

Зацепления в гомологической сфере Пуанкаре

Бао Выонг

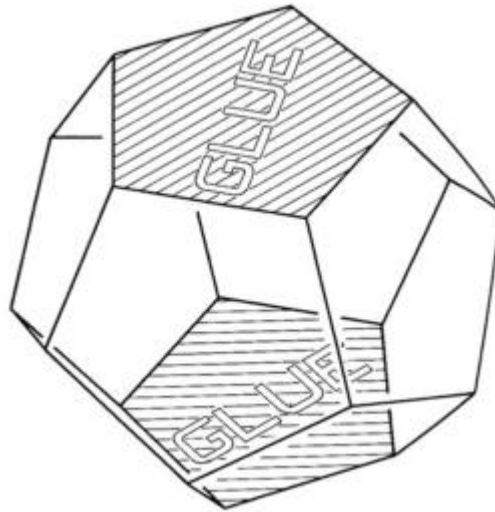
Евтеев Владимир

Абросимов Николай

Семашко Максим

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ СФЕРА ПУАНКАРЕ

- Каждая грань додекаэдра отождествляется с противоположной путем сдвига с поворотом на угол $\pi/5$. В результате получим замкнутое 3-мерное многообразие.

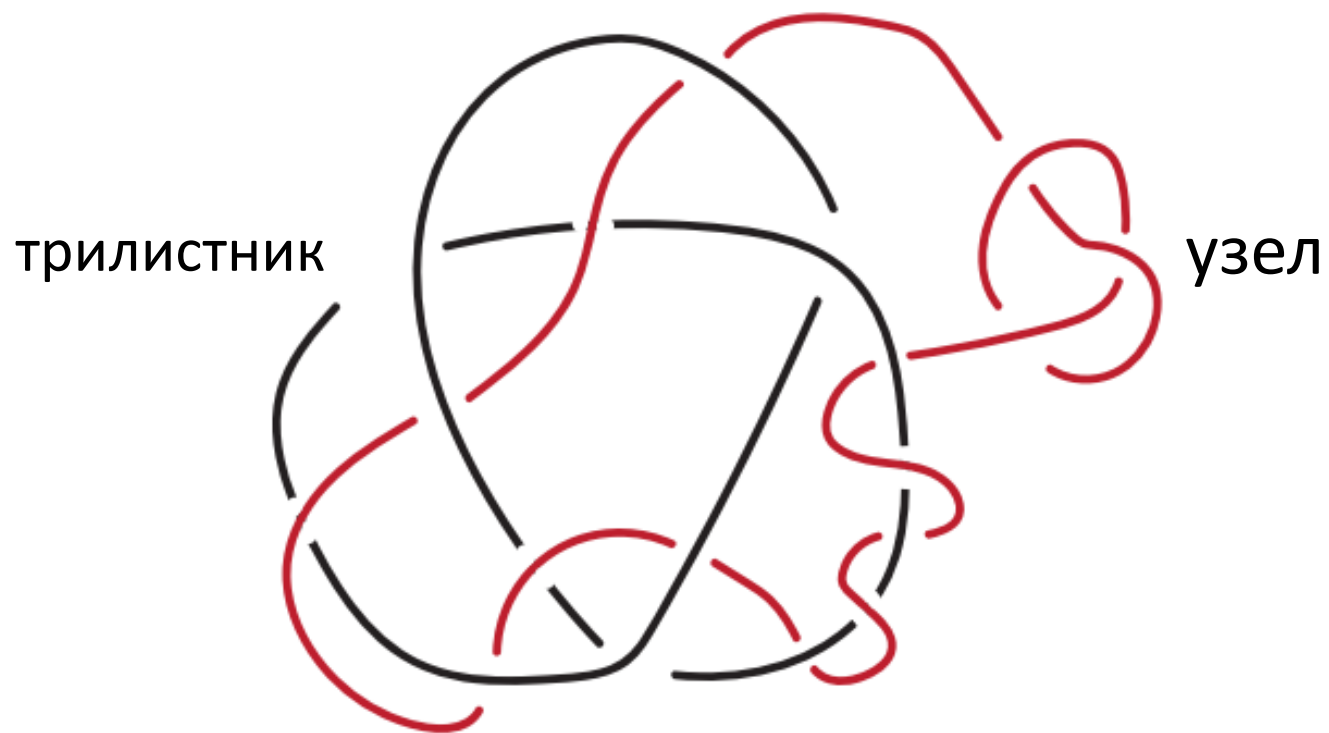


Додекаэдр. Изображение из The Shape of Space by Jeffrey R. Weeks

Гомологическая сфера Пуанкаре получается перестройкой вдоль правого трилистника с оснащением $+1$ или перестройкой вдоль левого трилистника с оснащением -1 .

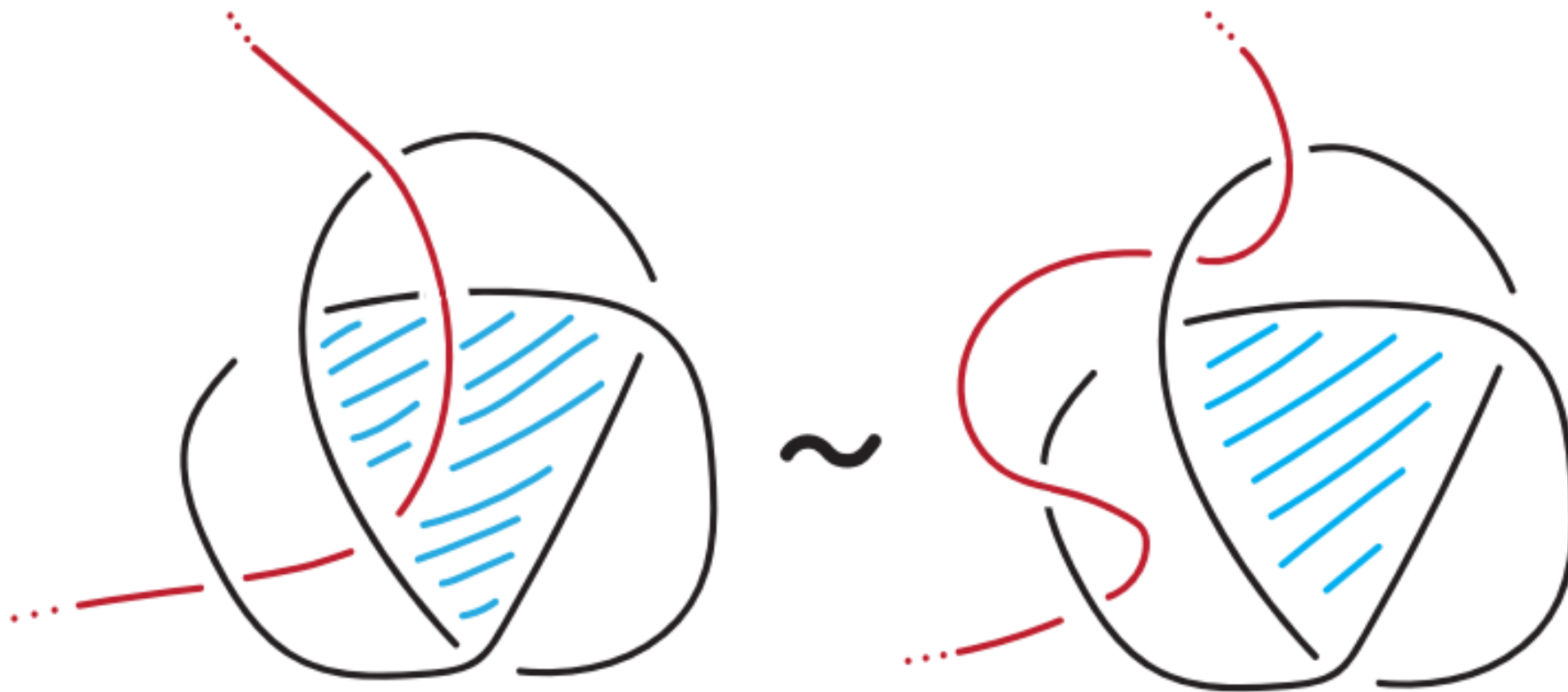


Рассмотрим диаграмму узла L , зацепленного с трилистником T в трехмерной сфере. Сделаем перестройку по трилистнику T . Получим вложение узла L в сфере Пуанкаре Σ .

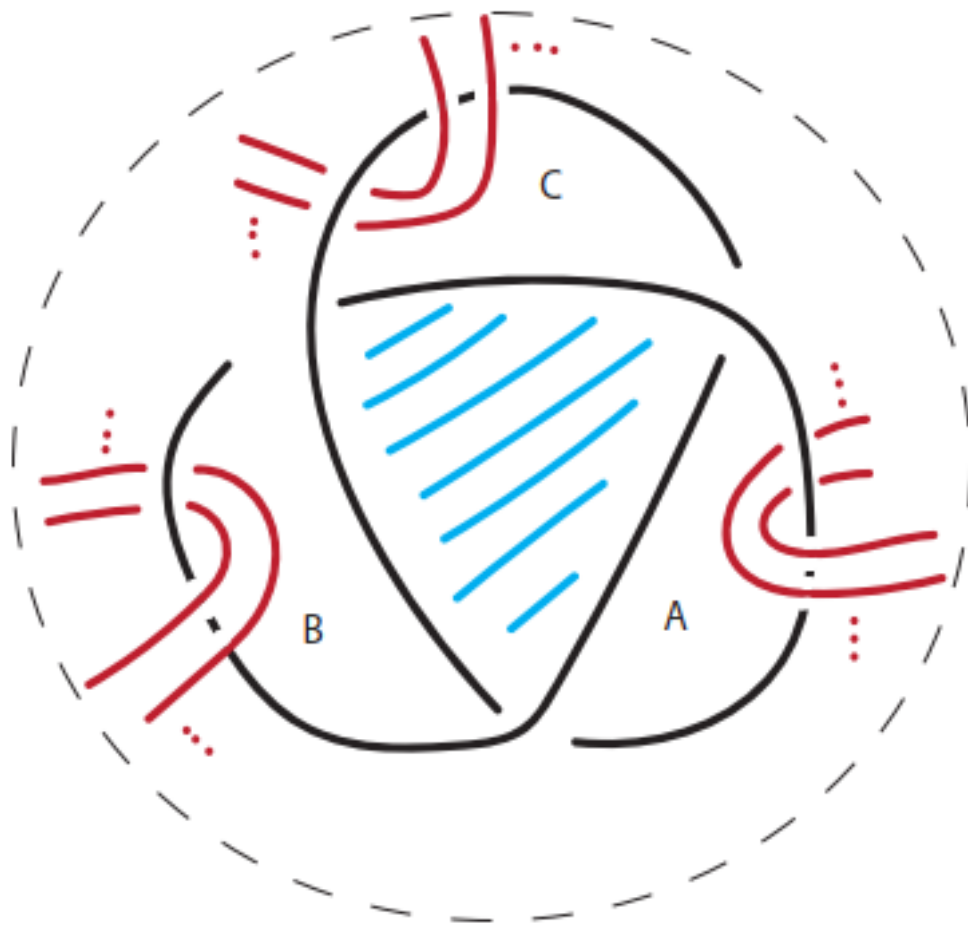


Смешанная диаграмма

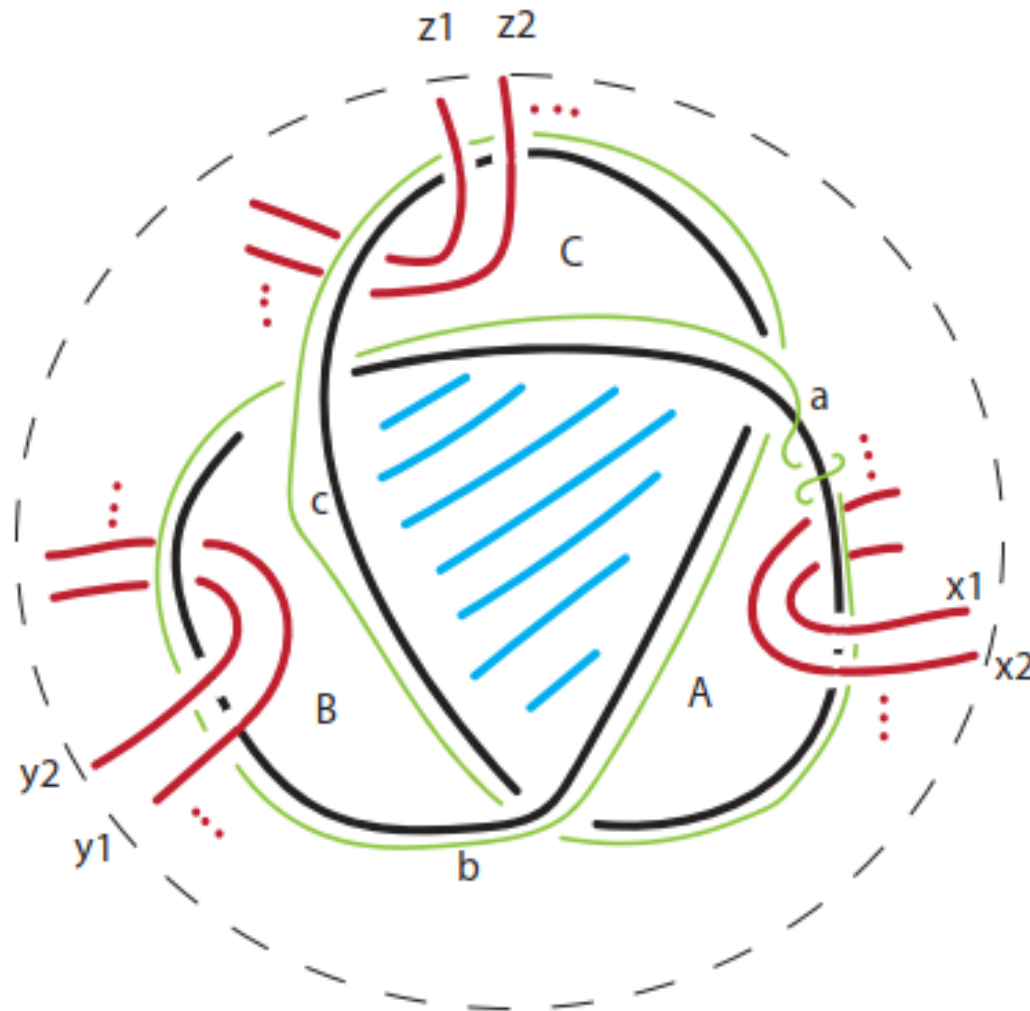
Модификация диаграммы



Локальная диаграмма в окрестности трилистника



Фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma \setminus L)$ дополнения зацепления L в гомологической сфере Пуанкаре представляется *смешанной диаграммой*.



Теорема 1.

Фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma \setminus L)$ дополнения зацепления L в гомологической сфере Пуанкаре Σ имеет следующее конечное представление с образующими:

$$a, b, c, a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_1, x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j, z_1, \dots, z_k, h_1, \dots, h_s$$

И соотношениями:

Соотношение Виртингера типа 1 $w_1, \dots, w_s$

Соотношение Виртингера типа 2 $w_{s+1}, \dots, w_{s+i+j+k}$

Соотношение Виртингера типа 3 t_1, t_2, t_3

Отношение перестройки $\prod_i x_i^{\delta_i} b \prod_k z_k^{\xi_k} a \prod_j z_j^{\zeta_j} c a^{-2} = 1$, где $\delta_i, \xi_k, \zeta_j \in \{-1, +1\}$

Следствие 2.

Первая группа гомологий $H_1(\Sigma \setminus L)$ дополнения зацепления в гомологической сфере Пуанкаре Σ изоморфна $\mathbb{Z}^n$, где n число компонент зацепления.

Полином Александера для зацепления L в сфере Пуанкаре Σ

Пусть $X = \Sigma \setminus L$ дополнение зацепления L в Σ .

Ядро отображения $\pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ соответствует бесконечному циклическому накрытию $p: \hat{X} \rightarrow X$ дополнения.

Первая группа гомологий $H_1(\hat{X})$ это модуль над кольцом целых полиномов Лорана $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \Gamma$, посредством действий группы накрывающих трансформаций $\hat{X}$.

Γ -модуль можно представить матрицей A преобразования

$$\Gamma^n \xrightarrow{A} \Gamma^m \rightarrow H_1(\hat{X}) \rightarrow 0$$

Полином Александера $\Delta_L(X)$ может быть получен из $m \times n$ матрицы A .

Свободное исчисление Фокса для конечно представленной группы

$$P = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$$

$H = G/G'$ – абелизация группы G . $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – свободная группа.

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[H],$$

где $\frac{\partial}{\partial x}$ – производная Фокса, γ фактор по соотношениям $r_1, \dots, r_m$,

α – отображение абелизации. Матрица Александера-Фокса представления P – это матрица $A = [a_{i,j}]$, где

$$a_{i,j} = \alpha\left(\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)$$

Поверхности Зейферта

Теорема 3.

Каждое ориентированное зацепление L в гомологической сфере Пуанкаре Σ ограничивает поверхность Зейферта в Σ .

Благодаря этой поверхности каждый инвариант, связанный с ней в классической теории узлов, такой как матрица Зейферта, полином Александера, форма пересечений, может быть обобщен.

Лемма 4.

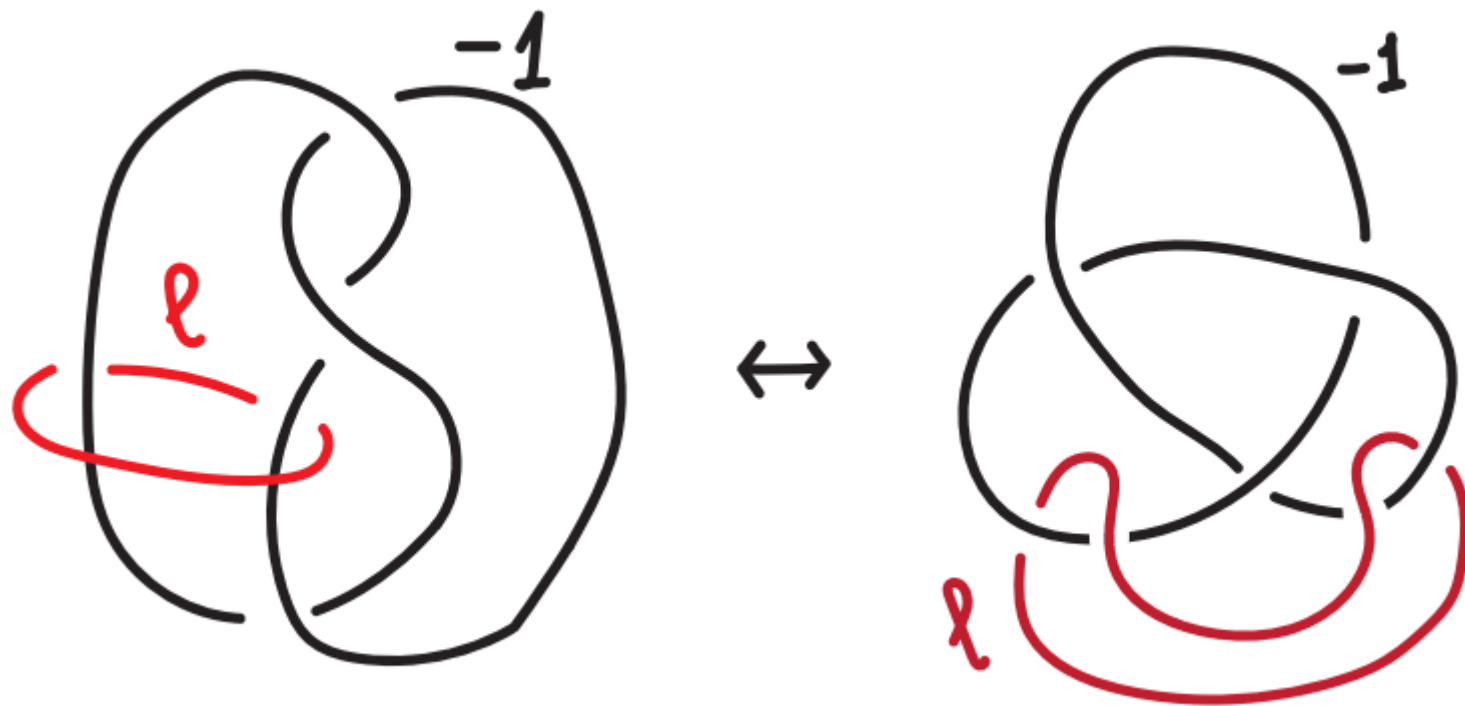
Пусть k и l зацепления в гомологической сфере Пуанкаре Σ с $lk(k, l)=0$. Тогда существует поверхность Зейферта F_l для l , что $F_l \cap k = \emptyset$.

Определение 5. Зацепление $l \cup k$ в гомологической сфере Пуанкаре Σ называется *почти разводимым*, если k и l ограничивают непересекающиеся поверхности Зейферта.

Лемма 6. Пусть $l \cup k$ почти разводимое зацепление в гомологической сфере Пуанкаре Σ и $\Sigma' = \Sigma + \epsilon \cdot k$ перестройка Σ по k с коэффициентом $\epsilon = \pm 1$. Тогда полином Александера для l в Σ и для l' в Σ' одинаков, где l' образ l после перестройки.

Лемма 7. Пусть k – узел в гомологической сфере. Тогда существует узел l в S^3 такой, что многочлен Александера для k и для l одинаков.

Пример

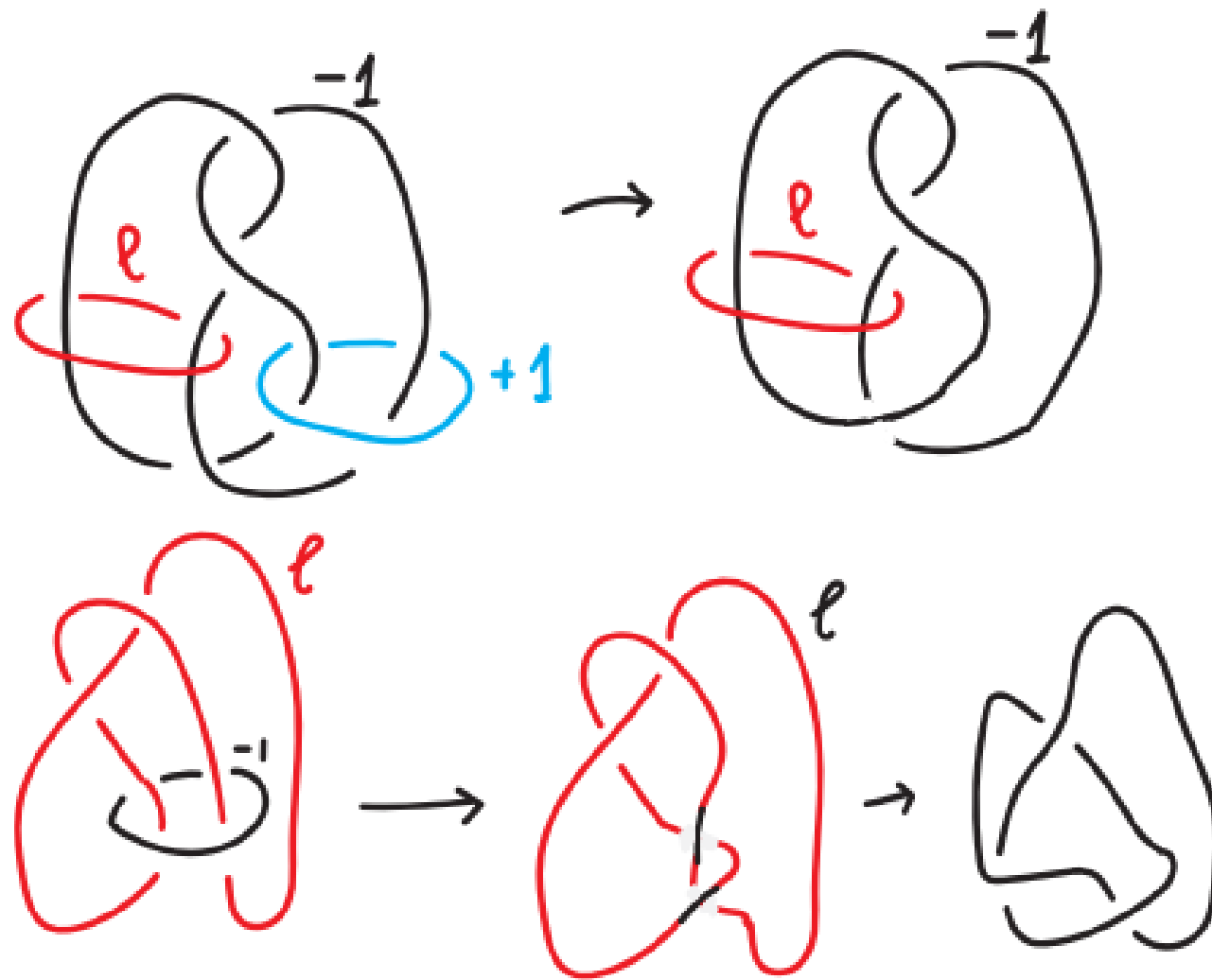


Фундаментальная группа узла I в гомологической сфере Пуанкаре имеет представление с образующими a, b, c, a_1, b_1, x, y и соотношениями $a = c^{-1}b_1c, b = a^{-1}ca, c = b^{-1}a_1b, y = a_1^{-1}xa_1, a_1 = y^{-1}ay, b_1 = yby^{-1}, x = byb^{-1}, ybay^{-1}ca^{-2} = 1$

Матрица Александера-Фокса

-1	0	0	0	1	0	0
0	-1	1	0	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	$-t^{-1} + 1$	0	t^{-1}	$-t^{-1}$
t^{-1}	0	0	-1	0	0	0
0	t	0	0	-1	0	0
0	$t^{-1} - 1$	0	0	0	$-t^{-1}$	t^{-1}
$t - 2$	t	1	0	0	0	0

Многочлен Александера $t^2 - t + 1$



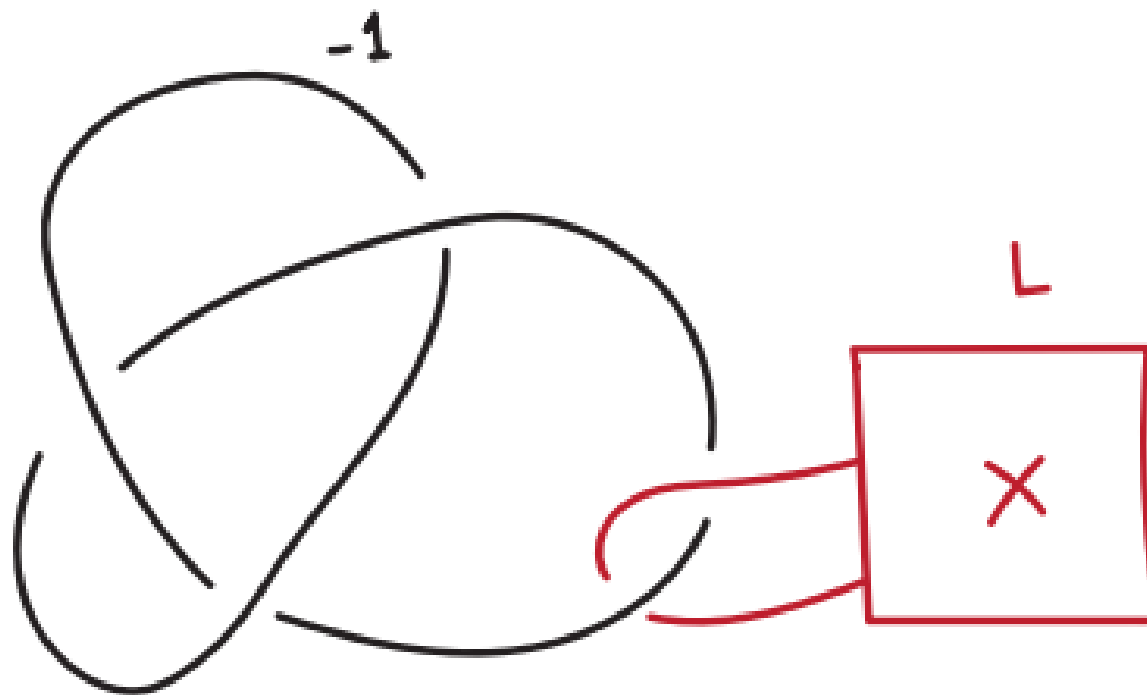
Многочлен Александера трилистника $t^2 - t + 1$

Определение 8. Зацепление в гомологической сфере Пуанкаре Σ называется *аффинным* если оно содержится в некотором 3-мерном шаре внутри Σ .

Предложение 9. *Полином Александера аффинного зацепления в гомологической сфере Пуанкаре Σ такой же как многочлен Александера этого зацепления в 3-сфере S^3 .*

Предложение 10. *Пусть L зацепление в гомологической сфере Пуанкаре Σ и L' аффинное зацепление, тогда полином Александера связной суммы $L \# L'$ равен произведению полиномов Александера L и L' .*

Предложение 11. Пусть $\Delta(L)$ – полином Александера зацепления L в гомологической сфере Пуанкаре Σ , представленного смешанной диаграммой. Обозначим L' классическое зацепление в S^3 до перестройки по трилистнику T . Пусть $\Delta_i(L' \cup T)$ – i -й многочлен Александера от двух переменных для зацепления $T \cup L'$ в S^3 (переменные соответствуют L' и T). Тогда $\Delta(L)(t)$ делит $\Delta_1(L' \cup T)(t, t^\gamma)$ и $\Delta(L)(t)$ делится на $\Delta_2(L' \cup T)(t, t^\gamma)$, где $\gamma = \sum \delta_i + \epsilon_j + \zeta_k$.



Открытая задача

Определение: Пусть L_0 и L_1 узлы в сфере Пуанкаре Σ . Будем говорить, что L_0, L_1 *конкордантны* если существует вложение $f: S^1 \times I \rightarrow \Sigma \times I$ такое что $f(S^1 \times \{0\}) = L_0 \times \{0\} \subset \Sigma \times \{0\}$ и

$$f(S^1 \times \{1\}) = L_1 \times \{1\} \subset \Sigma \times \{1\}$$

Если L конкордантен тривиальному узлу, то L называется *срезанным узлом*.

Вопрос: *Какова структура полинома Александера для срезанных узлов?*

Спасибо за внимание!