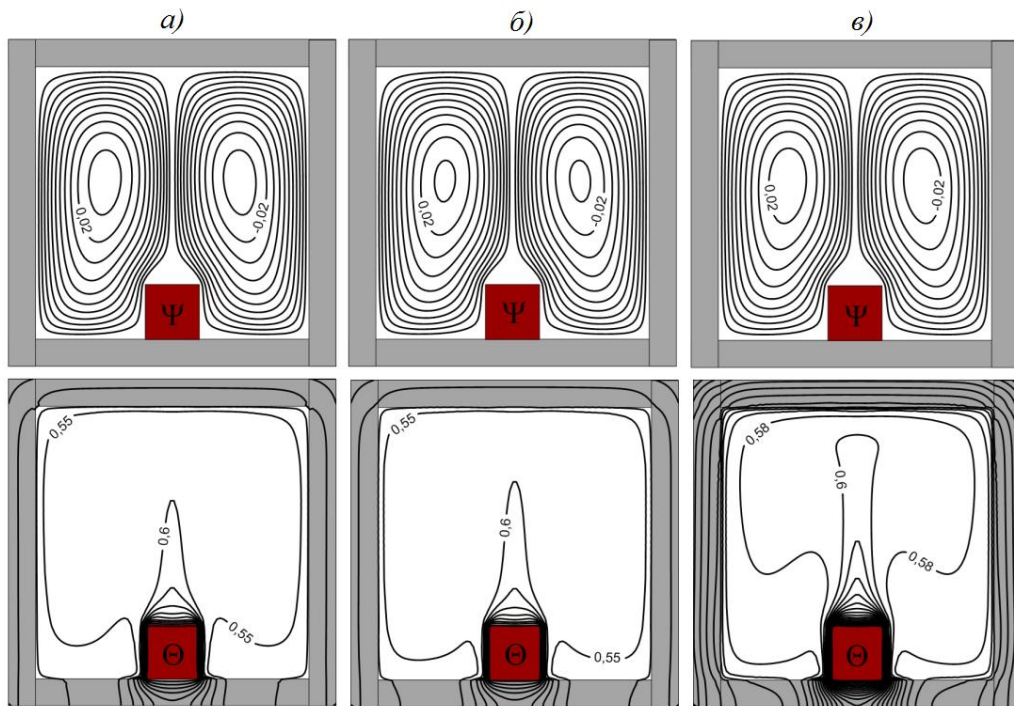
Здесь κ – параметр сжатия, a , b – начальная и, соответственно, конечная точка отрезка прямой с предполагаемым сгущением.

Начальные и граничные условия для представленной задачи подробно описаны в [47]. Краевая задача решена методом конечных разностей. Разработанный метод решения был детально протестирован на множестве модельных задач.

Результаты и обсуждения. Численные исследования краевой задачи проводилось при следующих значениях определяющих параметров: $0.1 < Os < 2$, $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$, $Ra = 10^{10}$. Число Прандтля $Pr = 0.7$, а значения приведенной степени черноты поверхностей $\tilde{\varepsilon}$ принимались равными 0, 0.3, 0.6, 0.9. Следует отметить, что в качестве материала тепловыделяющего элемента рассматривался кремний. Коэффициент теплопроводности материала ограждающих конструкций принимался равным $\lambda_1 = 0.7$.

Представленные в данной работе результаты соответствуют условиям, когда внутри локального источника задается постоянная интенсивность тепловыделения. Данные условия с точки зрения практических приложений представляют максимальный интерес. Это обусловлено тем, что на практике, как правило, общедоступной информацией является именно мощность прибора, а не различного рода зависимости температуры на поверхности источника тепловыделения.

Влияние степени черноты поверхностей на распределения изолиний функции тока Ψ и температуры Θ при $Ra = 10^9$, $Os = 1$, $\tau = 2000$ представлено на рисунке 7.



а) – $\tilde{\varepsilon} = 0$, б) – $\tilde{\varepsilon} = 0.3$, в) – $\tilde{\varepsilon} = 0.9$

Рисунок 7 – Распределения изолиний функции тока и температуры при

$$Ra = 10^9, Os = 1, \tau = 2000$$

При исследовании структуры конвективного течения в рассматриваемой области стоит отметить формирование двух вихревых структур, чье появление объясняется следующими факторами: нагревом от источника тепловыделения и охлаждением вблизи твердых стенок, а также непосредственно геометрическими особенностями задачи. Уменьшение значений приведенной степени черноты приводит к росту интенсивности конвективного течения в полости, что подтверждается увеличением максимальных значений функции тока:

$$|\Psi|_{\max}^{\tilde{\varepsilon}=0.9} = 0.021, |\Psi|_{\max}^{\tilde{\varepsilon}=0.3} = 0.022, |\Psi|_{\max}^{\tilde{\varepsilon}=0.0} = 0.023.$$

В то же время поле температуры с изменением $\tilde{\varepsilon}$ меняется значительно. Над тепловыделяющим элементом формируется ярко выраженный тепловой факел. Восходящий тепловой поток, достигает холодной верхней поверхности, и далее формирует нисходящие течения вблизи боковых стенок. В качестве характерной особенности можно отметить увеличение средней температуры внутри анализируемой области с ростом степени черноты поверхностей. Визуально это можно заметить, если проследить за положением изотермы $\Theta = 0.6$.

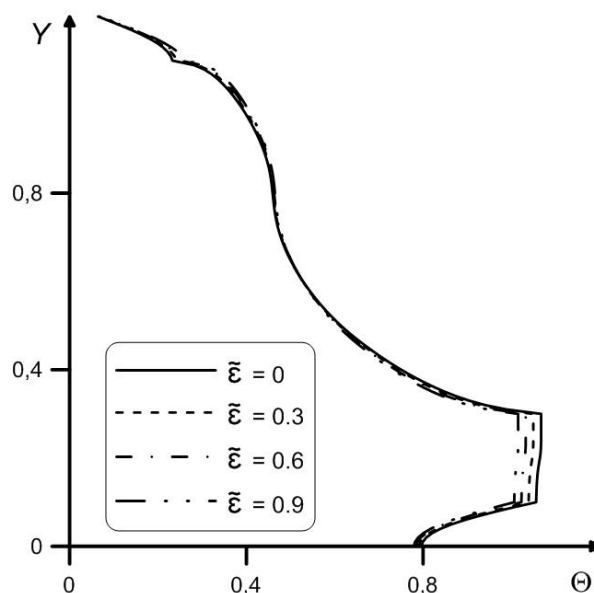


Рисунок 8 – Профили температуры в сечении $X = 0.6$ при $Ra = 10^9$, $Os = 1$ и различных значениях степени черноты поверхностей

На рисунке 8 представлены профили температуры в среднем сечении при $Ra = 10^9$, $Os = 1$ и различных значениях степени черноты поверхностей. Из представленных распределений видно, что увеличение $\tilde{\epsilon}$ проявляется в заметном снижении средней температуры внутри локального тепловыделяющего элемента. Снижение температуры источника энергии также выражается в более интенсивном охлаждении верхней теплопроводной стенки и увеличении градиента температуры на поверхности данной стенки. Поэтому за счет увеличения степени черноты внутренних поверхностей, как тепловыделяющего элемента, так и ограждающих твердых стенок можно существенным образом интенсифицировать охлаждение самого тепловыделяющего элемента.

З а к л ю ч е н и е. Проведено численное исследование конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой области при наличии локальных источников энергии. Определены основные закономерности рассматриваемых процессов переноса тепла и массы. В результате проведенных исследований получены распределения локальных и интегральных характеристик течения в рассматриваемой области в зависимости от определяющих параметров. Детально исследовано влияние степени черноты поверхностей, а также интенсивности объемного тепловыделения на структуру течения и теплообмен в области решения. Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статьях [А.8] и [А.9]. Результаты прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях:

1) Юбилейная конференция Национального комитета РАН по тепло- и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы теплообмена» и XXII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках», Московский Государственный Технический Университет имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия, 20-24 мая 2019 г. – И. В. Мирошниченко «Численное исследование сложного теплообмена в замкнутой области при наличии источника, с зависящей от времени плотностью объемного тепловыделения» (стендовый доклад) http://www.nchmt.ru/conf/scholl_2019

2) XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия, 19–24 августа 2019 г. – И. В. Мирошниченко «Об одном подходе к численному исследованию сложного теплообмена в замкнутых областях» (стендовый доклад) <http://ruscongrmech2019.bashedu.ru>

3) Международная конференция «The 7th Asian Symposium on Computational Heat Transfer and Fluid Flow», Токийский университет наук, Токио, Япония, 3-7 сентября 2019 г. – И. В. Мирошниченко «Numerical simulation of turbulent convective-radiative heat transfer in an enclosure with a heat-generating element» (устный доклад, председатель секции) <http://ascht2019.com>

4) Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томский государственный университет, Томск, Россия, 10-15 декабря 2019 г. – И. В. Мирошниченко «Математическое моделирование конвективно-радиационного теплообмена в замкнутых областях» (устный доклад) <http://dr.rmc.math.tsu.ru>

1.7 Математическое моделирование физических явлений в области молекулярной физики

В в е д е н и е. Математическое моделирование состояния молекулярных кристаллов позволяет не только достичь понимания физических механизмов, удерживающих молекулы в структуре, но и решить задачи синтеза материалов. Одним из наиболее продуктивных подходов к исследованию состояния новых молекулярных кристаллов является компьютерное моделирование. Такое моделирование позволяет не только обеспечить научное понимание экспериментально наблюдаемых явлений, но и прогнозировать свойства новых материалов, а также заложить основы их конструирования. Так стабильность и свойства при комнатной температуре некоторых графеноподобных

моноэлементных материалов [48], [49] были предсказаны с помощью компьютерного моделирования на гораздо более ранней стадии чем их экспериментальный синтез.

Методы. Для расчета поворотов и колебаний углов кристаллических структур, составленных крупными молекулами, используется подход Эйлера, применяемый в классической механике для определения положения тел в пространстве. Применены также высокоточные методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Подход Эйлера позволяет полностью решить задачу о вращениях крупных молекул и не использовать никаких ограничений, связанных с преодолением координатной особенности кинематических соотношений Эйлера. В современных компьютерах с большим количеством значащих цифр в представлении числа расчеты можно проводить не выкалывая особенность при угле $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Об этом говорят сопоставления расчетов с точным аналитическим решением о вынужденных колебаниях тела в пространстве. Такие сопоставления позволяют также оценить погрешность проводимых вычислений, которая, как оказалось при применении даже высокоточных методов, зависит от числа шагов и от интенсивности вращений, т.е. имеет свойство накапливаться со временем. Необходимо также отметить, что все используемые схемы приводят к диссипации механической энергии для замкнутой системы материальных точек.

Результаты и обсуждения. Расчетным путем найден минимальный фрагмент материала, представляющий молекулярный кристалл, сформированный на основе стандартных фуллеренов C_{60} . Для этого фрагмента сформулированы и реализованы условия симметрии кристаллической структуры. Выделены две группы уравнений, определяющие вибрации и вращения фуллеренов. Предложена схема совместного численного интегрирования этих двух групп уравнений и проведены систематические расчеты, определяющие состояние фуллерита, находящегося в пластической фазе.

Вращения фуллеренов в молекулярном кристалле определяются динамическими уравнениями вращательного движения

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_{\xi} + M_{\xi}^{(m)}, \quad (11)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_{\eta} + M_{\eta}^{(m)}, \quad (12)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_{\zeta} + M_{\zeta}^{(m)} \quad (13)$$

и кинематическими соотношениями Эйлера, неразрешенными относительно производных углов, определяющих ориентацию фуллеренов в пространстве

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (14)$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (15)$$

$$r = \psi \cos \theta + \dot{\varphi}. \quad (16)$$

Дифференциальные уравнения (11)–(16) интегрируются численно с использованием схем высокого порядка точности. Для определения вибраций фуллеренов получены уравнения, описывающие движения их центров масс. Последние уравнения интегрируются тем же методом, что и уравнения группы вращений.

На рисунках 9–11 показаны рассчитанные углы Эйлера для фуллерена, находящегося в материале фуллерита.

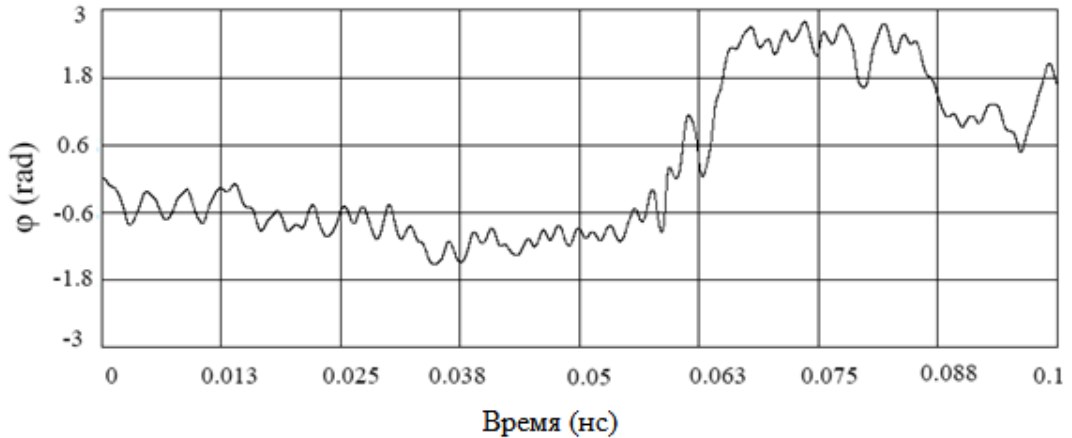


Рисунок 9 – Угол собственного вращения центрального фуллерена

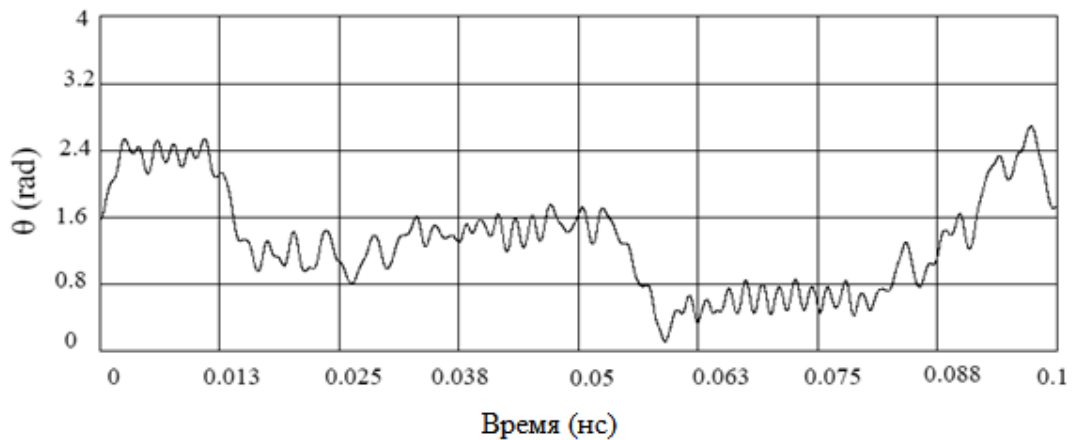


Рисунок 10 – Угол между осью собственного вращения фуллерена и вертикальной осью абсолютной системы отсчета (угол нутации)

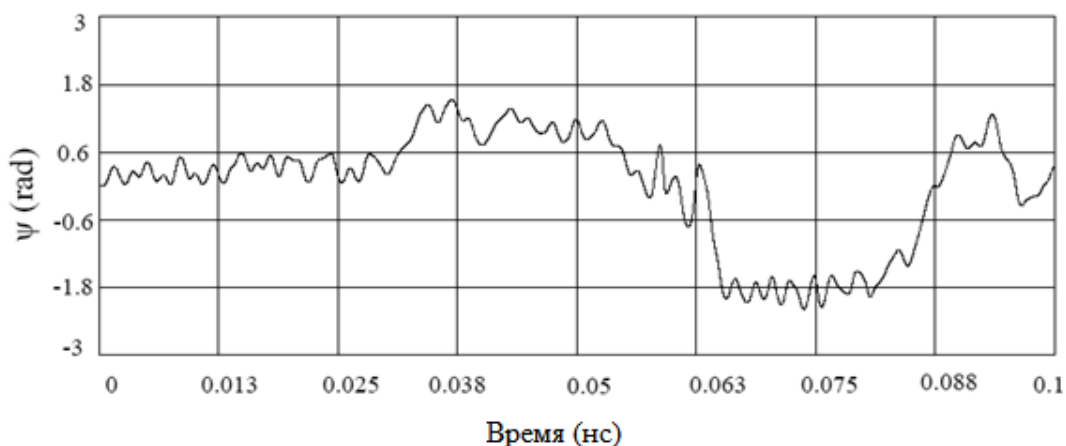


Рисунок 11 – Угол прецессии фуллера, определяющий поворот мгновенной оси вращения в плоскости перпендикулярной к вертикальной оси неподвижной системы координат

Из рисунков видно, что до момента времени $t = 0.06$ нс реализуются угловые колебания, а далее происходит переориентация оси.

Расчетами установлено, что колебания в пластическом фуллерите реализуются в форме угловых колебаний с последующей переориентацией осей колебаний. Расчетное время переориентации совпало с соответствующим временем, найденным экспериментально с использованием ядерного магнитного резонанса.

Реальные фуллерены, содержащие включения в виде атомов железа или азота, являются магнитовосприимчивыми, т.е. имеют собственный магнитный момент и способны реагировать на изменения внешнего магнитного поля. Кроме того, железо или литий, входящие в состав фуллеренов, делают их положительно заряженными. В результате чего такие фуллерены, находящиеся в структуре фуллерита, являются чувствительными к внешнему электрическому полю. Расчетами показано, что молекулярные кристаллы, составленные электро и магнитовосприимчивыми фуллеренами, способны накапливать механическую энергию и изменять свои физические свойства.

З а к л ю ч е н и е . Как показали проведенные исследования, динамическое состояние молекулярных кристаллов определяется лишь перекрестными взаимодействиями, т.е. взаимодействиями атомов, принадлежащих различным молекулам, составляющим кристаллическую решетку. Отсутствие ориентированных связей в формировании молекулярного кристалла позволяет использовать симметричный широко апробированный потенциал межатомных взаимодействий, например, LJ -потенциал с уменьшенным значением глубины потенциальной ямы. Этот потенциал позволяет верно определить частотные характеристики вращающихся фуллеренов, о чем говорят сравнения с

имеющимися экспериментальными данными. Кроме того, в случае применения подхода Эйлера к молекулярной динамике, роль подвеса для фуллерена выполняет вся совокупность сил перекрестных взаимодействий. При этом эйлеровское описание оказалось вполне корректным. Ситуация, связанная с переходом угла нутации через ноль или величину кратную π (которая вполне могла бы быть устранена угловым смещением подвижного базиса) не требует для своего разрешения каких-либо специальных мер. Поэтому у авторов не возникло необходимости в использовании кватернионов Гамильтона, которые существенным образом усложнили бы описание динамики узлов молекулярных кристаллов. Применение достаточно простого и надежного способа описания движения крупных молекул позволило определить конфигурацию внешних электромагнитных полей, позволяющую придать узлам кристаллической решетки ориентированные вращения. Это, в свою очередь, дает возможность решать задачу управления свойствами молекулярных кристаллов за счет изменения параметров внешнего электромагнитного поля.

Таким образом разработана модель молекулярного взаимодействия внутри фуллерита и определена частота вращения фуллереновых сфер в пластической фазе фуллерита. С помощью численных экспериментов подтверждена гипотеза о том, что вращения фуллеренов не вызывают трения. Все запланированные на 2019 год результаты получены. Часть полученных результатов опубликована в статьях [A.10], [A.11], другая часть готовится к публикации. Все результаты прошли апробацию на международных конференциях:

1) VII международная научная конференция «Техника. Технологии. Образование. Безопасность», Научно-технический союз машиностроения, София – Велико Тырново, Болгария, 29 мая-01 июня 2019 г. – А. М. Бубенчиков «Permeability of porous graphene composite membrane» (пленарный доклад) <http://techtos.net/>

2) Международная конференция по материалам (MNs-2019) и наноматериалам, Университет Париж 8, Париж, Франция, 17–19 июля 2019 г. – А. М. Бубенчиков «Molecular separation of $\text{CH}_4/\text{C}_2\text{H}_6$ mixtures using porous boron nitride» (устный доклад) <https://mns-19.com>

2 Образовательная составляющая

2.1 Приглашение в Томск ведущих ученых и лекторов

НОМЦ были организованы и проводились регулярные заседания математического лектория и математического коллоквиума. Математический лекторий проходил в формате научно-популярных лекций, читаемых ведущими учеными и лекторами по различным современным направлениям и актуальным задачам математики. Математический лекторий в первую очередь был ориентирован на студентов младших курсов ТГУ, находящихся перед выбором своей научной специализации. Математический коллоквиум проходил в форме научного семинара, на котором обсуждались последние научные результаты. Он был больше ориентирован на сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов ТГУ.

В рамках этого математического лектория лекции прочитали сотрудники НОМЦ Н.В. Абросимов, А.М. Бубенчиков, И.В. Мирошниченко, И.Ю. Могильных, Е.А. Тимошенко, и приглашенные лекторы: А.А. Барт (Томск), М.А. Бубенчиков (Томск), М.С. Бухтяк (Томск), Л.В. Гензе (Томск), С.П. Гулько (Томск), Т.Г. Елизарова (Москва), В.М. Зюзьков (Томск), Д.П. Касымов (Томск), К.Л. Козлов (Москва), С.А. Копанев (Томск), В.Я. Рудяк (Новосибирск), А.В. Царев (Москва), Д.С. Чистяков (Москва), М.А. Шеремет (Томск).

На математическом коллоквиуме выступили с научными докладами сотрудники НОМЦ Н.В. Абросимов, А.М. Бубенчиков, И.В. Мирошниченко, Е.А. Тимошенко, и приглашенные ученые: профессора С.П. Гулько (Томск), Т.Г. Елизарова (Москва), Ф.И. Соловьева (Новосибирск), А.В. Старченко (Томск), В.Я. Рудяк (Новосибирск), А.В. Царев (Москва), М.А. Шеремет (Томск), доценты М.С. Бухтяк (Томск), Л.В. Гензе (Томск), В.М. Зюзьков (Томск), Д.П. Касымов (Томск), Д.С. Чистяков (Москва).

Кроме того, пленарные доклады конференций, организованных Центром, были открытыми для широкой аудитории и ориентированы на широкую аудиторию, в том числе, и на студентов. При поддержке НОМЦ с пленарными докладами на Второй международной конференции «Группы и квандлы в маломерной топологии» выступили проф. Л. Кауффман (США), проф. К. Гонгопадхай (Индия), проф. М. Прабхакар (Индия), профессор М. Сингх (Индия), академик С.В. Матвеев (Челябинск), проф. В.Г. Бардаков (Новосибирск), проф. А.Д. Медных (Новосибирск), проф. М.В. Нецадим (Новосибирск).

В декабре 2019 года была организована конференция «Декабрьские чтения в Томске», посвященная актуальным проблемам математики и ее приложений. Ее заседания проходили в большом конференц-зале библиотеки ТГУ и были открыты для широкой аудитории. Среди выступавших с большими пленарными докладами – лекциями были академик И.А. Тайманов (Новосибирск), чл.-корр. РАН А.А. Гайфуллин (Москва), проф.

РАН И.А. Дынников (Москва), проф. РАН А.В. Малютин (Санкт-Петербург), директор ИВМ СО РАН В.М. Садовский (Красноярск), директор ИСИ СО РАН А.Ю. Пальянов (Новосибирск), директор Центра Понселе С.К. Нечаев (Москва), проф. В.Г. Бардаков (Новосибирск), проф. А.П. Чупахин (Новосибирск), проф. Т.Е. Панов (Москва), проф. С.П. Царев (Красноярск), доцент Д.В. Миллионщиков (Москва), доцент С.Б. Тихомиров (Санкт-Петербург), доцент Е.В. Фоминых (Санкт-Петербург) и другие.

Для учителей Томска и области, работающих с математически одаренными школьниками организован еженедельный методический семинар (организатор и руководитель семинара доцент Я.С. Гриншпон).

2.2 Проведение научно-образовательных мероприятий при поддержке Центра

При участии НОМЦ были организованы следующие научные и научно-образовательные мероприятия:

1) XII Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск, январь-февраль 2019 г. (прошел в несколько этапов, 206 участников, из них 168 школьников, 28 учителей, 10 сотрудников университетов Томска в качестве жюри)

2) «Международный день числа Пи», 14 марта 2019 г. (участники – студенты и школьники).

3) Школьная командная олимпиада «Математическая абака», 27 марта 2019 г. (60 участников, из них 48 школьников (12 команд), 12 учителей).

4) XXX региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 19 апреля 2019 г. (118 участников, из них 86 докладчиков-школьников, 32 учителя).

5) Всероссийская молодёжная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики», 23-27 апреля 2019 г. (150 участников, из них 130 докладчиков-студентов)

6) Математические конкурсы финального этапа Всероссийской интеллектуальной игры «Science Game 2019», 16 мая 2019 г. (около 30 команд студентов и школьников из городов России).

7) Круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», 1-31 мая 2019 г. (70 участников-школьников).

8) II международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», 25-28 июня 2019 г. (25 участников)

9) Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», 10-15 декабря 2019 г. (48 участников)

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://rnc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

2.3 Стажировки студентов, аспирантов и молодых ученых в ведущих академических институтах и университетах

Согласно Плану развития центра, в 2019 г. три аспиранта были направлены на стажировку в Москву. Стажировка прошла с 1 по 7 декабря 2019 г. в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. При поддержке НОМЦ стажировку прошли три аспиранта механико-математического факультета ТГУ: Мамонтов Дмитрий Владимирович, Потеряева Валентина Александровна, Челнокова Анна Сергеевна. Наименование (тема) программы стажировки: «Решение задач механики сплошных сред с использованием свободного программного обеспечения». Целью стажировки было знакомство с одной из ведущих научных школ по методам решения задач механики сплошной среды и современным технологиям компьютерного моделирования, созданной в ИПМ РАН; обмен опытом между ММФ ТГУ и ИПМ РАН; получение компетенций, которые будут полезны при выполнении научных исследований в рамках подготовки диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Руководителем стажировки (от принимающей организации) являлась профессор, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник ИПМ РАН Елизарова Татьяна Геннадьевна.

2.4 Модернизация содержания образовательных модулей и программ

При поддержке НОМЦ модернизированы пять образовательных модулей по основным образовательным программам (ООП) бакалавриата по направлениям «01.03.01 – Математика», «02.03.01 – Математика и компьютерные науки», «01.03.03 – Механика и математическое моделирование» и магистратуры «01.04.01 – Математика», «01.04.03 – Механика и математическое моделирование»:

1) «Комплексный анализ» по направлениям подготовки бакалавриата «01.03.01 – Математика», «02.03.01 – Математика и компьютерные науки», «01.03.03 – Механика и математическое моделирование» под руководством к.ф.-м.н. И.А. Колесникова. Целью освоения дисциплины является фундаментальная подготовка и формирование прочных теоретических знаний и практических навыков для возможности дальнейшего развития комплексного анализа и использование его в прикладных задачах. Задачи дисциплины: познакомить с основными определениями и основными свойствами голоморфных отображений, а также с формулировками наиболее важных утверждений, некоторыми стандартными методами и их доказательствами; научить решать задачи вычислительного и

теоретического характера в области комплексного анализа, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, доказывать, как известные утверждения, так и родственные им новые; сформировать представление о разных методах комплексного анализа. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

2) «Аналитическая геометрия» по направлениям подготовки бакалавриата «01.03.01 – Математика», «02.03.01 – Математика и компьютерные науки», «01.03.03 – Механика и математическое моделирование» под руководством к.ф.-м.н. Е.С. Сухачевой. Целью освоения дисциплины является ознакомление студентов с основными понятиями, идеями и методами аналитической геометрии. Задачи дисциплины: сформировать навыки работы с профессиональной литературой по аналитической геометрии для успешной учебной деятельности; обучить решать задачи вычислительного и теоретического характера в области аналитической геометрии, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, доказывать, как известные утверждения, так и родственные им новые; предоставить знания формулировок наиболее важных утверждений и некоторых стандартных методов доказательств этих утверждений. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

3) «Основы LaTeX» по направлению подготовки магистратуры «01.04.01 – Математика» под руководством доцента, к.ф.-м.н. Л.В. Гензе. Целью освоения дисциплины является обучение студентов базовым навыкам работы с издательской системой LaTeX, которых будет достаточно для самостоятельного создания текстов с большим количеством формул (научная статья, отчет по НИР, презентация) в этом формате. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часа.

4) «Аэротермохимия» по направлению подготовки магистратуры «01.04.03 – Механика и математическое моделирование» под руководством доцента, д.ф.-м.н. Е.Л. Лободы. Целью освоения дисциплины является знакомство с актуальными прикладными задачами в области аэротермохимии и механики многофазных реагирующих сред, способами использования результатов исследований в данной тематике; обучение созданию и применению в исследованиях физических и математических моделей аэротермохимических явлений при решении отдельных задач, связанных с течениями многофазных реагирующих сред, термическим разложением теплозащитных материалов, в том числе при наличии химических реакций. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

5) «Молекулярная физика и математические модели наномеханики» по направлению подготовки магистратуры «01.04.03 – Механика и математическое моделирование» под руководством к.ф.-м.н. Е.А. Тарасова. Целью

освоения дисциплины является знакомство студентов с основными концепциями и понятиями молекулярной физики и наномеханики, обучение студентов применению известных и созданию новых моделей молекулярной физики и наномеханики для решения практических задач реализации различных типов взаимодействий атомов, молекул и более сложных структур. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

2.5 Научное руководство студентами и аспирантами, осуществляемое сотрудниками Центра

Под руководством ведущего научного сотрудника НОМЦ профессора А.М. Бубенчикова подготовлены 5 магистерских диссертаций студентов ММФ ТГУ по направлению подготовки 01.04.03 – «Механика и математическое моделирование»:

- 1) Д.В. Гаврилов, «Сорбционные технологии разделения газов. Проникновение гелия в углеродные капсулы»,
- 2) Г.Н. Касимов, «Проницаемость некоторых туннельных наноструктур»,
- 3) Т.В. Кутенкова, «Определение частоты вращения фуллеренов в молекулярном комплексе $C_{20}@C_{80}$ »,
- 4) В.В. Овчаренко, «Проницаемость многослойной наносетчатой карбиновой структуры»,
- 5) А.В. Шнайдер, «Прохождение молекул через пористый нитрид бора».

Под руководством ведущих научных сотрудников НОМЦ доцента Е.А. Тимошенко и профессора А.М. Бубенчикова подготовлены 3 выпускных квалификационных работы бакалавра ММФ ТГУ по направлениям подготовки 01.03.01 – «Математика», 02.03.01 – «Математика и компьютерные науки» и 01.04.03 – «Механика и математическое моделирование»:

- 1) А.Ю. Степанова, «Матричное представление эндоморфизмов p -групп малых рангов»,
- 2) А.В. Мальцев, «Определяемость циклических групп их группами автоморфизмов»,
- 3) И.С. Демиденко, «Прохождение атомов гелия и молекул метана через однослойную укладку закрытых углеродных нанотрубок».

В 2019 году представлено в диссертационный совет 2 диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, подготовленных под руководством ведущего научного сотрудника НОМЦ профессора А.М. Бубенчикова:

- 1) А.В. Малоземов, «Математическое моделирование процессов разделения газов на основе мембран из наноструктурированных материалов»,
- 2) А.В. Уколов, «Взаимодействие сферических наночастиц и структур на их основе с компонентами природного газа»,
– по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все работы, запланированные на отчетный период проекта, успешно выполнены. Все ожидаемые к концу 2019 года результаты получены.

Результаты прошли апробацию на международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Участниками проекта сделано 33 доклада по тематике выполненных работ. Результаты работы по проекту опубликованы сотрудниками Центра в 11 статьях в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus с указанием авторов на поддержку НОМЦ (статьи [A.1] – [A.11]). В том числе: 5 статей опубликованы в журналах, входящих в первый и второй квартиль (Q1, Q2) базы данных Scopus (работы [A.1], [A.2], [A.7], [A.8] и [A.10]); 7 статей подготовлены молодыми научными сотрудниками НОМЦ (работы [A.3] – [A.9]). Кроме того, в 2019 г. подготовлены и сданы в печать еще 2 статьи (работы [A.12] и [A.13]).

Под руководством научных сотрудников НОМЦ подготовлены и защищены в 2019 году 5 магистерских диссертаций и 3 выпускных квалификационных работы бакалавра студентов ММФ ТГУ по специальностям «Математика», «Математика и компьютерные науки» и «Механика газотранспортных систем». Под научным руководством ведущего научного сотрудника НОМЦ А.М. Бубенчикова подготовлены и в 2019 году представлены в диссертационный совет две диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

В 2019 году сотрудниками НОМЦ организовано более 40 научных семинаров. Лекции проходили в рамках организованных НОМЦ «Математического коллоквиума» и «Математического лектория», ориентированного на студентов младших курсов. Кроме того, в форме открытых лекций проходили пленарные доклады на научных конференциях, организованных НОМЦ.

При участии НОМЦ были организованы следующие научные и научно-образовательные мероприятия:

1) XII Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск, январь-февраль 2019 г. (прошел в несколько этапов, 206 участников, из них 168 школьников, 28 учителей, 10 сотрудников университетов Томска в качестве жюри)

2) «Международный день числа Пи», 14 марта 2019 г. (участники – студенты и школьники).

3) Школьная командная олимпиада «Математическая абака», 27 марта 2019 г. (60 участников, из них 48 школьников (12 команд), 12 учителей).

4) XXX региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 19 апреля 2019 г. (118 участников, из них 86 докладчиков-школьников, 32 учителя).

5) Всероссийская молодёжная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики», 23-27 апреля 2019 г. (150 участников, из них 130 докладчиков-студентов)

6) Математические конкурсы финального этапа Всероссийской интеллектуальной игры «Science Game 2019», 16 мая 2019 г. (около 30 команд студентов и школьников из городов России).

7) Круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», 1-31 мая 2019 г. (70 участников-школьников).

8) II международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», 25-28 июня 2019 г. (25 участников)

9) Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», 10-15 декабря 2019 г. (48 участников)

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://rnc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

При поддержке НОМЦ в 2019 г. три аспиранта ТГУ прошли стажировки в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва).

При поддержке НОМЦ модернизированы 5 учебных программ механико-математического факультета ТГУ.

Сотрудники НОМЦ начали работу по 6 научным грантам, которые были получены в 2019 г. на конкурсной основе:

- Российско-Индийский проект РФФ-DST № 19-41-02005 «Теория глобальных узлов: инварианты и классификация», руководитель проекта А.Ю. Веснин;

- исследовательский проект РФФ по президентской программе № 19-71-10049 «Исследование гиродинамического излучения нагретых фуллеренов в составе фуллерита, имеющих дипольный момент, под действием стационарного магнитного поля», руководитель проекта М.А. Бубенчиков;

- исследовательский проект РФФ по президентской программе № 19-79-00296 «Математическое моделирование сложного теплообмена в строительных сооружениях», руководитель проекта И.В. Мирошниченко;

- исследовательский проект РФФИ № 19-01-00569 «Геометрические 3-многообразия, аппроксимируемость и упорядочиваемость их групп», руководитель проекта А.Ю. Веснин;

- Российско-Монгольский проект РФФИ № 19-51-44002 «Математическое моделирование квантового просеивания изотопов посредством туннельного прохождения через резонансную систему энергетических барьеров при сверхнизких температурах» руководитель проекта М.А. Бубенчиков;

- аспирантский научный проект РФФИ № 19-31-90087 «Проницаемость мембраны на основе фуллеренов, нанотрубок или наноткани в отношении дипольных молекул газовой фазы и углеводородных компонентов природной смеси газов», руководитель проекта А.М. Бубенчиков.

Отчет о работе Центра был заслушан и одобрен на заседании Ученого совета механико-математического факультета Томского государственного университета 26.12.2019 г.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Hempel J. 3-manifolds / J. Hempel. – American Mathematical Soc., 2004. – 195 p.
- 2 Turaev V. Knotoids / V. Turaev // Osaka J. Math. – 2012. – Vol. 49, № 1. – P. 195–223.
- 3 Gugumcu N. New invariant of knotoids / N. Gugumcu, K. H. Kauffman // European J. of Combinatorics. – 2017. – Vol. 65. – P. 186–229.
- 4 Kaur K. Two-variable polynomial invariants of virtual knots arising from flat virtual knot invariants / K. Kaur, M. Prabhakar, A. Vesnin // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2018. – Vol. 27, № 13. – Article number: 1842015.
- 5 Hsiang W.-Y. On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons / W.-Y. Hsiang // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) – 1988. – Vol. 39, № 156. – P. 463–468.
- 6 Cho Yu. On the volume formula for hyperbolic tetrahedral / Yu. Cho, H. Kim // Discrete Comput. Geom. – 1999. – Vol. 22, № 3. – P. 347–366.
- 7 Murakami J. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – Vol. 13, No 2. – P. 379–400.
- 8 Ushijima A. Volume formula for generalised hyperbolic tetrahedral // Non-Euclidean geometries (A. Prékopa and E. Molnár, eds.), János Bolyai memorial volume, papers from the International Conference on Hyperbolic Geometry held in Budapest, July 6-12, 2002, Mathematics and Its Applications (New York), 581. – New York: Springer. – 2006. – P. 249–265.
- 9 Derevnin D. A. A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // Russian Math. Surveys. – 2005. – Vol. 60, № 2. – P. 346–348.
- 10 Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // Memorie Reale Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena, III, VIII (Appendice) – 1907. – P. 21–66.
- 11 Abrosimov N. V. Volumes of polytopes in constant curvature spaces / N. V. Abrosimov, A. D. Mednykh // Fields Institute Communications. – 2014. – Vol. 70. – P. 1–26.
- 12 Bardakov V. G. Structural aspects of twin and pure twin groups/ V. G. Bardakov, M. Singh, A. Yu. Vesnin // Geom. Dedicata. – 2019. – Vol. 203. – P. 135–154.
- 13 Baer R. Automorphism rings of primary abelian operator groups / R. Baer // Ann. Math. – 1943. – Vol. 44. – P. 192–227.
- 14 Bazzoni S. On abelian torsion-free separable groups and their endomorphism rings / S. Bazzoni, C. Metelli // Symposia Math. – 1979. – Vol. 23. – P. 259–285.

- 15 May W. Isomorphism of group algebras / W. May // *J. Algebra*. – 1976. – Vol. 40. – P. 10–18.
- 16 Schultz P. When is an abelian p -group determined by the Jacobson radical of its endomorphism ring? / P. Schultz // *Abelian Group Theory and Related Topics. Contemporary Mathematics*. – 1994. – Vol. 171. – P. 385–396.
- 17 Flagg M. Jacobson radical isomorphism theorem for torsion-free modules / M. Flagg // *Models, Modules and Abelian Groups*. – 2008. – P. 309–314.
- 18 Bunina E. I. Elementary equivalence of endomorphism rings of abelian p -groups / E. I. Bunina, A. V. Mikhalev // *J. Math. Sci.* – 2006. – Vol. 137. – P. 5275–5335.
- 19 Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Мат. заметки*. – 1972. – Т. 11, № 4. – С. 403–408.
- 20 Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами автоморфизмов / А. М. Себельдин // *Абелевы группы и модули*. – 1991. – С. 125–134.
- 21 Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. К. Вильданов. – Нижний Новгород, 2014. – 73 с.
- 22 Mogilnykh I. Yu. On separability of the classes of homogeneous and transitive perfect binary codes / I. Yu. Mogilnykh, F. I. Solov'eva // *Problems of Information Transmission*. – 2015. – Vol. 51. – P. 139–147.
- 23 The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes / A. R. Hammons [et al.] // *IEEE Trans. Inform. Theory*. – 1994. – V. 40, № 2. – P. 301–319.
- 24 Колпаков А. Охлаждение силовых модулей: проблемы и решения / А. Колпаков // *Силовая Электроника*. – 2012. – № 3. – С. 12–18.
- 25 Miroshnichenko I. V. Turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosures using experimental and numerical approaches: A review / I. V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2018. – Vol. 82. – P. 40–59.
- 26 Lackenby M. The Heegaard genus of amalgamated 3-manifolds / M. Lackenby // *Geom. Dedicata*. – 2004. – Vol. 109. – P. 139–145.
- 27 Yang G. On amalgamations of Heegaard splittings with high distance / G. Yang, F. Lei // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2009. – Vol. 137, № 2. – P. 723–731.
- 28 Lei F. Some properties of an annulus sum of 3-manifolds / F. Lei // *Noutheast. Math. J.* – 1994. – Vol. 10, № 3. – P. 325–329.
- 29 Bandt C. Self-similar sets 6. / C. Bandt, J. Stahnke. – Greifswald, 1990. – (Препринт / Interior distance on deterministic fractals)

- 30 Fenn R. Topology of low-dimensional manifolds (Proceedings of the Second Sussex Conference, 1977) / R. Fenn, P. Taylor // *Lecture Notes in Math.* – 1979. – Vol. 722. – P. 37–43.
- 31 Khovanov M. Doodle groups / M. Khovanov // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1997. – Vol. 349, № 6. – P. 2297–2315.
- 32 Magnus W. Combinatorial group theory, Presentations of groups in terms of generators and relations / W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar // New York-London-Sydney: Interscience Publishers, 1966. – 444 p.
- 33 Linear motion planning with controlled collisions and pure planar braids [Электронный ресурс] / J. González [et al.] – Электрон. дан. – URL <https://arxiv.org/abs/1902.06190> (дата обращения: 24.12.2019).
- 34 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М., 1977. – Т. 2. – 415 с.
- 35 Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского.* – 2011. – № 3(1). – С. 174–177.
- 36 Leptin H. Abelsche p-gruppen und ihre Automorphismengruppen / H. Leptin // *Math. Z.* – 1960. – Vol. 73. – P. 235–253.
- 37 Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups / W. Liebert // *Abelian Group Theory. Proceedings of the 1985 Oberwolfach Conference*, Gordon and Breach. – 1987. – P. 9–31.
- 38 Fuchs L. Abelian groups / L. Fuchs. – Springer, 2015. – 747 p.
- 39 Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring / P. M. Cohn // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* – 1966. – Vol. 30. – P. 5–53.
- 40 Phelps K. T. On binary 1-perfect additive codes: some structural properties / K. T. Phelps, J. Rifa // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 2002. – Vol. 48. – P. 2587–2592.
- 41 Guskov G. K. Ranks of propelinear perfect binary Codes / G. K. Guskov, I. Yu. Mogilnykh, F. I. Solov'eva // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* – 2013. – Vol. 10. – P. 443–449.
- 42 Соловьева Ф. И. О двоичных негрупповых кодах / Ф. И. Соловьева // *Методы дискретного анализа.* – 1981. – Т. 37. – С. 65–75.
- 43 Avgustinovich S. V. Perfect codes of full rank with big kernels / S. V. Avgustinovich, O. Heden, F. I. Solov'eva // *Discrete Analysis and Oper. Research.* – 2001. – Vol. 8, № 4. – P. 3–8.

- 44 Mogilnykh I. Yu. A note on regular subgroups of the automorphism group of the linear Hadamard code / I. Yu. Mogilnykh // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2018. – Vol. 15. – P. 1455–1462.
- 45 Hegedus P. Regular subgroups of the Affine group / P. Hegedus // *Journal of Algebra*. – 2000. – Vol. 225. – P. 740–742.
- 46 Shati A. K. A. A dimensionless solution to radiation and turbulent natural convection in square and rectangular enclosures / A. K. A. Shati, S. G. Blakey, S. B. M. Beck // *Journal of Engineering Science and Technology*. – 2012. – Vol. 7. – P. 257–279.
- 47 Miroshnichenko I. V. The influence of surface radiation on the passive cooling of a heat-generating element / I. V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet, A. A. Mohamad // *Energies*. – 2019. – Vol. 12. – Article number: en12060980.
- 48 Takeda K. Theoretical possibility of stage corrugation in Si and Ge analogs of graphite / K. Takeda, K. Shiraishi // *Physical Review B*. – 1994. – Vol. 50. – P. 14916–14922.
- 49 Large-gap quantum spin Hall insulators in thin films / Y. Xu [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2013. – Vol. 111. – Article number: 136804.

Приложение А
(обязательное)
Публикации

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

[A.1] Density of roots of the Yamada polynomial of spatial graphs / Miaowang Li [et al.] // Proc. Steklov Institute of Mathematics. – 2019. – Vol. 305. – P. 135–148. – DOI 10.1134/S0081543819030076 (журнал входит во второй квартиль Q2 Scopus)

[A.2] Abrosimov N. V. On the set of subarcs in some non-postcritically finite dendrites / N. V. Abrosimov, M. V. Chanchieva, A. V. Tetenov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2019. – Vol. 16. – P. 975-982. – DOI 10.33048/semi.2019.16.066 (журнал входит во второй квартиль Q2 Scopus)

[A.3] Козловская Т. А. Циклические представления групп Сирадски с четным числом порождающих и трехмерные многообразия // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2019. – Вып. 60. – С. 32–41. – DOI 10.17223/19988621/60/3

[A.4] Vildanov V. K. On determinability of a quotient divisible Abelian group of rank 1 by its automorphism group / V. K. Vildanov, E. A. Timoshenko // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2019. – Vol. 19, № 6. – P. 699–704. – DOI 10.17516/1997-1397-2019-12-6-699-704

[A.5] Зонов М. Н. О стандартной форме матриц второго порядка / М. Н. Зонов, Е. А. Тимошенко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – Вып. 59. – С. 5–10. – DOI 10.17223/19988621/59/1

[A.6] Гайдак В. А. Инволюции полной линейной группы GL_2 над подкольцом поля Q / В. А. Гайдак, Е. А. Тимошенко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – Вып. 62. – С. 19–26. – DOI 10.17223/19988621/62/2

[A.7] Mogilnykh I. Yu. A concatenation construction for propelinear perfect codes from regular subgroups of $GA(r,2)$ / I. Yu. Mogilnykh, F. I. Solov'eva // Siberian Electronic Mathematical reports. – 2019. – P. 1689–1702. – DOI 10.33048/semi.2019-16-119 (журнал входит во второй квартиль Q2 Scopus)

[A.8] Miroshnichenko I. V. The influence of surface radiation on the passive cooling of a heat-generating element / I. V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet, A. A. Mohamad // Energies. – 2019. – Vol. 12. – Article number: en12060980. – DOI 10.3390/en12060980 (журнал входит в первый квартиль Q1 Scopus)

[A.9] Miroshnichenko I. V. Comparison of two numerical approaches for natural convection in cavities with energy sources / I. V. Miroshnichenko, N. S. Gibanov, M.A. Sheremet // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. Vol. 1382. – Article number: 012131. – DOI 10.1088/1742-6596/1382/1/012131

[A.10] Md-Simulation of Fullerene Rotations in Molecular Crystal Fullerite / A. M. Bubenchikov [et al.] // Crystals. – 2019. – Vol. 9. – Article number: 496. – DOI 10.3390/cryst9100496 (журнал входит во второй квартиль Q2 Scopus)

[A.11] Исследование проницаемости углеродного нанополотна / М. А. Бубенчиков [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 57. – С. 62–75. – DOI 10.17223/19988621/57/5

Статьи, сданные в печать, и препринты:

[A.12] Fegchun Lei, He Liu, Fengling Li, Andrei Vesnin A characteristics for a surface sum of two handlebodies along an annulus or a once-punctured torus to be a handlebody, 11 pp., preprint is available at arXiv:1908.10113 [math.GT]

[A.13] Fegchun Lei, He Liu, Fengling Li, Andrei Vesnin A sufficient and necessary condition for a surface sum of two handelbodies to be a handlebody, 11 pages, accepted to Science China Mathematics.