Чётность-нечётность

Свойства чётных и нечётных чисел:

1. *Сумма двух чисел одной чётности – чётна, сумма двух чисел разной чётности – нечётна.*
2. *Произведение двух нечётных чисел – нечётно, произведение чётного числа и любого целого – чётно.*
3. *Сумма чётного количества нечётных чисел – чётна, сумма нечётного количества нечётных чисел – нечётна.*

Задачи

1. На доске 25 × 25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

2. Пусть m и n – целые числа. Докажите, что $mn(m+n)$ – чётное число.

3. В плоскости расположено 11 зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т.д. Наконец, последнее, одиннадцатое, колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

4. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

5. Два класса с одинаковым количеством учеников написали контрольную. Проверив контрольные, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем всех остальных оценок. Правду ли он сказал?

6. Автомат при опускании десятирублёвой монеты выбрасывает пять двухрублёвых, а при опускании двухрублёвой – пять десятирублёвых. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двухрублёвой монетой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двухрублёвых монет и десятирублёвых?

7. Может ли шахматный конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

8. На доске написаны числа 0, 1, 0, 0. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться, чтобы все числа стали равными?

9. Можно ли расставить знаки «+» или «–» между каждыми двумя соседними цифрами числа 123456789, чтобы полученное выражение равнялось нулю?

10. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2015. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать их разность. Можно ли добиться того, чтобы на доске осталось а) только число 1? б) только число 0?

11. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все её звенья?

12. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

13. На Планете Драконов обитают драконы с одной, двумя и тремя головами. 99 драконов с этой планеты привезли в Московский зоопарк. Вася, посетивший вольер с драконами, насчитал у них 250 голов. Докажите, что среди привезённых драконов есть хотя бы один двухголовый.

14. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

15. На дереве растет 2015 апельсинов и 2014 бананов. Разрешено срывать одновременно два фрукта. Если срывают два одинаковых фрукта, то вместо них мгновенно вырастает один банан. Если

же срывают два разных фрукта, то вместо них мгновенно вырастает один апельсин. Через некоторое время на дереве остался один фрукт. Что это за фрукт - банан или апельсин?

16. По кругу написаны все целые числа от 1 по 2016 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

17. Клетки доски 7×7 покрашены в шахматном порядке так, что углы покрашены в чёрный цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в белый цвет? А в чёрный?

18. На плоскости лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Могут ли все шайбы вернуться на свои места после 25 ударов?

19. Существуют ли нечётные целые числа x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2?$$

20. Три бегуна – X, Y и Z – участвуют в забеге. Z задержался на старте и выбежал последним, а Y выбежал вторым. Z во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а X – 5 раз. Известно, что Y финишировал раньше X. В каком порядке они финишировали?

21. Можно ли окрасить на клетчатой бумаге 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечётное число окрашенных соседей? (Соседними клетками считаем те, у которых есть общая сторона).

22. Дано n чисел, $x_1, x_2, \dots, x_n$, при этом $x_k = \pm 1$ для каждого $1 \le k \le n$. Докажите, что если $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$, то n делится на 4.

23. Окружность разбита точками на $3k$ дуг: по k дуг длиной 1, 2 и 3. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположные точки деления.