

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ТГУ)

УДК 514.1  
Рег. № НИОКТР АААА-А19-119120690010-8  
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной и  
инновационной деятельности ТГУ  
д-р физ.-мат. наук, профессор

\_\_\_\_\_ А.Б. Ворожцов  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:  
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР  
(промежуточный, этап 3)

Соглашение № 075-02-2021-1392

Начальник научного управления  
канд. геол.-минерал. наук

\_\_\_\_\_ Т.С. Краснова  
подпись, дата

Руководитель НИР,  
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А.Ю. Веснин  
подпись, дата

Томск 2022

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР,  
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук,  
чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.Ю. Веснин  
(введение, раздел 2,  
заключение)

Исполнители:

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

В.Г. Бардаков  
(подраздел 1.1)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.М. Бубенчиков  
(подраздел 1.2)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

М.А. Бубенчиков  
(подраздел 1.2)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.В. Старченко  
(подраздел 1.3)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Е.А. Тимошенко  
(подраздел 1.4)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Н.В. Абросимов  
(подраздел 1.5)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

М.В. Агафонцев  
(подраздел 1.6)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Е.А. Данилкин  
(подраздел 1.3)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Т.А. Козловская  
(подраздел 1.7)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

И.А. Колесников  
(подраздел 1.8)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

И.В. Мирошниченко  
(подраздел 1.9)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Ц.Д. Норбосамбуев (подраздел 1.10)
	подпись, дата	
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	В.А. Пчелинцев (подраздел 1.11)
	подпись, дата	
Мл. науч. сотр.	_____	Х.Б. Выюнг (подраздел 1.5)
	подпись, дата	
Мл. науч. сотр.	_____	Н.С. Гибанов (подраздел 1.12)
	подпись, дата	
Мл. науч. сотр.	_____	Д.В. Лещинский (подраздел 1.3)
	подпись, дата	
Мл. науч. сотр.	_____	В.А. Потеряева (подраздел 1.2)
	подпись, дата	
Нормоконтролер	_____	Е.Н. Соколенко
	подпись, дата	

## РЕФЕРАТ

Отчет 103 с., 1 кн., 29 рис., 2 табл., 147 источн., 1 прил.

АБЕЛЕВА ГРУППА, ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Объектами исследования являются свойства абелевых групп, теоретико-множественные решения уравнений Янга-Бакстера, группы кос и их обобщения, геометрические структуры на трехмерных многообразиях и орбифолдах, конформные отображения, спектральные свойства эллиптических операторов, конвекция, теплопроводность и излучение в элементах строительных сооружений и в системах охлаждения, процесс горения, молекулярные кристаллы, свойства ультратонких наномембран, качество атмосферного воздуха в уличных каньонах городов, прогнозирование временных рядов, задачи электроимпедансной томографии.

Цель работы – получение новых научных результатов, направленных на развитие теорий, описывающих свойства исследуемых объектов, организация и проведение научно-образовательных мероприятий, направленных на развитие математики и математического образования в регионе.

В процессе работы получены новые научные результаты по 18 отдельным задачам в направлениях фундаментальной математики, математических методов в механике, математическом моделировании и анализе данных.

В рамках научно-образовательной деятельности Центра в 2021 году была опубликована 21 статья в научных журналах, индексируемых в одной из баз данных Web of Science, Scopus, проведено 11 научных и 8 образовательных мероприятий, 2 курса повышения квалификации, защищено 2 кандидатских диссертации.

Таким образом, все запланированные результаты в соответствии с Программой развития Центра на 2021 год получены.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	7
1 Научная составляющая.....	15
1.1 Уравнения $n$ -симплексов и связанные с ними алгебраические системы.....	15
1.2 Математические модели волновой и молекулярной динамики.....	19
1.3 Математические модели некоторых задач экологии и медицины.....	23
1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп.....	29
1.5 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	33
1.6 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных углеводородных топлив с применением оптических методов и математического моделирования.....	41
1.7 Группа сингулярных крашенных четырехнитиевых кос.....	45
1.8 Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости.....	55
1.9 Нестационарные режимы переноса массы, импульса и энергии в элементах строительных сооружений на основе преобразованных переменных «функция тока – завихренность».....	59
1.10 О некоторых свойствах кольца формальных матриц $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ .....	64
1.11 Оценки на собственные числа задачи Дирихле и Неймана для оператора $p$ -Лапласа.....	68
1.12 Численное исследование сопряженной естественной конвекции в замкнутой полости с локальными источниками энергии решеточным методом Больцмана.....	72
2 Образовательная составляющая.....	80
2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные центром.....	80
2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и образовательными организациями.....	81
2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром.....	82
2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра.....	83
2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре.....	83
2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром.....	84

2.7 Вовлечение студентов, магистрантов, аспирантов и исследователей центра к мероприятиям, проводимым другими научными и образовательными организациями, в том числе повышение квалификации сотрудников центра .....	84
2.8 Вовлечение школьников в мероприятия центра .....	85
2.9 Дополнительная информация о деятельности центра.....	87
Заключение.....	88
Список использованных источников .....	89
Приложение А (обязательное) Публикации .....	100

## ВВЕДЕНИЕ

Коллектив НОМЦ проводит исследования по трем большим направлениям, которые соответствуют сформированным в НОМЦ научным группам:

- фундаментальная математика,
- математические методы в механике,
- математическое моделирование и анализ данных.

Научные сотрудники группы фундаментальной математики проводят исследования по актуальным направлениям современной алгебры, геометрии и топологии, неевклидовой геометрии. Полученные результаты опубликованы в статьях [А.1]–[А.11] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и [А.22] в журнале, индексируемом в РИНЦ.

1. Уравнение Янга-Бакстера используется в статистической физике для точного решения некоторых моделей. В частности, модели льда, модели Изинга и др. При этом для описания модели Изинга используется целочисленная решетка на плоскости. При построении моделей, использующих  $n$ -мерную решетку, естественным образом возникает уравнение  $n$ -симплекса.

За отчетный период В.Г. Бардаков изучил общие уравнения  $n$ -симплекса, а также уравнение тетраэдра (3-симплекс) и уравнение Янга-Бакстера (2-симплекс). Найдены некоторые общие решения уравнения  $n$ -симплекса для произвольного  $n$ , а также решения уравнения тетраэдра и уравнения Янга-Бакстера. Доказано, что на свободной группе уравнение тетраэдра не имеет элементарных нетривиальных вербальных решений, зависящих от трех компонент. Для произвольной абелевой группы найдены все вербальные решения уравнения тетраэдра. Также найдены решения уравнения Янга-Бакстера, зависящие от 5 параметров.

2. В 1972 году представитель томской алгебраической школы А.М. Себельдин описал в работе [1] все вполне разложимые группы (без кручения), определяющиеся своим кольцом эндоморфизмов. Позднее в [2] он же описал все вполне разложимые группы, определяющиеся своей полугруппой эндоморфизмов.

Так как группа автоморфизмов абелевой группы  $G$  несет меньше информации о  $G$ , чем полугруппа или кольцо эндоморфизмов группы  $G$ , то следующим этапом исследования вполне разложимых групп естественным образом стал вопрос о том, какие из этих групп определяются своей группой автоморфизмов. Этой теме была посвящена защищенная в 2014 году в ТГУ диссертация В.К. Вильданова (ученика А.М. Себельдина) [3], в которой доказан ряд важных теорем.

Как отмечается в работе Кона [4], строение линейных групп порядка  $n$  существенно различается для случаев  $n = 2$  и  $n \geq 3$ . В связи с этим важным частным случаем, который должен дать ключ к решению вопроса об определяемости вполне разложимой группы произвольного ранга  $n \geq 3$  ее группой автоморфизмов, является аналогичный вопрос для вполне разложимых групп ранга 3 (полный ответ на тот же вопрос для групп ранга 2 был получен ранее [5]).

В данном проекте Е.А. Тимошенко исследованы автоморфизмы вполне разложимых групп ранга 3, содержащих однородное прямое слагаемое ранга 2; благодаря этому получен полный ответ на вопрос о том, какие вполне разложимые группы ранга 3 определяются своими группами автоморфизмов. Кроме того, было получено описание автоморфизмов конечных примарных групп рангов 2 и 3 с помощью формальных матриц. Для таких матриц найдены критерии обратимости, а также формулы для обратных матриц.

3. Изучение геометрии узлов, особенно гиперболической, началось с работы Р. Райли в 1970-х [6] и получило дальнейшее развитие в конце 1970-х – начале 1980-х годов с работой У. Тёрстона [7] (см. также предысторию вопроса в [8]). Тёрстон показал, что дополнение любого простого узла в трехмерной сфере, за исключением торических и сателлитных, допускает введение полной гиперболической структуры [9]. При этом, среди всех простых узлов, классифицированных Хостом, Тислтуэйтом и Уиксом, диаграммы которых имеют до 16 перекрестков, только 13 – торические узлы, 20 – сателлитные, а оставшиеся 1 701 903 – гиперболические [10]. Согласно работам Мостова, Прасада и Коджимы [11]–[13], если дополнение узла допускает гиперболическую структуру, то она единственна. Мостов доказал соответствующее утверждение для замкнутых гиперболических 3-многообразий, Прасад расширил его для орбифолдов конечного объема, а Коджима доказал соответствующую теорему жесткости для конических многообразий с углами, не превосходящими  $\pi$ .

В данном проекте Н.В. Абросимовым (совместно с А.Д. Медных) изучены геометрические свойства гиперболического 3-многообразия  $m125$ , гомеоморфного дополнению к крендельному зацеплению  $(-2, 3, 8)$ , известному также как «Сестра зацепления Уайтхеда». Я. Агол показал [14], что зацепление Уайтхеда и его «Сестра» – два наименьших по объему гиперболических многообразия с двумя каспами. Нами установлены тригонометрические соотношения, связывающие длины сингулярных геодезических и конические углы для семейства конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ , полученных орбифолдными хирургиями Дена на многообразии  $m125$ . С помощью установленных соотношений и дифференциального уравнения типа Шлефли удалось

получить явную интегральную формулу для гиперболического объема данного семейства конических многообразий.

Второе направление исследований в отчетном периоде было связано с изучением неевклидовых многогранников и их объемов. Объем компактной гиперболической антипризмы был ранее найден Н.В. Абросимовым и Х.Б. Выюгом [15]. Идеальная антипризма в  $\mathbb{H}^3$ , все вершины которой лежат на бесконечности, изучена А.Ю. Весниным и А.Д. Медных [16] (также [17]). Частный случай идеальной прямоугольной антипризмы восходит к У. Тёрстону [7], который использовал ее в качестве фундаментального многогранника для построения бесконечной серии замкнутых гиперболических 3-многообразий. В данном проекте Н.В. Абросимовым и Х.Б. Выюгом изучены антипризмы в трехмерном сферическом пространстве. Установлен критерий существования антипризмы с  $2n$  вершинами в  $S^3$  в терминах длин ребер. Найдены соотношения между двугранными углами и длинами ребер. Получена точная формула для вычисления объема сферических антипризм в терминах длин ребер.

4. Т.А. Козловская построила систему порождающих и определяющих соотношений для группы крашенных сингулярных кос в случае четырех нитей. Для кос на четырех нитях доказано, что центр группы сингулярных кос выделяется прямым множителем в группе крашенных сингулярных кос.

5. В работе [18] предложен однопараметрический метод нахождения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца. Искомое отображение вкладывается в однопараметрическое семейство конформных отображений  $f = f(z, t)$  верхней полуплоскости на семейство счетноугольников  $\Delta(t)$ , получаемое сдвигом некоторых вершин начального счетноугольника  $\Delta(0)$  при условии сохранения углов. Задача определения параметров семейства отображений  $f$  сведена к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

Голоморфное однолистное отображение  $f$  верхней полуплоскости на односвязную область  $\Delta$  с границей, состоящей из отрезков прямых, обладающую симметрией переноса и такую, что  $\Delta \supset \{z : \text{Im } z > M\}$  при некотором  $M$  (называемую счетноугольником с симметрией переноса), можно записать с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца [19]. Конформное отображение на счетноугольник находит приложения в некоторых задачах математической физики. Существует ряд работ, направленных на решение проблемы определения параметров такого отображения [20, 21].

Однопараметрический метод, предложенный И.А. Колесниковым в работе [18], распространен на случай счетноугольника с симметрией переноса. Результаты получены в рамках заявленной тематики (определение параметров конформного отображения на круговой многоугольник). Решена смежная задача об определении параметров конформного отображения полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса.

6. Пусть  $p$  – простое число.  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$  – абелева группа порядка  $p^3$ . Как устроено её кольцо эндоморфизмов Бергман [22] доказал, что если  $p$  – простое число, то  $\text{End}((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))$  – полулокальное кольцо мощности  $p^5$ , которое не может быть вложено в кольцо матриц ни над каким коммутативным кольцом. Климент, Наварро и Тортоса изучили арифметику кольца  $\text{End}((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))$ , которое они обозначают  $E_p$ , описали группу его обратимых элементов, центр. Далее ими были построены криптографические системы, основывающиеся на арифметике  $E_p$ .

На кольцо  $\text{End}((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))$  можно посмотреть как на кольцо формальных (или как еще говорят «обобщенных») матриц над кольцами вычетов. Теория колец формальных матриц изложена в книге [23]. Вообще,  $\text{End}((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ ,  $n < m$  – наглядная иллюстрация к понятию кольца формальных матриц [23].

В недавней статье Е.А. Тимошенко и А.Ю. Степановой [24] изучаются кольца эндоморфизмов конечных примарных абелевых групп ранга 2 и 3. Всякая конечная  $p$ -группа  $H$  ранга 2 может быть отождествлена с подходящей группой вида  $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ , где  $m \geq n > 0$ ; Тогда ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу обобщенных матриц над кольцами вычетов над кольцами вычетов. Ц.Д. Норбосамбуев нашел необходимые и достаточные условия обратимости таких матриц, а также формулы для построения обратной матрицы.

Пусть  $k$  – натуральное число,  $k \geq 2$ ,  $R$  – кольцо. Элемент  $a$  кольца  $R$  называется  $k$ -хорошим, если его можно записать в виде суммы  $k$  обратимых элементов кольца  $R$ . Кольцо  $R$  называется  $k$ -хорошим, если каждый его элемент является  $k$ -хорошим. Если  $R$  не является  $k$ -хорошим ни для какого натурального номера  $k$ , но все элементы  $k$ -хорошие для разных номеров  $k$ , то будем называть  $R$   $\omega$ -хорошим.

Аналогично, элемент кольца назовем  $k$ -ниль-хорошим, если его можно представить в виде суммы одного нильпотентного и  $k$  обратимых элементов. Кольцо  $R$  назовем  $k$ -ниль-хорошим, если все его элементы  $k$ -ниль-хорошие. Если кольцо  $R$  не является  $k$ -ниль-хорошим ни для какого  $k$ , но каждый элемент из  $R$  является  $k$ -ниль-хорошим для подходящего  $k$ , то будем говорить, что  $R$  есть  $\omega$ -ниль-хорошее кольцо.

Ц.Д. Норбосамбуев показал, что при  $p=2$   $\text{End}((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))$  –  $\omega$ -хорошее кольцо, при  $p>2$  – 2-хорошее,  $\text{End}((\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}))$ ,  $n<m$  –  $\omega$ -хорошее кольцо.

Ясно, что если кольцо  $R$  является  $k$ -хорошим, то оно будет и  $k$ -ниль-хорошим. Следовательно, при  $p=2$   $\text{End}((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))$  –  $\omega$ -ниль-хорошее кольцо, при  $p>2$  – 2-ниль-хорошее.

7. Решения классических уравнений математической физики основаны на спектральном разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Поэтому проблема исследования собственных чисел для оператора  $p$ -Лапласа ( $p>1$ ) является весьма актуальной. В отчетный период исследования В.А. Пчелинцева были направлены на получение оценок на собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа ( $p=2$ ) в ограниченных областях, удовлетворяющих квазигиперболическому условию на границу. По принципу минимакса собственные числа характеризуются в терминах норм операторов вложения пространств Соболева. Для получения оценок был предложен метод в теории вложения пространств Соболева, основанный на взаимосвязях геометрической теории операторов композиции в пространствах Соболева и теории квазиконформных отображений. На этом пути в проекте нами получены нижние оценки первых собственных чисел для оператора Лапласа ( $p=2$ ) с краевым условием Дирихле в ограниченных областях с гладкими и негладкими границами. Согласно свойству монотонности по области собственных чисел задачи Дирихле для оператора Лапласа были получены оценки изменения первых собственных чисел для оператора Лапласа ( $p=2$ ) при квазиконформных деформациях области.

В области прикладной математики и механики основным направлением исследований являются актуальные задачи теоретической механики и математической физики, сосредоточенные, в частности, на задачах молекулярной физики и методов молекулярной динамики, а также задачах по конвективному теплопереносу и методов сложного теплообмена, исследованием характеристик сгорания жидкого топлива. Результаты работы по этому направлению опубликованы в статьях [А.12]–[А.19].

1. В работах группы под руководством А. М. Бубенчиковара рассмотрены решения задач ольной динамики и классической молекулярной динамики. Проанализированы процессы резонансного прохождения изотопов гелия и водорода через составные моноатомные углеродные мембраны. Получены аналитические решения, демонстрирующие существование резонансных дистанций между моноатомными слоями. Рассмотрено прохождение осесимметричных звуковых волн через многослойную акустическую систему, моделирующую стенку газопровода, имеющую внутреннее и

внешнее покрытие. Предложен метод “сшивки” монохроматических звуковых волн по величине и гладкости распространений звукового давления.

В задачах молекулярной динамики найдены фуллерен-атомные, тор-атомные и тор-торовые потенциалы взаимодействия. На основе этих потенциалов проанализировано поведение фуллеренов внутри нанотрубок, а также поведение наноторов в столбчатых фазах, рассматриваемых супермолекул.

2. Диффузионный режим горения различных видов горючих материалов является наиболее распространенным, в связи с простотой реализации и использования на практике. Как правило, в топочных устройствах процесс горения реализуется в условиях турбулентности [25]. За счет того, что газообразные продукты горения перемещаются по потоку с различными скоростями, то на участке пламени, расположенным за ламинарной зоной, его фронт приобретает непредсказуемую форму. Существуют перспективные методы, которые позволяют управлять физико-химическими процессами в факеле пламени за счет внешнего воздействия на его отдельные участки. Видами такого воздействия могут служить, например, пульсации давления в виде звуковых колебаний, а также электромагнитное поле.

В работах [26–34] освещается вопрос изучения влияния акустических колебаний на факел пламени как экспериментальными методами, так и с использованием аппарата математического моделирования. Авторы работ делают вывод о том, что применение акустических волн является возможным способом управления режимом горения. При таком типе воздействий увеличивается эффективность сгорания топлива за счет интенсификации перемешивания топлива и окислителя, и уменьшается количество вредных газообразных продуктов горения [27–31]. Авторами [32] установлено, что пламя, при горении круглой микро – струи в поперечном акустическом поле, подвержено влиянию акустических колебаний, что проявляется в уплощении круглой струи с разделением ее на две части. В работе [33] представлен подробный обзор публикаций по влиянию акустических воздействий на пламена различной структуры, в том числе и на закрученные. Таким образом можно сделать выводы об актуальности области исследования М.В. Агафонцева: методов управления процессом горения, и важности данной тематики для развития фундаментальной и прикладной науки.

3. Проблему энергоэффективности зданий и сооружений невозможно решать без исследования теплообменных процессов, происходящих как в самих ограждающих конструкциях, так и внутри помещения. Для корректного описания процессов теплообмена в строительных сооружениях необходимо учитывать их нестационарный характер, влияние окружающей среды и возможное наличие источников тепловыделения. Детальный анализ

теплопереноса внутри ограждающих конструкций также может помочь значительно снизить удельное энергопотребление зданий.

Проведенное в рамках проекта И.В. Мирошниченко численное моделирование процессов сложного теплообмена (конвекция, теплопроводность, излучение) в элементах строительных сооружений позволило определить основные закономерности процессов тепломассопереноса и предложить способы снижения интегрального коэффициента теплоотдачи. Установлено, в частности, характерное снижение интенсивности конвективного теплообмена с увеличением излучательной способности внутренних поверхностей твердых стенок строительного элемента.

4. Сопряженная термогравитационная конвекция привлекает внимание ученых со всего мира благодаря широкому спектру задач, в которых данные механизмы теплопередачи могут быть применены. Одной из таких задач является конвективно-кондуктивное охлаждение радиоэлектронных блоков с нагревательными элементами. Подобного рода задачи особенно актуальны в связи с интенсивным развитием микро- и радиоэлектронной техники, при этом мощность таких устройств также растет, следовательно, увеличивается энергопотребление и тепловая нагрузка активных элементов. В связи с этим требуется разработка активных и пассивных систем охлаждения. Анализ пассивных систем охлаждения не так широко распространен по сравнению с активными системами охлаждения, где можно найти множество опубликованных результатов [35–39]. Для изучения эффективности систем пассивного охлаждения предлагается учитывать влияние геометрической формы нагревательного элемента и теплопроводности материала подложки, на которой размещен этот локальный источник энергии.

По направлению математического моделирования и анализа данных группой под руководством А.В. Старченко совместно с Е.А. Динилкиным и Д.В. Лищинским проводятся исследования в области математического моделирования и вычислительной математики, сосредоточенные, в частности, на задачах, связанных с исследованием процессов распространения выбросов автотранспорта и экстремальных погодных условий, эффекта «городской остров тепла» в Томске, прогнозированием временных рядов по историческим данным, методом решения прямых задач электроимпедансной томографии. Полученные в рамках выполнения работы результаты опубликованы в статьях [А.20, А.21], [А.23]–[А.26].

Моделирование течений в уличных каньонах и элементах городской застройки с использованием гидродинамических моделей турбулентности (RANS, LES, DES) активно развивается как у нас в стране, так и за рубежом. Микромасштабное моделирование атмосферного пограничного слоя в городской застройке в настоящее время представляет

собой одно из важнейших современных направлений вычислительной метеорологии и имеет большое научное значение. Так, например, численное моделирование турбулентных течений в городской среде является одним из эффективных инструментов для изучения процессов взаимодействия атмосферы и урбанизированной поверхности.

Изучение движения воздушных потоков внутри городской застройки – это еще и важная прикладная задача, ее решение может помочь выявить загрязненные территории, оптимизировать городское планирование и потоки транспорта. Исследования такого рода актуальны для понимания микроклимата городов, полезны при возведении новых зданий, автомагистралей и дорожных развязок.

Моделирование состава атмосферы и ее динамики в городском подслое, представляет собой сложнейшую задачу математического моделирования. За последние несколько десятилетий исследователи значительно продвинулись в части моделирования переноса вредных выбросов. В качестве важных параметров, влияющих на структуру течения и механизм распространения примеси, можно выделить метеоусловия (скорость и направления ветра), геометрические характеристики застройки, температурную неоднородность, влияние растительности и движущегося автотранспорта. Применяются и новые подходы, LES и DNS- модели, позволяющие за счет явного разрешения крупных вихрей и воспроизведения нестационарной структуры потока, изучать особенности динамики проветривания улиц, например, при одномоментном выбросе примеси. Однако далеко не все аспекты задачи о моделировании переноса выбросов автотранспорта изучены, и работы в этом направлении продолжают группы исследователей из разных стран (США, Дания, Франция, Китай). В России основными центрами по изучению и использованию вихререшающего моделирования для решения практических задач являются МГУ и ИВМ РАН.

Все запланированные на 2021 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены. Все полученные результаты являются новыми, они прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

## 1 Научная составляющая

### 1.1 Уравнения n-симплексов и связанные с ними алгебраические системы

**Введение.** Уравнение Янга-Бакстера (уравнение треугольника) появилось в работе Ч. Н. Янга 1968 г. и Р. Д. Бакстера 1971 г. Оно используется в статистической физике для точного решения некоторых моделей. В частности, модели льда, модели Изинга и ряда других. Также оно широко применяется в теории узлов, в теории кос, в теории электрических цепей. Отметим, что некоторые современные квантовые компьютеры основаны на модели Изинга.

Для описания модели Изинга используется целочисленная решетка на плоскости. При обобщении этой модели, рассматриваются целочисленные n-мерные решетки, что приводит к уравнению n-симплекса. Кроме того, уравнение 3-симплекса естественным образом возникает в электрических сетях при преобразовании «звезда - треугольник», а также при изучении 2-мерных узлов в 4-х мерной сфере.

Целью настоящего исследования является изучение общего уравнения n-симплекса, а также его частных случаев: уравнения тетраэдра (уравнение 3-симплекса) и уравнения Янга-Бакстера (уравнение 2-симплекса).

**Методы.** Прежде всего, надо разработать методы построения уравнения n-симплекса. Для этого опишем один из возможных подходов к описанию уравнения Янга-Бакстера. Предположим, что на плоскости заданы три прямые  $l_1, l_2, l_3$ , которые пересекаясь в вершинах  $R_{12}, R_{13}, R_{23}$  образуют треугольник (рисунок 1).

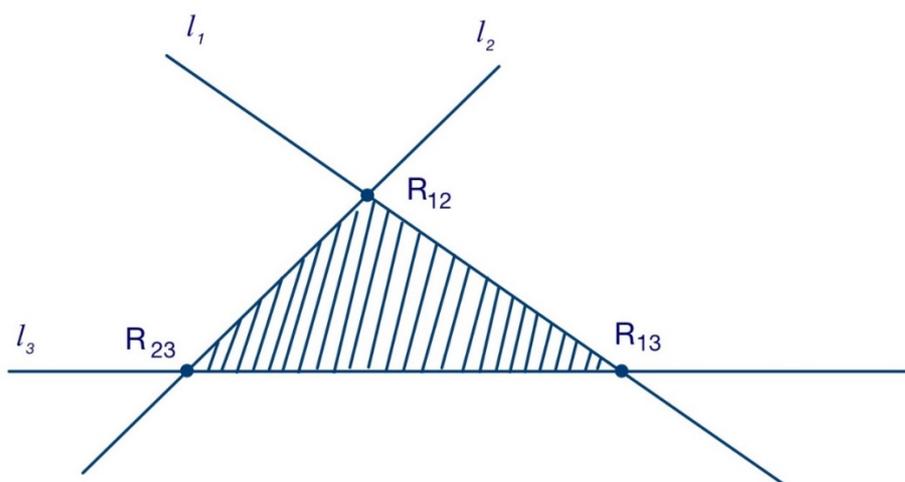


Рисунок 1 – 2-симплекс, соответствующий уравнению Янга-Бакстера

Упорядочим вершины, используя лексикографический порядок их индексов, т.е. положим  $R_{12} < R_{13} < R_{23}$ . Обходим вершины в порядке возрастания и выписываем произведение  $R_{12}R_{13}R_{23}$ . Обходим вершины в порядке убывания и опять выписываем произведение  $R_{23}R_{13}R_{12}$ . Приравнявая эти произведения, получим уравнение Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (1)$$

Решением уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  называется отображение  $R$ , переводящее  $X^2$  в  $X^2$  и удовлетворяющее уравнению (1). Здесь каждое отображение  $R_{ij}$  действует из  $X^3$  в  $X^3$ , при этом оно действует как  $R$  на  $i$ -й и  $j$ -й компонентах и тривиально на оставшейся компоненте.

Рассматривая вместо треугольника на плоскости тетраэдр в 3-х мерном пространстве (рисунок 2), аналогичным образом, приходим к уравнению тетраэдра, которое имеет вид

$$R_{123}R_{245}R_{346}R_{456} = R_{456}R_{346}R_{245}R_{123}. \quad (2)$$

Этот подход изложен в [40].

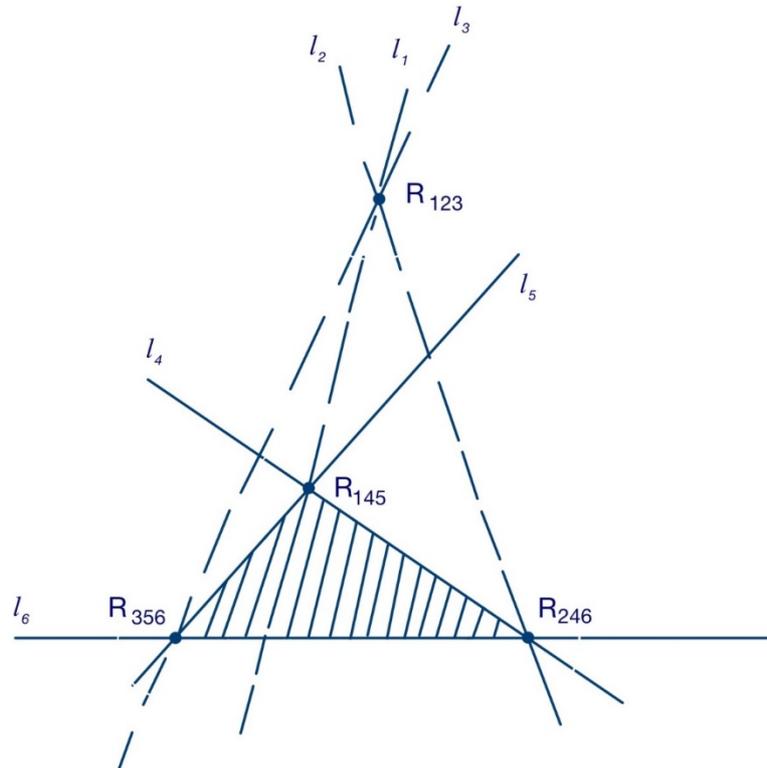


Рисунок 2 – Уравнение тетраэдра

За отчетный период изучались общие методы построения решений уравнений  $n$ -симплекса. В частности, разработан подход, позволяющий по известным решениям уравнения  $(n+k)$ -симплекса и  $(m+k)$ -симплекса находить решения уравнения  $(n+m+k)$ -симплекса. Этот подход позволяет находить решения уравнения тетраэдра, зная решения

уравнения Янга-Бакстера. Отметим, что уравнение Янга-Бакстера, в отличие от его высших аналогов, изучалось довольно давно и мы имеем богатый набор решений.

Для описания кусочно-линейных решений уравнения  $n$ -симплекса используются методы тропической геометрии, позволяющие переводить рациональные решения в кусочно-линейные. Идея этого метода состоит в следующем. Имея рациональное решение  $R$  уравнения  $n$ -симплекса, обладающее следующим свойством: каждая компонента  $R$  является рациональной дробью вида  $f/g$ , где  $f$  и  $g$  – многочлены от  $n$  переменных, у которых нет свободных членов и все коэффициенты равны 1, мы применяем преобразование тропикализации. Это преобразование переводит переменные в те же переменные, операция произведения переходит в сумму, сумма переходит в максимум, а частное переходит в разность. В результате получим кусочно-линейную функцию  $R^t$ . Справедлива следующая теорема, дающая метод, позволяющий переводить решения из одного класса в решения из другого класса.

**Теорема [40].** Если  $R$  – рациональное решение уравнения  $n$ -симплекса, обладающее указанными выше свойствами, то векторно-значная функция  $R^t$  является кусочно-линейным решением уравнения  $n$ -симплекса.

Для описания решений уравнения тетраэдра на группах используются методы теории групп и, в частности, комбинаторной теории групп, развитые в [41]. Элементарным решением называется решение, у которого лишь одна компонента не остается неподвижной. Вербальным решением называется решение, определенное некоторым набором слов (элементов свободной группы). Все вербальные элементарные решения уравнения Янга-Бакстера на свободной группе описаны. Используя эти методы можно описать и элементарные вербальные решения уравнения тетраэдра.

Наряду с классическим уравнением Янга-Бакстера изучаются уравнения Янга-Бакстера, зависящие от параметров. Используя методы представления группы кос и группы виртуальных кос, разработанные в [42], предложен метод построения решений параметрического уравнения Янга-Бакстера.

Каждому решению уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  можно сопоставить две бинарные алгебраические операции, превратив, тем самым,  $X$  в алгебраическую систему, называемую би-группоидом. Это открывает возможности использовать такие алгебраические системы как квандл, рэк, брэйс и другие для изучения решений уравнения Янга-Бакстера. Указанные алгебраические системы изучались в работах [А.3, 43–46]. С другой стороны, можно формулировать и обратную задачу. Предположим, что  $X$  не просто какое-то множество, а некоторая алгебраическая система (группа, кольцо, поле, квандл, брэйс) возникает вопрос об описании решений уравнения  $n$ -симплекса, заданных при

помощи алгебраических операций, определенных на  $X$ . Эти методы развивались в работах [47–49].

**Результаты и обсуждения.** Найдены общие решения уравнения  $n$ -симплекса для произвольного  $n$ , а также доказано, что всякое решение уравнения  $n$ -симплекса дает некоторое решение уравнения  $(n+1)$ -симплекса. С другой стороны, установлено, что если решение уравнения  $(n+1)$ -симплекса имеет неподвижную точку, то беря специализацию последней компоненты решение уравнения  $(n+1)$ -симплекса в этой точке, получим решение уравнения  $n$ -симплекса.

Более подробно изучались решения уравнения тетраэдра и решения параметрического уравнения Янга-Бакстера. При изучении решений уравнения тетраэдра на свободной группе доказана

**Т е о р е м а** [40]. На свободной неабелевой группе всякое элементарное вербальное решение уравнения тетраэдра либо является вырожденным, либо получается из решения уравнения Янга-Бакстера.

Эта теорема показывает, что ситуация с решениями уравнения Янга-Бакстера сильно отличается от решений уравнения тетраэдра. Напомним, что на произвольной группе существуют несколько классов элементарных вербальных, невырожденных решений уравнения Янга-Бакстера. Если изучать не только элементарные вербальные решения, то построенные пример показывают существование невырожденных решений уравнения тетраэдра, определенных на произвольной группе (что равносильно, на свободной неабелевой группе).

Для произвольной абелевой группы найдены все элементарные вербальные решения уравнения тетраэдра.

С каждым решением уравнения тетраэдра на множестве  $X$  связана алгебраическая система с тремя тернарными алгебраическими операциями. Эта алгебраическая система впервые введена в работе [40] и названа 3-терноидом. С другой стороны, доказано, что если задан некоторый 3-терноид, то он определяет решение уравнения тетраэдра тогда и только тогда, когда операции удовлетворяют явно выписанным аксиомам.

Также изучались элементарные решения уравнения тетраэдра. Каждому такому решению соответствует тернар, т.е. алгебраическая система с одной тернарной операцией. Доказано, что некоторые такие тернары можно строить из би-группоидов, т.е. алгебраических систем с двумя бинарными операциями. Би-группоиды являются более привычными алгебраическими объектами. К ним относятся кольца, поля, алгебры и ряд других.

Хорошо известно, что всякое решение уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  дает представление группы кос  $B_n$  в группу подстановок множества  $X^n$ . Если есть пара согласованных решений  $(R, S)$  на множестве  $X$ , где  $S$  – инволютивное решение, то это позволяет построить представление группы виртуальных кос  $VB_n$  в группу подстановок множества  $X^n$ .

**З а к л ю ч е н и е.** Ранее в работах Бардакова, Михальчишиной и Нецадима были построены представления группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения абсолютно свободной группы и свободной абелевой группы. Наиболее общее из этих представлений обобщает известные ранее представления. Используя это представление, найдены решения уравнения Янга-Бакстера на свободной группе, зависящие от 5 параметров из свободной абелевой группы.

Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в работах [А.3, А.4]. Результаты прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях:

1. 4-я международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», Томский государственный университет, Томск, Россия, 5-8 июля 2021 г. – В. Г. Бардаков «Уравнение тетраэдра и соответствующие алгебраические системы» (приглашенный доклад), <http://gqlt.rmc.math.tsu.ru>.

2. Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 9-13 августа, 2021 г. – В. Г. Бардаков «О виртуальных косах и виртуальных зацеплениях» (секционный доклад), <https://siriusmathcenter.ru/all-russian-conference>.

3. Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томский государственный университет, Томск, Россия, 6-11 декабря 2021 г. – В. Г. Бардаков «Уравнения  $n$ -симплексов и связанные с ними алгебраические системы» (приглашенный доклад), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>.

## **1.2 Математические модели волновой и молекулярной динамики**

**В в е д е н и е.** За отчетный период авторами А. М. Бубенчиковым, М. А. Бубенчиковым, В. А. Потеряевой были рассмотрены, решены и опубликованы работы по направлениям волновой динамики и классической молекулярной динамики. Опубликованные задачи волновой динамики относятся к прохождению изотопов гелия и водорода через двухслойные монокристаллические мембраны при криогенных температурах, а также к прохождению звуковых волн через многослойные осесимметричные системы.

Выделение изотопа гелия – гелиона важно для организации экологически чистой реакции термоядерного синтеза по переходу этого изотопа в стандартный  ${}^4\text{He}$ . Выделение изотопов водорода является чрезвычайно важной задачей для водородной энергетики.

Стандартные решения дифференциального уравнения Шредингера строятся на отрезке конечной длины. Для того, чтобы не получить вычислительного резонанса при конструировании таких решений, мы исходили из интегрального уравнения Шредингера, справедливого на всей действительной оси и не требующего граничных условий для волновой функции. Если искомая функция найдена из рассматриваемого уравнения, то плотность вероятности нахождения частицы в данной точке пространства будет определяться как квадрат модуля волновой функции, а коэффициенты прохождения и отражения как квадраты амплитуд падающих и отраженных волн.

Три другие работы этих же авторов посвящены математическому моделированию и расчетному исследованию динамики углеродных супермолекул, в частности, димеров фуллеренов, находящихся внутри одностенных углеродных нанотрубок, и молекулярных торов, составляющих столбчатую фазу. Углеродные наноматериалы в настоящее время вызывают большой интерес в связи с развернувшейся работой по миниатюризации электронных, фотонных и электрохимических устройств различного назначения. Кроме того, ассоциации молекулярных торов образуют жидкие кристаллы и очень важно изучить характер межмолекулярных взаимодействий в средах, имеющих сложную внутреннюю структуру.

**Методы.** Первое из аналитических решений волновой динамики Шредингера находится способом разложения волновой функции и всех функций, входящих в интегральное уравнение в ряды по функциям Эрмита. В этом случае для коэффициентов разложения  $\psi$  получаем систему алгебраических уравнений. Причем правые части этой системы, являющиеся преобразованием Фурье от функции Эрмита, находятся точно. Элементы квадратной матрицы рассматриваемой алгебраической системы представляют, как интегралы от функции барьерной энергии и произведений функций Эрмита различных индексов. Поскольку не нулевые значения барьерной энергии локализованы в окрестности моноатомных слоев, то интегралы в бесконечных пределах могут быть заменены на конечные интегралы и вычислены достаточно точно по известным квадратурным формулам.

Второе аналитическое решение интегрального уравнения Шредингера строится способом выделения операторной части исходного уравнения. Эта часть выделяется исходя из определения оператора сдвига. При этом возникает пока еще неизвестный дифференциальный оператор, который в качестве подынтегральных коэффициентов имеет

функцию барьерной энергии и неизвестную волновую функцию. Этот оператор удается выразить через операторы, имеющие в качестве подынтегральных коэффициентов лишь функцию барьерной энергии. Далее остается перейти от операторной формы к соотношениям, содержащим функции обычного вида. Это делается с помощью формулы, определяющей применение линейного дифференциального оператора к экспоненциальным функциям, а также с помощью тождества Фурье. Применяя описанный подход к решению уравнения Шредингера удалось доказать теорему о существовании счетного множества дистанций резонансного прохождения отдельных компонент через двоянный барьер.

В третьей задаче, относящейся к динамике звуковых волн рассмотрены решения фундаментального уравнения акустики, определяющего звуковое давление. Из этого уравнения способом выделения монохроматической волны получено дифференциальное уравнение Бесселя для амплитуды акустической волны. Общее решение последнего уравнения есть линейная комбинация функций Бесселя первого и второго родов нулевого индекса. Далее делается предположение о том, что амплитуда звуковой волны является комплексной величиной, поэтому общее решение для искомой амплитуды теперь уже будет линейной комбинацией функций Ганкеля первого и второго родов, которые по отношению друг к другу являются комплексно сопряженными функциями, составленными ранее найденными функциями Бесселя. В этом случае функции Ганкеля первого рода описывают волну давления движущуюся от центра к бесконечности, а функции Ганкеля второго рода, наоборот, описывают волну, движущуюся из бесконечности к оси трубки. Как и в случае квантово-механической задачи, здесь волны перемещаются по всему пространству. Однако они встречают препятствия на границах акустических зон, где мы “сшиваем” решение, используя условия гладкости и непрерывности акустического давления. Получившиеся условия “сшивки” волн существенным образом зависят от частоты рассматриваемой монохроматической волны. Из этих условий находятся все коэффициенты представления решения внутри отдельных акустических зон. При этом физические коэффициенты прохождения и полного отражения от рассматриваемой многослойной системы определяются как квадраты соответствующих комплексных коэффициентов. Далее мы вновь обращаемся к условиям “сшивки” и находим новое решение, отвечающее изменной частоте. Исследование можно считать законченным, когда выполнен перебор по всем частотам из заданного акустического диапазона.

В задачах молекулярной динамики используются подход Эйлера, кватернионы Гамильтона и высокоточные методы численного построения решения эволюционной задачи Коши, использующие идею пересчета на каждом отдельном шаге по времени. Кроме того методом суммирования потенциалов находятся интегральные тор-атомные и тор-

торовые взаимодействия. После чего находятся приближенные формулы для потенциалов парных взаимодействий частиц, позволяющие сделать реализуемыми ранее недоступные для численного анализа задачи молекулярной динамики.

**Результаты и обсуждения.** В результате решения волновых задач найдены коэффициенты спектрального пропускания и отражения звуковых волн, генерируемых внутри трубы турбулентностью или моторами для перекачки газа.

Доказана способность реальной многостенной конструкции газопровода эффективно отражать внутрь значительную часть звука и тем самым не наносить вред фауне морских акваторий. Для рассматриваемых геометрических размеров трубы и толщин изоляционных слоев найдены частотные интервалы, в которых преобладает тот или иной характер распространения звука.

Расчеты молекулярной динамики позволили провести анализ группового поведения молекулярных торов изначально находящихся в столбчатой фазе. Расчеты показали, что первоначально хаотические угловые колебания сплюснутых супермолекул, находящихся в столбчатой фазе, трансформируются в направленные вращения двух видов. Первый вид вращений реализуется вокруг оси, перпендикулярной плоскости нанотора и проходящей через его центр масс. Второй вид – это вращательное движение коллектива торов вокруг оси, проходящей через центр масс этого коллектива молекул. Причем эта ось как правило перпендикулярна мгновенной оси вращения отдельного тора. Если количество наноторов в группе нечетное, то центр масс группы совпадает с центром масс среднего тора. Выяснено, что эффекту переворота группы способствует разноскоростное и разнонаправленное движение отдельных торов. Переворот осуществляется на угол  $180^\circ$ , поэтому для кратности мы назвали его  $\pi$ -вращением. Полученные  $\pi$ -вращения имеют место в любом инерциальном движении тел при их изначальном вращении вокруг промежуточной оси инерции (эффект В. Джанибекова), причем этот эффект не был характерен для групп тел. Однако в случае разрушения ассоциаций сплюснутых молекул это вполне реализуемое явление.

**З а к л ю ч е н и е.** Построенные аналитические решения интегрального уравнения Шредингера Принципиально разрешают вопрос о резонансном разделении изотопов легких газов с помощью мембранных технологий, имеющих составные мембраны из моноатомных углеродных слоев.

Аналитическое решение задачи о выходе звука из многослойной осесимметричной акустической системы позволяет конструировать покрытия трубы, обладающие наряду с защитными свойствами самой конструкции эффективными звукоизолирующими свойствами. Кроме того новая интерпретация уравнения для амплитуды акустического

давления открывает широкие возможности для решения задач поглощения звука в многослойных акустических системах.

Математические модели динамики ассоциаций углеродных супермолекул уже сейчас позволяют предсказывать свойства новых материалов, имеющих нанопористую структуру. Наряду с этим исследования по развитию таких моделей являются определяющими в предсказании функций конструируемых микро и наносистем различного назначения.

Все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в работах [А.12–А.16, А19]. Результаты прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях:

1. Third International Conference on Materials Science and Manufacturing Technology, Коимбатур, Тамил Наду, Индия 15-16 апреля 2021 г. – А. М. Bubenchikov «Molecular rotation effects in fullerite» (секционный доклад), <http://icmsmt.com/>.

2. Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томский государственный университет, Томск, Россия, 6-11 декабря 2021 г. – А. М. Бубенчиков «Волновые процессы переноса через многослойные системы» (приглашенный доклад), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>.

### **1.3 Математические модели некоторых задач экологии и медицины**

1.3.1 Новая микромасштабная модель турбулентного течения для исследования процессов распространения выбросов автотранспорта и экстремальных погодных условий, учитывающую влияние зданий различной этажности и конфигурации, неоднородности подстилающей поверхности и естественной конвекции

Целью работы является построение новой микромасштабной модели турбулентного течения для исследования процессов распространения выбросов автотранспорта и экстремальных погодных условий, учитывающей влияние зданий различной этажности и конфигурации, неоднородности подстилающей поверхности и естественную конвекцию.

**Методы.** Математическая модель включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, уравнения Навье-Стокса, переноса примеси и теплообмена. Замыкание описанной системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска. Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая  $k-\varepsilon$  – модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавучести. При расчете течений вокруг зданий использовался метод фиктивных областей, суть которого заключается в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемах нет потоков диффузии

[50]. Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира [51]. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE [50].

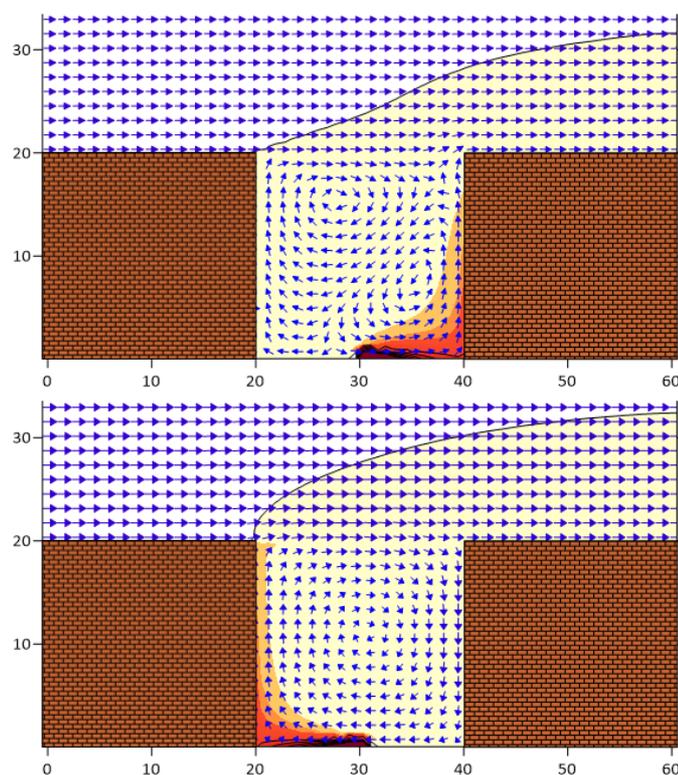
Результаты и обсуждения. Базовым элементом застройки современного города является уличный каньон, поэтому он выступает в качестве объекта экологических исследований посвященных изучению микроклимата современного города. Рассмотрен набор дискретные сценариев проветривания уличного каньона. Рассчитаны и проанализированы интегральные характеристики концентрации примеси в зоне дыхания (до 2 м от дна каньона). Геометрические характеристики уличного каньона, высота (H) и ширина (W) 20 метров, глубина (L) 30 метров. Источник поступления примеси постоянной интенсивности располагался в центре уличного каньона вблизи поверхности.

Анализ полученных результатов показывает, что во всех случаях, кроме нагрева наветренной стороны, максимальные концентрации примеси уменьшаются при увеличении градиента температур в уличном каньоне при неизменных остальных параметрах (таблица 1). Это связано с тем, что увеличение градиента температуры способствует увеличению скорости движения основного потока воздуха внутри уличного каньона и примесь интенсивнее выносится ветром.

Таблица 1 – Концентрации примеси в зоне дыхания в зависимости от степени нагрева образующих уличного каньона

Разница темпер.	Подветренная стена	Наветренная стена	Дно каньона	Подветренная стена и дно каньона	Наветренная стена и дно каньона
5	1,158	0,923	0,768	0,889	0,636
10	1,072	1,181	0,548	0,574	0,509
15	1,002	2,285	0,462	0,498	0,440
20	0,943	2,321	0,413	0,446	0,397

Нагрев наветренной стороны напротив, приводит к образованию восходящего потока теплого воздуха. Сформировавшийся поток нарушает циркуляцию в уличном каньоне и приводит к образованию сложного двухвихревого течения. На рисунке 3 (сверху) представлено векторное поле скорости, и поле концентрации примеси соответствующие рассматриваемому случаю.



Сверху – нагрета подветренная стена, снизу – нагрета наветренная стена  
 Рисунок 3 – Векторное поле скорости на фоне изолиний концентрации примеси при градиенте температур 20 °С

### 1.3.2 Результаты численного исследования эффекта «городской остров тепла» в Томске с использованием модели численного прогноза погоды Weather Research & Forecasting

Городской "остров тепла" – это увеличение температуры воздуха в городе по сравнению с окружающей его местностью. Это явление достаточно давно установлено [52]. Оно играет важную роль в циркуляции воздуха. Основной вклад в образование "острова тепла" в Томске вносят антропогенные выбросы и поглощение городской подстилающей поверхностью коротковолновой радиации [53].

Методы. Целью работы является применение модели Weather Research & Forecasting (WRF 4.2) [54] для исследования явления "острова тепла" для условий города Томск. Были проведены расчеты для девяти зимних (ноябрь-февраль) и семи летних дат (июнь-август) 2015 года, рекомендованных метеорологами. Наиболее яркие случаи явления "острова тепла" были зафиксированы в летний период – 18, 22 июля и 18 августа (рисунок 4) [55].

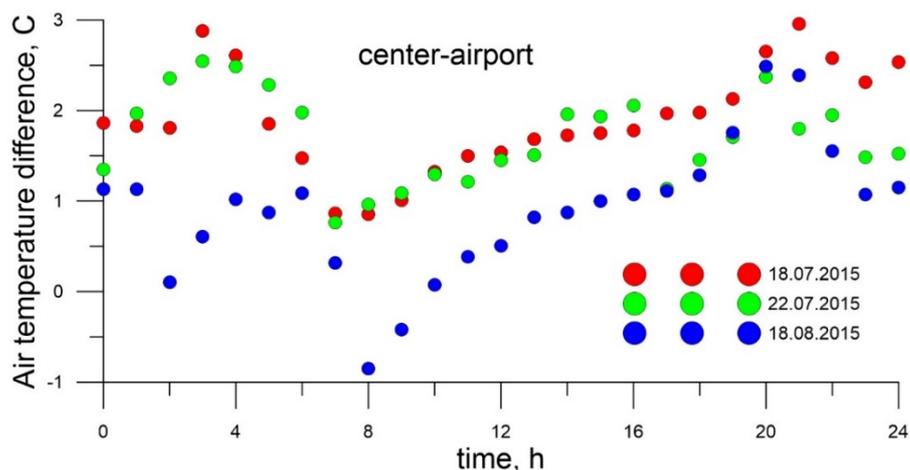


Рисунок 4 – Разность температур воздуха между центром г. Томска и аэропортом Богашево

Результаты и обсуждения. Для оценки эффективности расчетов по модели WRF использовались статистические показатели: Fractional Bias (FB), Normal Mean Square Error (NMSE), FAC2 index, Coefficient hit rate (q) и Correlation coefficient (R), с помощью которых сравнивались результаты численного прогноза и наблюдений, предоставленных Центром коллективного пользования «Атмосфера» ИОА СО РАН. Получено, что в даты летнего периода модель хорошо предсказывает явление "остров тепла", а зимой плохо. Это может быть связано с тем, что успех в мезомасштабном моделировании зависит от качества расчетов "ведущей" модели Global Forecast System, а также от точности отображения городских категорий землепользования.

### 1.3.3 Эффективный численный метод решения прямых задач электроимпедансной томографии на неструктурированных сетках в условиях плохой обусловленности линейных систем

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволяет реконструировать внутреннюю структуру объектов живой природы по сечениям на основе измерения напряжения электрического тока, проходящего через сетку электродов, с последующим считыванием напряжения на границе объекта. Цель исследования [56] – разработка вычислительных технологий решения двумерных уравнений эллиптического типа с граничными условиями Неймана и «полной электродной модели» на неструктурированных сетках.

Методы. Прямая задача электроимпедансной томографии в двумерном случае (нахождение электрического потенциала  $u(x,y)$  по известному распределению электропроводности  $\sigma(x,y) > 0$  внутри области) была поставлена следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma \in \text{air}.$$

На электродах:  $u + z_e \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_e} \left( \int_{E_e} u ds + z_e I_e \right)$ , где  $z_e$  – сопротивление электрода,  $E_e$  – поверхность электрода,  $I_e$  – плотность тока.

**Результаты и обсуждения.** Поставленная задача решалась численно методом конечного объема на неструктурированных треугольных сетках, построенных с помощью сеточного генератора Gambit. С помощью функции Size function проведено сгущение сетки вблизи границ, рассмотрено качество полученных сеток. Выполнена аппроксимация дифференциальной задачи на основе метода конечных объемов на барицентрических ячейках. Изучены вопросы однозначной разрешимости задачи, устойчивости и сходимости разностной схемы. На тестовой задаче показана сходимость решения разностной задачи к ее приближенному аналитическому решению [A.21]. В ходе тестирования на неструктурированных сетках был сделан вывод, что сетку лучше сгущать на электродах.

**1.3.4 Численный метод прогнозирования временных рядов по историческим данным с использованием искусственных нейронных сетей применительно к задачам локальной погоды**

Целью данной работы [A.20, 57] является реализация и применение моделей многослойного персептрона и рекуррентной нейронной сети для прогноза приземной температуры воздуха. По измеренным стационарной метеостанцией значениям давления, температуры и относительной влажности, скорости и направления ветра поставлена задача предсказать значения приземной температуры воздуха и реализовать сравнение результатов прогнозирования с результатами прогнозирования модели многослойного персептрона и численного прогноза с помощью мезомасштабной гидродинамической модели Weather Research & Forecasting [54]. Исходные данные для исследования были получены в Институте оптики атмосферы ЦКП «Атмосфера» за период времени с 01.01.2020 по 30.10.2020.

**Методы.** Разработана модель ИНС основана на одной из архитектур нейронных сетей, называемой моделью многослойной персептрона. Была выбрана трехуровневая структура (один входной слой, один скрытый слой и один выходной слой) с функцией

активации ReLU ( ) для скрытого слоя и линейной функцией активации для выходного слоя. Скрытый слой содержит 48 нейронов. Выходной слой содержит 24 нейрона. Сеть обучалась за фиксированное количество эпох (epochs = 500). В этой нейронной сети осуществляется оптимизация методом адаптивной инерции Adam (вариант стохастического градиентного спуска) [58]. Общее значение RMSE по тестовой выборке составила 3.1 °C.

**Результаты и обсуждения.** Также была разработана модель рекуррентной нейронной сети типа LSTM с дальнейшим ее применением для прогноза приземной температуры воздуха в городе Томске. По измеренным стационарной метеостанцией историческим значениям давления, температуры и относительной влажности, скорости и направления ветра предсказывались значения приземной температуры воздуха на 24 часа с использованием библиотеки Keras языка программирования Python. Общая средняя абсолютная ошибка для всего прогноза составила 2,5 °C. Сравнение различных размеров входных данных и тестовых выборок дало удовлетворительное и довольно близкое значение MAE.

Сравнительный анализ реальных данных с результатами, полученными при помощи LSTM-сети, говорит о том, что метод нейросетевого прогнозирования может конкурировать со стандартными методами прогнозирования метеорологических параметров.

**Заключение.** Построена новая микромасштабная модель неизотермического турбулентного движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне, с помощью которой были проведены вычислительные эксперименты, направленные на изучение влияния перепада температуры на структуру турбулентного течения и перенос вредных выбросов в уличных каньонах. Анализ полученных результатов показывает, что худшие условия для пешеходов образуются при нагреве наветренной стороны уличного каньона (максимальные концентрации в зоне дыхания увеличиваются с ростом перепада температур), в уличных каньонах, высота которого в несколько раз превышает его ширину, при смещении источника примеси к зданиям, образующим каньон.

С помощью известной модели численного прогноза погоды Weather Research & Forecasting проведено исследование явления «городской остров тепла». Сравнение расчетов с наблюдениями подтвердили предположение что различие температуры в городе и за городом может достигать более одного градуса.

Для численного решения прямой задачи электроимпедансной томографии для граничных условий «полной электродной модели» разработан эффективный метод решения разностных уравнений, построенных на неструктурированной сетке. Для

тестирования этого метода получено новое приближенное аналитическое решение для смешанной задачи граничной задачи для уравнения эллиптического типа.

Для краткосрочного прогноза температуры воздуха с использованием наблюдений метеорологических условий, получаемых метеостанцией, были разработаны два вида искусственных нейронных сетей: многослойный персептрон и рекуррентные нейронные LSTM-сеть. Результаты валидации сетей для условий наблюдения за температурой в аэропорту г. Томск показали возможность применения такого подхода наряду с численным прогнозом погоды.

Результаты прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях:

1. XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия, 27–30 апреля 2021 г. – Д. В. Лещинский «Влияние расположения источника загрязнения на концентрацию примеси в уличном каньоне» (секционный доклад), <http://conf-prfn.org/>.

2. Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 9–13 августа 2021 г. – Е. А. Данилкин «Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличном каньоне» (секционный доклад), <https://siriusmathcenter.ru/all-russian-conference>.

3. Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томский государственный университет, Томск, Россия, 6-11 декабря 2021 г. – А. В. Старченко «Математическое моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах» (приглашенный доклад), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>.

#### **1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп**

Введение. Как отмечал еще Фукс в своей знаменитой монографии [59], при работе с инволюциями возникают определенные сложности: «эти автоморфизмы не обеспечивают нас информацией в том же объеме, что и проекции; к тому же во избежание излишних трудностей... необходимо предположить, что умножение на 2 есть автоморфизм группы». И действительно, многие теоремы в работах Вильданова [3, 60, 61], посвященных определяемости вполне разложимых групп (без кручения) их группами автоморфизмов, доказаны в предположении, что вполне разложимая группа 2-делима. Здесь можно провести некоторые параллели с задачей об определяемости абелевой  $p$ -группы ее группой автоморфизмов: для  $p > 3$  она была решена Лептином в 1960 году [62], для  $p = 3$  – Либертом в 1980-х годах [63], а случай  $p = 2$ , как отмечается в последнем издании монографии Фукса [64], до сих пор остается открытой проблемой. Таким образом, для решения поставленных в рамках данного проекта задач нужны новые подходы, которые позволят избавиться от

требования 2-делимости при рассмотрении определяемости вполне разложимой группы ее группой автоморфизмов. Случай вполне разложимой группы ранга 2 (уже без требования 2-делимости) был полностью разобран ранее в [5]. Поскольку, согласно [4], строение линейных групп порядка  $n$  существенно различается при  $n = 2$  и при  $n \geq 3$ , то рассмотрение групп автоморфизмов вполне разложимых групп ранга 3 (без ограничений на 2-делимость) должно стать ключом к решению вопроса об определяемости вполне разложимых групп произвольного конечного ранга их группами автоморфизмов.

**Методы.** Для решения вопроса об определяемости вполне разложимой группы (без кручения)  $G$  ранга 3 ее группой автоморфизмов  $\text{Aut } G$  использовались предложенные Вильдановым подходы [3, 61], позволяющие диагонализировать инволюции группы  $\text{Aut } G$  при помощи подходящего внутреннего автоморфизма. Эти методы, в свою очередь, были усовершенствованы таким образом, чтобы они оказались применимы к ситуации, когда группа  $G$  не является 2-делимой. Кроме того, важным инструментом работы с  $\text{Aut } G$  стала подгруппа  $ML_n$  полной линейной группы  $GL_n$ , порожденная всеми инволюциями последней. Для представления автоморфизмов конечных примарных групп малых рангов матрицами и нахождения формул для обратных матриц, соответствующих обратным автоморфизмам, использовались методы работы с формальными матрицами, разработанные в монографии Крылова и Туганбаева [65]. Эти методы были доработаны таким образом, чтобы можно было применить их к случаю формальных матриц, элементы которых принадлежат разным кольцам.

**Результаты и обсуждения.** Нас интересует вопрос о том, при каких условиях вполне разложимая группа (без кручения) конечного ранга определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп.

**Определение 4.1.** Вполне разложимой группой ранга  $k$  называется всякая группа  $G$ , представляющая собой прямую сумму  $k$  групп ранга 1.

**Определение 4.2.** Пусть  $G \in X$ , где  $X$  – некоторый класс групп. Мы будем говорить, что  $G$  определяется своей группой автоморфизмов  $\text{Aut } G$  в классе  $X$ , если из  $\text{Aut } G \cong \text{Aut } H$ , где  $H \in X$ , всегда следует  $G \cong H$ .

**Определение 4.3.** Абелева группа  $G$  называется почти делимой, если  $pG = G$  почти для всех простых чисел  $p$ .

Для групп ранга 3 был получен следующий критерий определяемости группой автоморфизмов:

**Теорема 4.1.** Пусть  $G$  – вполне разложимая группа ранга 3. Следующие условия эквивалентны:

1)  $G$  определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 3;

2)  $G$  определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп;

3)  $G \cong A \oplus A \oplus B$ , где  $A$  – почти делимая группа ранга 1, вкладываемая в слагаемое  $B$ .

*З а м е ч а н и е .* В частности, в теореме 4.1 возможен случай  $B \cong A$ .

Пусть  $p$  – простое число. Всякую конечную  $p$ -группу  $H$  ранга 2 можно отождествить с группой вида  $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ , где  $m \geq n > 0$ . Эндоморфизмы этой группы  $H$  находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества матриц

$$R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Если договориться, что произведение  $\begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$

равно матрице  $\begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ , мы получим следующую

теорему:

**Т е о р е м а 4.2.** Множество формальных матриц  $R_2$  с поэлементным сложением и указанной выше операцией умножения образует кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов  $\text{End } H$  группы  $H$ .

Для произвольной матрицы  $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_2$  введем обозначение

$$|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

**П р е д л о ж е н и е 4.1.** Для любых  $A, B \in R_2$  выполнено  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .

Если  $m = n$ , то  $R_2$  – это обычное кольцо матриц над  $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$  и критерий обратимости матрицы  $A \in R_2$  хорошо известен. Таким образом, остается рассмотреть случай  $m > n$ .

**Т е о р е м а 4.3.** Пусть  $m > n > 0$ . Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_2$

равносильны следующие условия:

- 1) Числа  $a$  и  $d$  не делятся на  $p$ .
- 2) Элемент  $|A|$  обратим в кольце  $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ .
- 3) Матрица  $A$  обратима слева в кольце  $R_2$ .
- 4) Матрица  $A$  обратима справа в кольце  $R_2$ .

5) Матрица  $A$  обратима в кольце  $R_2$ .

Если эти условия выполнены, то матрица  $A^{-1}$  находится по формуле

$$\begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n}bcF) + p^m \mathbf{Z} & -bF + p^n \mathbf{Z} \\ -cF + p^n \mathbf{Z} & aF + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где  $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$  и  $W + p^m \mathbf{Z} = (a + p^m \mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}$ .

Всякую конечную  $p$ -группу  $H$  ранга 3 можно отождествить с группой вида  $(\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})$ , где  $m \geq n \geq k > 0$ . Эндоморфизмы этой группы  $H$  находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами следующего множества матриц:

$$R_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Как и в случае кольца  $R_2$ , мы можем снабдить  $R_3$  операцией умножения такой, что  $R_3$  превратится в кольцо, изоморфное кольцу  $\text{End } H$ .

Для произвольной матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_1 + p^m \mathbf{Z} & a_2 + p^n \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b_1 + p^n \mathbf{Z} & b_2 + p^n \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_2 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_3$  обозначим

через  $|A|$  элемент

$$a_1 b_2 c_3 - p^{n-k} a_1 b_3 c_2 - p^{m-n} a_2 b_1 c_3 + p^{m-k} (a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}.$$

**Предложение 4.2.** Для любых  $A, B \in R_3$  выполнено  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .

Если  $m = n = k$ , то критерий обратимости матрицы  $A \in R_3$  хорошо известен. Для каждого из случаев  $m = n > k$ ,  $m > n > k$  и  $m > n = k$  получены необходимые и достаточные условия обратимости матрицы  $A \in R_3$ , а также формулы для обратных матриц. В каждом из этих случаев следующие условия равносильны:

- 1) Элемент  $|A|$  обратим в кольце  $\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$ .
- 2) Матрица  $A$  обратима слева в кольце  $R_3$ .
- 3) Матрица  $A$  обратима справа в кольце  $R_3$ .
- 4) Матрица  $A$  обратима в кольце  $R_3$ .

**З а к л ю ч е н и е.** Таким образом, найдены все вполне разложимые группы ранга 3, определяющиеся своими группами автоморфизмов. Кроме того, для колец эндоморфизмов конечных примарных групп ранга 2 и 3 построены изоморфные им кольца формальных матриц. В каждом из этих матричных колец найдены необходимые и достаточные условия обратимости матриц, а также формулы для построения обратной матрицы. Тем самым получены все результаты, запланированные на 2021 год. Часть полученных результатов уже опубликована [А.9, А.11], другая часть готовится к публикации. Все результаты прошли

апробацию на семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета и на следующих конференциях:

1. Классическая и современная геометрия: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна, Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия, 1–4 ноября 2021 г. – А. Ю. Степанова и Е. А. Тимошенко «Матричное представление эндоморфизмов конечных примарных групп» (секционный доклад), <https://sites.google.com/view/conf-csg>.

2. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии – 2021, Казанский федеральный университет, Казань, Россия, 22–28 августа 2021 г. – Е. А. Тимошенко и М. Н. Зонов «Факторно делимые абелевы группы и  $E$ -кольца» (приглашенный доклад), <https://kpfu.ru/math/conference/aag21>.

3. Всероссийская молодежная научная конференция студентов «Все грани математики и механики», приуроченная к 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко, Томск, Россия, 27 мая – 1 июня 2021 г. – И. В. Третьяков и Е. А. Тимошенко «Инволюции в группе автоморфизмов вполне разложимой группы» (секционный доклад), А. Ю. Степанова и Е. А. Тимошенко «Матричное представление эндоморфизмов конечных  $p$ -групп» (секционный доклад), <http://conf.math.tsu.ru>.

4. Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске – 2021», Томский государственный университет, Томск, Россия, 6–11 декабря 2021 г. – Е. А. Тимошенко и М. Н. Зонов «Факторно делимые абелевы группы,  $E$ -кольца и связи между ними» (приглашенный доклад), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>.

### **1.5 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов**

Введение. Изучение геометрии узлов, особенно гиперболической, началось с работы Р. Райли в 1970-х [66] и получило дальнейшее развитие в конце 1970-х – начале 1980-х годов с работой У. Тёрстона [67] (см. также предысторию вопроса в [68]). Тёрстон показал, что дополнение любого простого узла в трехмерной сфере, за исключением торических и сателлитных, допускает введение полной гиперболической структуры [69]. При этом, среди всех простых узлов, классифицированных Хостом, Тислтуэйтом и Уиксом, диаграммы которых имеют до 16 перекрестков, только 13 – торические узлы, 20 – сателлитные, а оставшиеся 1 701 903 – гиперболические [70]. Согласно работам Мостова, Прасада и Коджимы [71]–[73], если дополнение узла допускает гиперболическую структуру, то она единственна. Мостов доказал соответствующее утверждение для

замкнутых гиперболических 3-многообразий, Прасад расширил его для орбифолдов конечного объема, а Коджима доказал теорему жесткости для конических многообразий с углами, не превосходящими  $\pi$ .

В данном проекте Н. В. Абросимовым (совместно с А. Д. Медных) изучены геометрические свойства гиперболического 3-многообразия  $m125$ , гомеоморфного дополнению к крендельному зацеплению  $(-2, 3, 8)$ , известному также как «Сестра зацепления Уайтхеда». Я. Агол показал [74], что зацепление Уайтхеда и его «Сестра» – два наименьших по объему гиперболических многообразия с двумя каспами. Нами установлены тригонометрические соотношения, связывающие длины сингулярных геодезических и конические углы для семейства конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ , полученных орбифолдными хирургиями Дена на многообразии  $m125$ . С помощью установленных соотношений и дифференциального уравнения типа Шлефли удалось получить явную интегральную формулу для гиперболического объема данного семейства конических многообразий.

Второе направление исследований в отчетном периоде было связано с изучением неевклидовых многогранников и их объемов. Объем компактной гиперболической антипризмы был ранее найден Н. В. Абросимовым и Б. Выонгом [75]. Идеальная антипризма в  $\mathbb{H}^3$ , все вершины которой лежат на бесконечности, изучена А. Ю. Весниным и А. Д. Медных [76] (также [77]). Частный случай идеальной прямоугольной антипризмы восходит к У. Тёрстону [67], который использовал ее в качестве фундаментального многогранника для построения бесконечной серии замкнутых гиперболических 3-многообразий. В данном проекте Н. В. Абросимовым и Б. Выонгом изучены антипризмы в трехмерном сферическом пространстве. Установлен критерий существования антипризмы с  $2n$  вершинами в  $S^3$  в терминах длин ребер. Найдены соотношения между двугранными углами и длинами ребер. Получена точная формула для вычисления объема сферических антипризм в терминах длин ребер.

**Методы.** При изучении геометрических свойств конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ , мы сначала строили линейное представление фундаментальной группы в группе матриц  $PSL(2, \mathbb{C})$ , следуя подходу Ф. Гонсалеса и Х. Монтезиноса [78]. Затем использовали технику следов матриц и свойства полиномов Фрике для установления тригонометрических соотношений между длинами сингулярных геодезических и коническими углами указанных конических многообразий. На финальном этапе, установленные соотношения использовались для нахождения точного решения дифференциального уравнения типа Шлефли, что дало явную интегральную формулу для гиперболического объема указанного семейства конических многообразий.

При изучении антипризм в  $S^3$  мы рассматривали сечение антипризмы сферой достаточно малого радиуса с центром в произвольной вершине. Такое сечение является равнобедренной сферической трапецией. Поэтому мы сначала установили теорему синусов-косинусов, связывающую длины сторон и углы в равнобедренной сферической трапеции, и затем использовали эту теорему для получения соотношений между длинами ребер и двугранными углами антипризмы в  $S^3$ . Последние соотношения позволили нам найти точное решение дифференциального уравнения Шлефли, что дало явную интегральную формулу для объемов сферических антипризм.

Результаты и обсуждения. Дополнение к крендельному зацеплению  $(-2, 3, 8)$  в 3-сфере можно построить склеиванием граней правильного идеального октаэдра. Из этого же октаэдра можно склеить (отождествляя другие грани) и дополнение к зацеплению Уайтхеда. Поэтому крендельное зацепление  $(-2, 3, 8)$  называют Сестрой зацепления Уайтхеда (рисунок 5). Другие названия соответствующего 3-многообразия –  $m125$  (в базе данных Snappea) или  $oost01_{0000}$ .

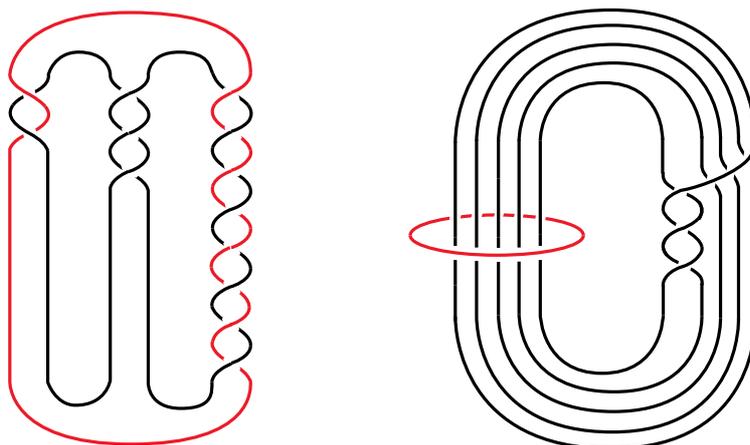


Рисунок 5 – Крендельное зацепление  $(-2, 3, 8)$  или Сестра зацепления Уайтхеда

$m125$  можно построить с помощью  $-3/2$ -хирургии Дена на любой одной из компонент так называемого Магического многообразия (рисунок 6).

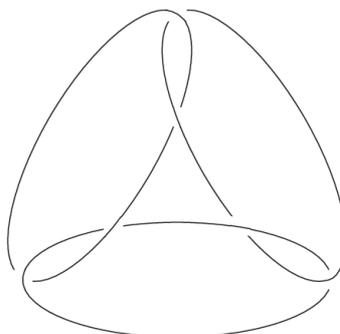


Рисунок 6 – Магическое многообразие

Я. Агол показал [74], что зацепление Уайтхеда и его Сестра имеют наименьший объем среди гиперболических многообразий с двумя каспами. Они имеют одинаковый объем, равный  $4 \times C = 3,66\dots$ , где  $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$  – константа Каталана.

Орбифолдной хирургией Дена называется операция вклеивания полнотория вдоль тороидальной компоненты границы многообразия с использованием гомеоморфизма границ, при котором меридиан соответствует меридиану. В результате орбифолдной хирургии Дена с параметрами  $m/0$  мы имеем сингулярность с коническим углом  $2\pi/m$  вдоль соответствующей компоненты.

В данном проекте мы изучаем семейство конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ , полученных орбифолдными хирургиями Дена вдоль сингулярных компонент многообразия  $m125$ . Здесь параметры  $m$  и  $n$  – положительные вещественные числа, не обязательно натуральные. Следующая теорема устанавливает соотношения между длинами сингулярных геодезических и коническими углами конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ .

**Теорема 5.1.** Пусть  $m125(m/0, n/0)$  – гиперболическое коническое многообразие, полученное орбифолдными хирургиями Дена на многообразии  $m125$ . Обозначим  $\gamma_\alpha$  и  $\gamma_\beta$  комплексные длины его параллелей, соответствующие коническим углам  $\alpha = \frac{2\pi}{m}$  и  $\beta = \frac{2\pi}{n}$ .

Тогда

$$\frac{\sinh \frac{\gamma_\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sinh \frac{\gamma_\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = iv, \text{ где } v \text{ – корень уравнения}$$

$$-1 + 3v^2 - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} v^3 + (4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 3)v^4 - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} v^5 + v^6 = 0.$$

Используя последние соотношения и дифференциальное уравнение типа Шлефли, мы получили формулу для гиперболического объема соответствующих конических многообразий. Основным результатом состоит следующем.

**Теорема 5.2.** Пусть  $M = m125(m/0, n/0)$  – гиперболическое коническое многообразие, полученное орбифолдными хирургиями Дена на многообразии  $m125$ . Положим  $\alpha = \frac{2\pi}{m}$  и  $\beta = \frac{2\pi}{n}$ . Тогда гиперболический объем  $M$  задается формулой

$$Vol(M) = i \int_{\frac{z}{2}}^z \log \left( \frac{(A^2 + \zeta^2)(B^2 + \zeta^2)(1 - \zeta^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + \zeta^2)} \right) \frac{d\zeta}{\zeta^2 - 1},$$

где  $A = \cot \frac{\alpha + \beta}{4}$ ,  $B = \cot \frac{\alpha - \beta}{4}$ , а  $Z$  и  $\bar{Z}$  – комплексно сопряженные корни

подынтегрального выражения  $\frac{(A^2 + \zeta^2)(B^2 + \zeta^2)(1 - \zeta^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + \zeta^2)} = 1$ .

Второе направление исследований в отчетном периоде было связано с изучением антипризм в сферическом пространстве  $S^3$ .

Антипризма  $A_n$  – это выпуклый многогранник, у которого верхняя и нижняя грани являются правильными  $n$ -угольниками, а боковую поверхность составляют  $2n$  треугольных граней (рисунок 7).

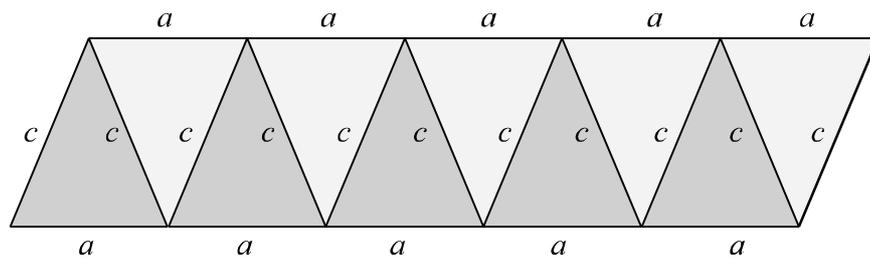


Рисунок 7 – Боковая поверхность антипризмы  $A_5$

Антипризма  $A_n$  с  $2n$  вершинами допускает группу симметрий  $S_{2n}$ , порожденную зеркально-поворотной симметрией порядка  $2n$ , которая обозначается  $C_{2nh}$  в классификации Шёнфлиса. Элемент  $C_{2nh}$  – это композиция поворота на угол  $\pi/n$  вокруг оси, проходящей через центры верхней и нижней грани, и отражения относительно плоскости, ортогональной этой оси и проходящей через середины боковых ребер (рисунок 8).

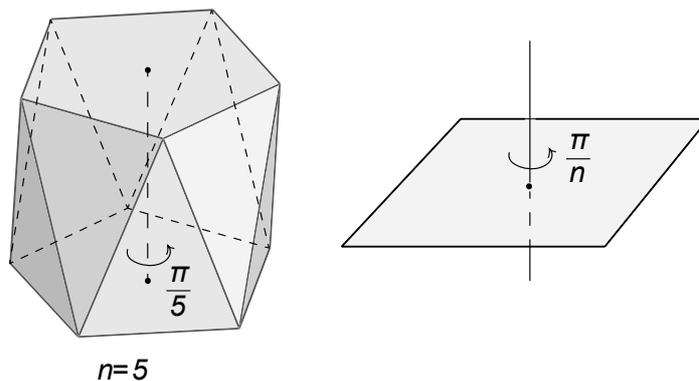


Рисунок 8 – Симметрия антипризмы

Приведенные выше определения антипризмы  $A_n$  и ее группы симметрий  $S_{2n}$  имеют место как в евклидовом, так и в гиперболическом и сферическом пространствах. По определению,  $A_n$  имеет два типа ребер. Обозначим за  $a$  длину ребер, образующих верхнюю и нижнюю  $n$ -угольные грани. Положим  $c$  – длину боковых ребер. Пусть двугранные углы

вдоль соответствующих ребер равны  $A, C$ . Далее будем писать  $A_n(a, c)$  для антипризмы  $A_n$ , заданной длинами своих ребер  $a, c$ .

Следующая теорема дает критерий существования антипризмы  $A_n(a, c)$  в трехмерном сферическом пространстве.

**Теорема 5.3.** Сферическая антипризма  $A_n(a, c)$ , заданная длинами своих ребер  $a, c$ , существует тогда и только тогда, когда выполняются все следующие неравенства

$$1 + \cos a - 2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n} \right) \cos c + 2 \cos \frac{\pi}{n} \geq 0,$$

$$1 + \cos a + 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \cos c - 2 \cos \frac{\pi}{n} \geq 0,$$

$$\cos a - \cos \frac{2\pi}{n} \geq 0.$$

Область существования сферической антипризмы  $A_n(a, c)$  в координатах  $(\cos a, \cos c)$  изображена на рисунке 9.

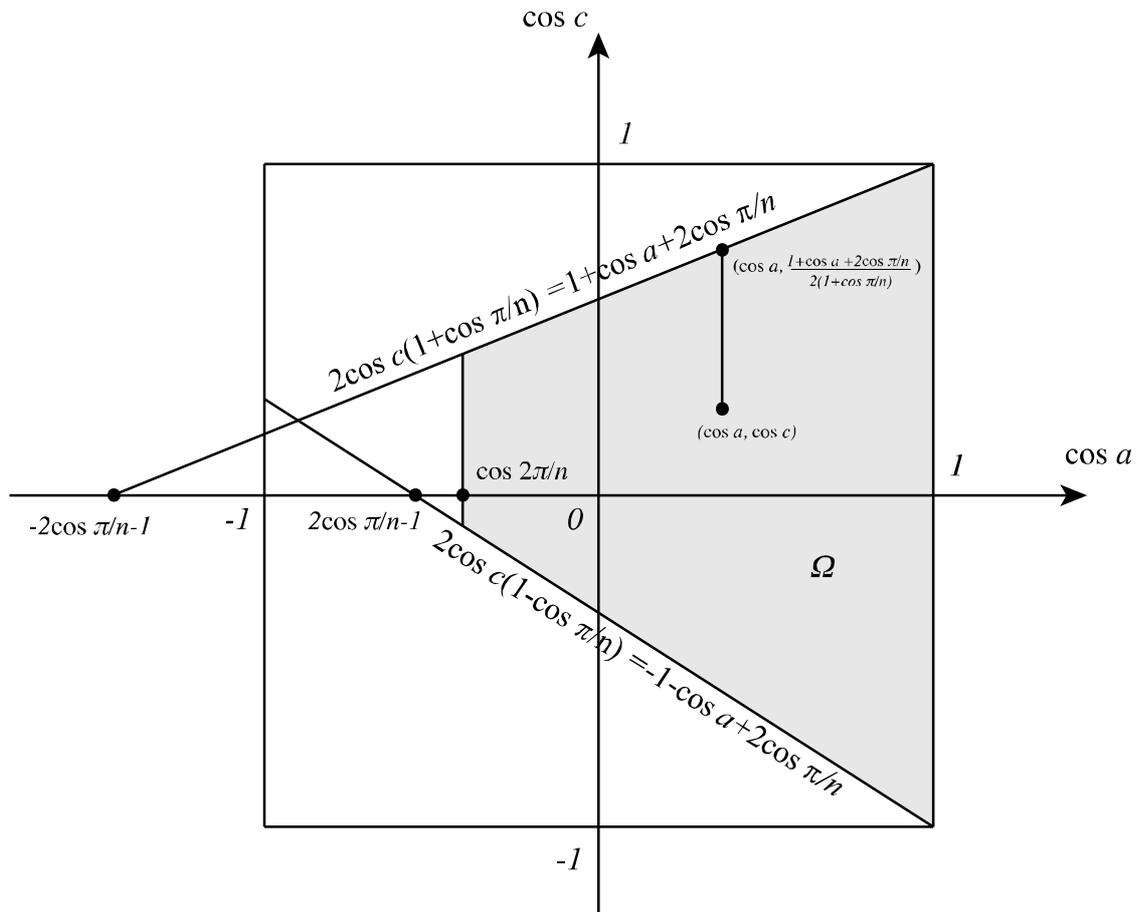


Рисунок 9 – Область существования антипризмы  $A_n(a, c)$  в  $S^3$

Следующее утверждение устанавливает соотношения между двугранными углами и длинами ребер сферических антипризм.

Теорема 5.4. Пусть  $A_n(a, c)$  – сферическая антипризма, заданная длинами своих ребер  $a, c$ . Тогда двугранные углы  $A$  и  $C$  антипризмы  $A_n(a, c)$  выражаются следующими формулами

$$\cos A = \frac{\sqrt{1 - \cos a} \left( 2 \cos c \cos \frac{\pi}{n} - \cos a - 1 \right)}{\sqrt{2(1 + \cos a - 2 \cos^2 c) \left( \cos a - \cos \frac{2\pi}{n} \right)}},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos c + 2(\cos^2 c - 1) \cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos a - 2 \cos^2 c}.$$

Основной результат работы состоит в получении точных формул для объемов сферических антипризм.

Теорема 5.5. Пусть  $A_n(a, c)$  – сферическая антипризма, заданная длинами своих ребер  $a, c$ . Тогда объем  $V = \text{vol } A_n(a, c)$  определяется следующей формулой  $aG + cH$

$$V = n \int_{c_0}^c \frac{aG + cH}{(1 + \cos a - 2 \cos^2 c) \sqrt{R}} dt, \text{ где}$$

$$G = -2 \left( \cos t - \cos \frac{\pi}{n} \right) \sin a \sin t,$$

$$H = (1 - \cos a) \left( 1 + \cos a + 2 \cos^2 t - 4 \cos t \cos \frac{\pi}{n} \right),$$

$$R = (1 + \cos a)^2 - 4 \left( \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 \frac{\pi}{n} - (1 - \cos a) \cos c \cos \frac{\pi}{n} \right),$$

и  $c_0$  – корень уравнения  $2 \cos c \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n} \right) = 1 + \cos a + 2 \cos \frac{\pi}{n}$ .

**З а к л ю ч е н и е.** Изучены геометрические свойства гиперболического 3-многообразия  $m125$ , известного также как «Сестра зацепления Уайтхеда». Установлены тригонометрические соотношения, связывающие длины сингулярных геодезических и конические углы для семейства конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ , и получена явная интегральная формула для гиперболического объема указанных конических многообразий. Кроме того, изучены сферические антипризмы: установлены критерии существования антипризм в  $S^3$ , найдены соотношения между длинами ребер и двугранными углами, получена явная формула для их объема. Таким образом, все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Участник проекта Вьонг Хью Бао в 2021 году представил свою кандидатскую диссертацию на тему «Аналитические методы в теории многогранников и орбифолдов, моделируемых в трехмерных пространствах постоянной

кривизны» (научные руководители Н. В. Абросимов и А. Д. Медных). Полученные в отчетном году результаты опубликованы в статье [А.1]. Результаты, полученные авторами на предыдущем этапе проекта, в 2021 году опубликованы в статье [А.2]. Все результаты прошли апробацию на международных конференциях и исследовательских семинарах:

1. IV Международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», Томский государственный университет, Томск, Россия, 5-8 июля 2021 г. – Н. В. Абросимов «Geometrical properties and volume of hyperbolic cone manifold  $m125(m/0, n/0)$ » (приглашенный доклад), Выонг Хыу Бао «Antiprisms in three-dimensional spaces of constant curvature» (приглашенный доклад), <http://gqlt.rmc.math.tsu.ru>.

2. Second Russia-Korea Conference on Knot Theory and Related Topics онлайн конференция, 29 ноября – 3 декабря 2021 г. – Н. В. Абросимов «The volume of a spherical antiprism with  $S_{2n}$  symmetry» (приглашенный доклад), Выонг Хыу Бао «On hyperelliptic Euclidean 3-manifolds» (приглашенный доклад), <https://www.korusknot.com>.

3. VIII Russian-Chinese Conference on Knot Theory and Related Topics, онлайн конференция, 24-26 декабря 2021 г. – Выонг Хыу Бао «Hyperellipticity of closed orientable Euclidean 3-manifolds» (приглашенный доклад), <http://labtd.nsu.ru/8RCCCKT/>.

4. Конференция международных математических центров мирового уровня, Центр Сириус, Сочи, Россия, 9-13 августа 2021 г. – Н. В. Абросимов «Об объемах некоторых узлов и зацеплений» (секционный доклад), Выонг Хыу Бао «Антипризмы в трехмерных пространствах постоянной кривизны» (секционный доклад), <https://siriusmathcenter.ru/all-russian-conference>.

5. Международная конференция «Geometry in the Large», посвященная 90-летию со дня рождения В.А. Топоногова, Международный институт им. Л. Эйлера, С.-Петербург, Россия, 16-20 августа 2021 г. – Н. В. Абросимов «Explicit volume formula for a hyperbolic tetrahedron in terms of edge lengths» (приглашенный доклад), Выонг Хыу Бао «Volume of some polyhedra in three-dimensional spaces of constant curvature» (приглашенный доклад), <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2021/GL>.

6. Исследовательский семинар «Узлы и теория представлений», Московский государственный университет, Москва, Россия, 27 декабря 2021 г. – Н. В. Абросимов «Volume formula for a hyperbolic tetrahedron and some applications» (приглашенный доклад), 13 декабря 2021 г. – Выонг Хыу Бао «Analytical method for study of polyhedra and orbifolds in three dimensional spaces of constant curvature» (приглашенный доклад), [http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option\\_lang=rus&eventID=12&confid=209](http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=12&confid=209).

7. Семинар по геометрическому анализу, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 2 ноября 2021 г. – Выонг Хыу Бао «Аналитические методы

в теории многогранников и орбифолдов в трехмерных пространствах постоянной кривизны (кандидатская диссертация)» (приглашенный доклад),

<http://math.nsc.ru/seminar/geom/2021.html>.

8. Научный семинар «Математический коллоквиум», Томский государственный университет, Томск, Россия, 22 апреля 2021 г. – Н. В. Абросимов «Геометрические свойства конических многообразий  $m125(m/0, n/0)$ » (приглашенный доклад), Выонг Хыу Бао «Аналитические методы в теории многогранников и орбифолдов в трехмерных пространствах постоянной кривизны» (приглашенный доклад),

<http://rnc.math.tsu.ru/pyatdesyat-shestoe-zasedanie-nauchnogo-seminara-matematicheskij-kollokvium/>.

9. Исследовательский семинар «Геометрическая теория функций», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 9 ноября 2021 г. – Н. В. Абросимов и Выонг Хыу Бао «Объем сферической антипризмы с симметрией  $S_{2n}$ » (приглашенный доклад), 20 апреля 2021 г. – Выонг Хыу Бао «Аналитические методы в теории многогранников и орбифолдов в трехмерных пространствах постоянной кривизны».

### **1.6 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных углеводородных топлив с применением оптических методов и математического моделирования**

**В в е д е н и е.** Диффузионный режим горения различных видов горючих материалов является наиболее распространенным, в связи с простотой реализации и использования на практике. Процессами, в которых этот режим горения наиболее распространен, являются техногенные и природные пожары. Сложность их изучения заключается в хаотическом характере процесса горения, который выражается в непредсказуемом поведении. Как правило, в топочных устройствах процесс горения реализуется в условиях турбулентности [25]. За счет того, что газообразные продукты горения перемещаются по потоку с различными скоростями, то на участке пламени, расположенным за ламинарной зоной, его фронт приобретает непредсказуемую форму. Существуют перспективные методы, которые позволяют управлять физико-химическими процессами в факеле пламени, за счет внешнего воздействия на его отдельные участки. Видами такого воздействия могут служить пульсации давления в виде звуковых колебаний, а также электромагнитное поле.

Исследованием влияния электромагнитного поля на пламя занимались еще в 60-х годах такие ученые, как Гаранин А.Ф., Третьяков П.К., Тупикин А.В., Исаев Н.А., Столяренко Г.С., Вязовик В.Н., Водяник О.В., Марцинишин Ю.Д. и др. В работе [79] представлена таблица данных, в которой отражены эффекты, проявляющиеся при

воздействии на пламя ионного ветра, электрического поля, а также рассмотрен переход энергии электромагнитного поля в тепловую.

В работе [26] приведен обзор литературы посвященных изучению влияния акустических волн на процесс горения газообразного топлива. Авторы делают вывод о том, что применение акустических волн является возможным способом управления режимом горения [80–82]. Кроме того, они выделяют тот факт, что при таком воздействии увеличивается эффективность сгорания топлива и уменьшается количество вредных газообразных продуктов горения [27–30]. Ими отмечена перспективность подобных исследований для тушения возгораний [30]. Однако из-за недостаточной теоретико-экспериментальной базы, точно описать механизм тушения не представляется возможным.

В данной работе проведено исследование процесса горения метано-воздушной смеси при наличии внешних возмущений, а также получены оценки геометрических размеров температурных неоднородностей по ряду термограмм, полученных при регистрации процесса горения некоторых жидких углеводородных топлив.

Методы. При двумерном моделировании процесса нестационарного горения метано-воздушной смеси был использован пакет программ Ansys, для построения геометрии расчетной области и задания сетки, и решатель – Fluent. При моделировании нестационарного горения в Ansys Fluent решалась полная система уравнений Навье-Стокса (уравнение неразрывности и уравнение движения), уравнение энергии, уравнение состояния газа, уравнения для скалярных величин, описывающих концентрацию химических веществ, участвующих в реакции горения [83]. Описанная система уравнений решалась методом конечных объемов. Размеры расчетной области составляли 800x420 мм. Количество ячеек расчетной сетки составляло 335600 шт., а ее шаг был равен 1 мм. Геометрия расчетной области изображена на рисунке 10.

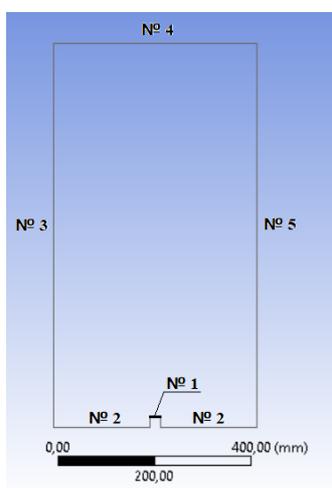


Рисунок 10 – Расчетная область

Используемые настройки для проведения математического моделирования были следующими: модель, описывающая турбулентное течение – стандартная k-ε модель со стандартными пристеночными функциями; модель горения – одностадийная необратимая реакция горения стехиометрической метано-воздушной смеси; модель скорости химической реакции – модель вихревой диссипации (EDM). Граничные условия на стенках № 3, № 4, № 5 задавались типом «pressure-outlet» со стандартными настройками и заданием на стенке притока окислителя O<sub>2</sub>. Для реализации условия пульсации давления, на стенке № 3 задавалось изменение давление в виде функции, имеющей вид  $P_0 \sin(\omega t)$  ( $P_0 = 0,05$  атм). Граничные условия на стенке № 2 имели тип непроницаемой стенки – «wall» с постоянной температурой 300 К. Граничные условия на стенке № 1 имели тип «velocity inlet», с заданием постоянной скорости истечения горючего газа CH<sub>4</sub>, равным 5 м/с и температурой 750 К.

В результате двумерного математического моделирования процесса горения метано-воздушной смеси были получены вертикальные профили температуры факела пламени при различных режимах внешних воздействий. Применяя к этим данным алгоритм быстрого преобразования Фурье, были получены соответствующие спектры пульсации температуры в факеле пламени.

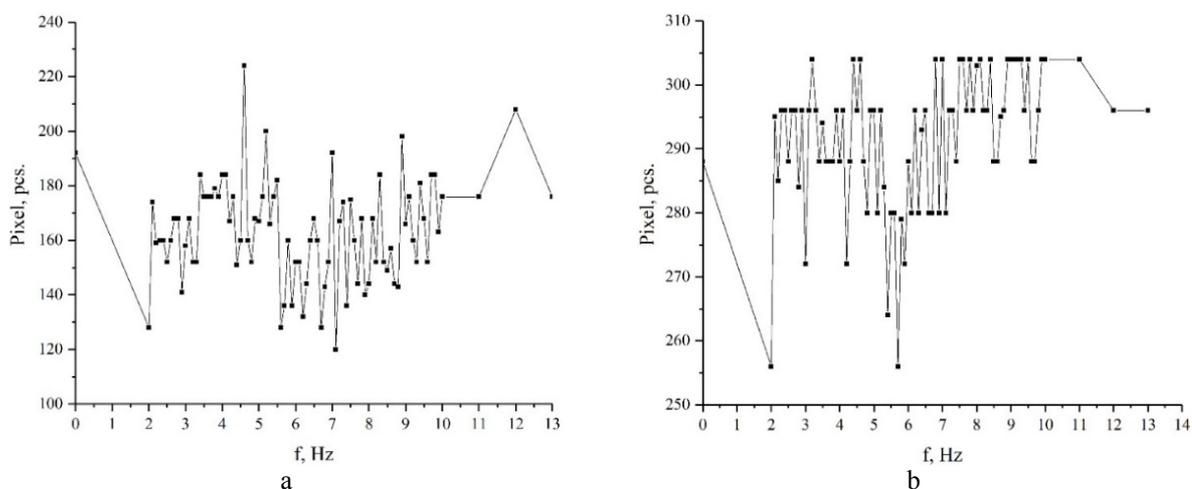
Для анализа размеров температурных неоднородностей, полученных на предыдущем этапе проекта, была произведена обработка экспериментальных данных, описанных в работе [84]. Для анализа размеров областей, в которых сосредоточены температурные неоднородности, была разработана отдельная программа в среде MatLab. Она считывала скомпилированный на предыдущем этапе файл изображения, преобразовывая его в 8 битную матрицу чисел, и находила количество ненулевых элементов как в строках, так и в столбцах.

Результаты и обсуждения. По аналогии с результатами, представленными в работе [84], в случае диффузионного горения метана на спектрах пульсации температуры также присутствуют максимумы амплитуды, соответствующие частоте внешних пульсаций давления. В случае отсутствия внешних возмущений, при заданном диаметре выходного сечения и начальной скорости, характерная частота пульсации температуры составила 6 Гц (при наличии небольших амплитудных пиков с частотой 9 Гц и 22 Гц). Следует заметить, что частота пульсации температуры, равная 22 Гц, является близкой к 3-й гармонике основной частоты.

При математическом моделировании горения различных газообразных топлив важную роль играют начальные параметры течения и геометрия сопловой части. Поэтому

для исследователя вопрос обобщения полученных зависимостей на другие исходные данные представляет собой отдельную задачу.

В результате работы алгоритма с последовательностью изображений были получены данные о распределении неоднородностей (ненулевых элементов матрицы) в проекции на вертикальную и горизонтальную ось. Для более детального изучения полученных распределений была произведена оценка толщины ( $l$ ) и высоты ( $h$ ) зоны температурных неоднородностей для рассматриваемых в работе [84] режимов внешних воздействий. Результаты оценки толщины и высоты зоны температурных неоднородностей в случае горения бензина представлены на рисунке 11.



a - горизонтальное направление, b - вертикальное направление

Рисунок 11 – Оценка геометрических размеров зоны факела бензина, где на усредненной термограмме присутствуют температурные неоднородности

На основании оценок, полученных на рисунке 11, можно сделать вывод, что наличие пульсаций приводит к изменению высоты и толщины области, в которой сосредоточены температурные неоднородности. Так, для бензина (рисунок 11 а) можно выделить режим 4,5 Гц, при котором наблюдается максимальная ширина зоны температурных неоднородностей. Анализируя рисунок 11 б, можно выделить характерные частоты 2 Гц и 5,6 Гц, при которых наблюдается резкое уменьшение высоты области температурных неоднородностей (при средней ширине 290 пикселей падение достигает 40 пикселей). Для керосина, при наличии внешних пульсаций эта область расширяется по горизонтали с увеличением частоты пульсаций давления, а при частоте воздействия 5,8 Гц ширина зоны имеет максимальное значение, однако высота зоны температурных неоднородностей при этом уменьшается.

**З а к л ю ч е н и е .** В результате математического моделирования процесса горения метано-воздушной смеси в двумерной постановке, были определены режимы внешних

воздействий на факел пламени, при которых наблюдается рост амплитуды пульсации температуры. Как и ожидалось ранее, наличие внешних воздействий в виде пульсаций давления, приводит к изменению спектра пульсации температуры, что выражается в присутствии на них соответствующих амплитудных максимумов.

На основании данных, полученных на предыдущем этапе исследования, была произведена количественная оценка изменения высоты и толщины зоны температурных неоднородностей.

На основании выводов работы можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты планируются к публикации в статье [85].

### 1.7 Группа сингулярных крашенных четырехнитиевых кос

**Введение.** В последние годы ученые с огромным интересом и удивительной интенсивностью стали заниматься теорией узлов. Под математически узлом будем понимать веревку в трехмерном пространстве, запутанную сколь угодно сильно, концы которой соединены. Если вместо одной веревки взять несколько веревок, то полученная конфигурация будет называться зацеплением. Косы и узлы тесно связаны между собой. Рассмотрим пример как по некоторой косе можно построить узел или зацепление. Для того, чтобы это сделать, нужно соединить (замкнуть) первую верхнюю точку косы, с первой нижней, вторую верхнюю точку косы – со второй нижней и т. д. (рисунок 12). Эта процедура построения называется замыканием косы. Известно, что для любого зацепления существует такая коса, что это зацепление эквивалентно замыканию данной косы. Этот факт носит название теоремы Александера в честь знаменитого американского тополога первой половины двадцатого века Дж. Александера. Поэтому изучение узлов в некотором смысле эквивалентно изучению кос.

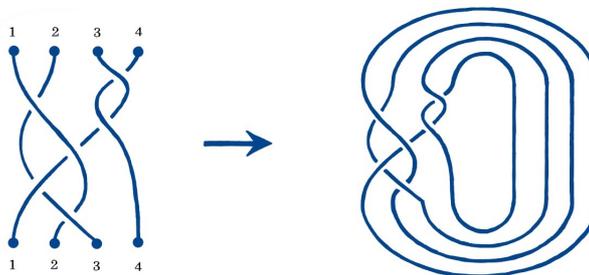


Рисунок 12 –Замыкание косы на 4 нитях

Косой на  $n$  нитях называется набор из  $n$  нитей, запутанных между собой, которые соединяют  $n$  точек на одной прямой с  $n$  точками на параллельной прямой. На рисунке 13 приведен пример косы на 4 нитях.



Рисунок 13 – Коса на четырех нитях

Косы на  $n$  нитях можно умножать между собой. Произведение  $\alpha$ ,  $\beta$  косы  $\alpha$  на  $n$  нитях с косой  $\beta$  на  $n$  нитях – это коса, полученная из косы  $\alpha$  подрисовыванием к ней снизу косы  $\beta$ . Пример произведения двух кос на 4 нитях изображен на рисунке 14.

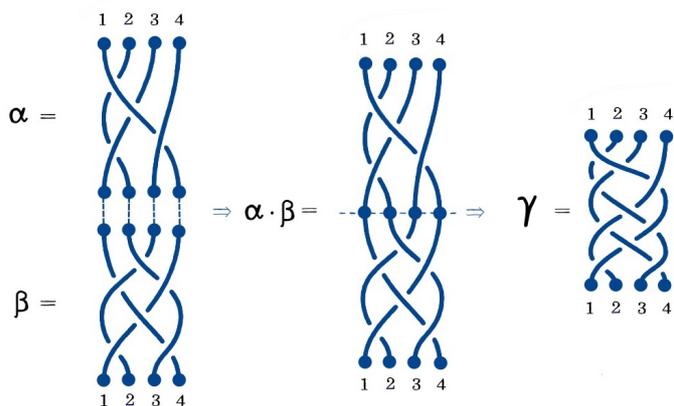


Рисунок 14 – Умножение кос

Множество кос на  $n$  нитях с определенной таким образом операцией умножения образует группу, которая обозначается символом  $B_n$  и называется группой кос на  $n$  нитях.

Для того, чтобы построить обратную косу нужно зеркально отразить косу относительно горизонтальной плоскости. В качестве единичной косы можно взять косу, состоящую из вертикальных параллельных нитей (рисунок 15).

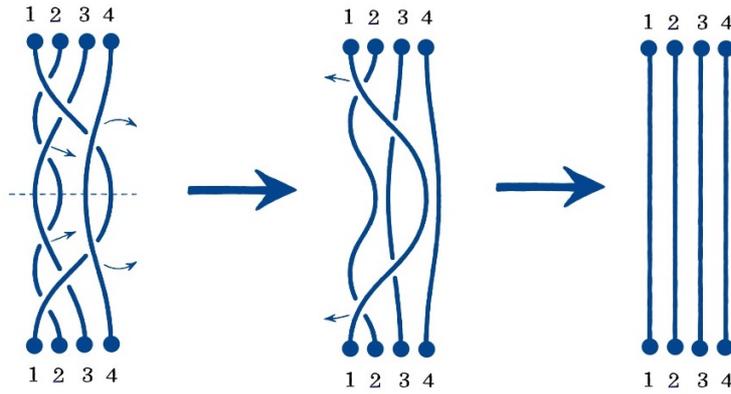


Рисунок 15 – Коса и обратная к ней (слева), единичная коса (справа)

Опишем набор образующих. Введем  $n$ -нитевые элементарные косы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  и обратные к ним  $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$  (рисунок 16). Обозначим через  $\sigma_i$  косу из  $n$  нитей,  $i$ -ая нить которой проходит «под»  $i+1$ -ой, а остальные нити вертикальны.

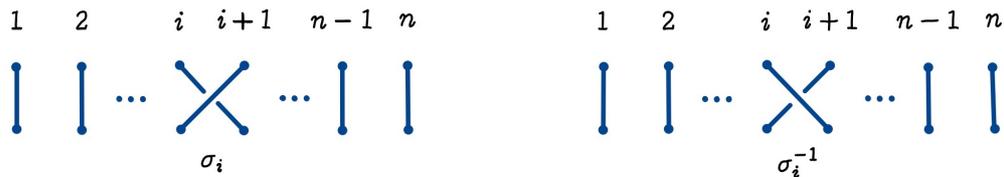


Рисунок 16 –  $n$ -нитевые элементарные косы

Алгебраическая теория кос была разработана Артином в двадцатых годах прошлого века [86]. Группа кос  $B_n$ ,  $n \geq 2$  на  $n$  нитях задается порождающими элементами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (3)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (4)$$

Соотношение (3) в группе кос называется дальней коммутативностью (рисунок 17). Можно получить из косы  $\sigma_i \sigma_j$  косу  $\sigma_j \sigma_i$  «сдвинув» точку пересечения  $i$ -ой и  $i+1$ -ой нитей вниз, а  $j$ -ой и  $j+1$ -ой вверх.



Рисунок 17 – Первое соотношение в группе кос

Если на некоторой косе рядом находятся три точки попарных пересечений трех различных нитей косы, при этом одна нить косы проходит выше (или ниже) двух других, тогда эту нить можно «протянуть» над (под) двумя остальными, (рисунок 18). Полученная таким образом коса будет изотопная изначальной, хотя запись косы в терминах порождающих группы изменится. Изменение будет записываться в виде соотношения (4).

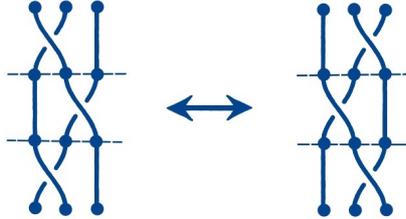


Рисунок 18 – Второе соотношение в группе кос

Классическая группа кос так же, как и симметрическая группа, является группой автоморфизмов свободной группы [87].

Если каждую нить покрасить в свой цвет таким образом, чтобы точки сверху и снизу соединялись одной и той же нитью одного цвета, то такие косы называются крашеными (рисунок 19). Удобно считать, что каждая нить этой косы имеет свой особый цвет, и при умножении таких кос склеиваются нити одного цвета. Группа крашенных кос является подгруппой группы классических кос.



Рисунок 19 – Крашенная коса на 4 нитях

Группой крашенных кос  $P_n$  называется ядро гомоморфизма группы  $B_n$  на группу подстановок  $S_n$ , отображающего порождающий  $\sigma_i$  в транспозицию  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Группа  $P_n$  порождается элементами  $a_{ij}$ , которые выражаются через порождающие группы кос  $B_n$  следующим образом:

$$a_{i,j} = \sigma_{i-1}^2,$$

$$a_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Известно, что группа  $P_n$  разлагается в полупрямое произведение свободных групп  $U_i$ :  $P_n = U_n \rtimes (U_{n-1}(\dots \rtimes (U_3 \rtimes U_2))\dots)$  (рисунок 20).

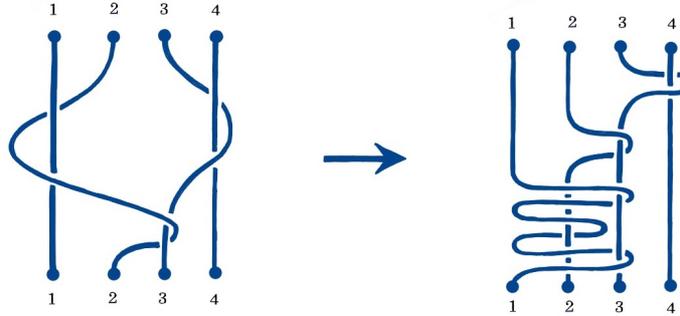


Рисунок 20 – Разложение группы  $P_n$

Понятие сингулярных кос было независимо введено Дж. Баэсом [88] и Дж. Бирман [89]. Моноид Баеса–Бирман или, как его ещё называют, сингулярный моноид  $SB_n$  определяется как моноид с порождающими  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$  и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \\ \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2, \\ \tau_i \sigma_j &= \sigma_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ \sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} &= \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

При этом элементы  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$  порождают группу кос.

Р. Фенн Э. Кейман и К. Рурк доказали [90], что моноид Баеса-Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой сингулярных кос:  $SB_n \rightarrow SG_n$ . С каждым порождающим  $\sigma_i$  можно связать  $n$ -нитевую косу, а с  $\tau_i$ - сингулярную  $n$ -нитевую косу в соответствии с рисунком 21.

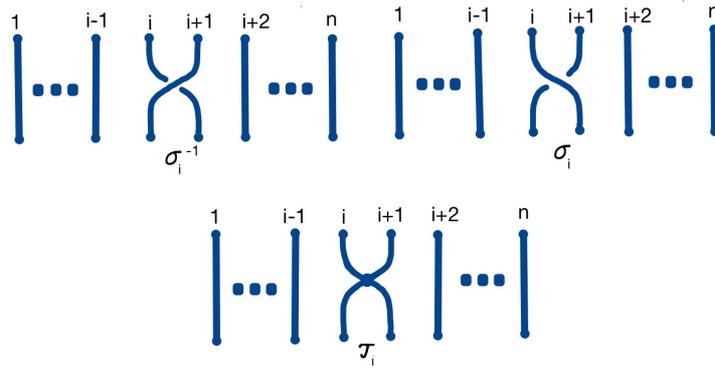


Рисунок 21 – Порождающие  $\sigma_i$  и  $\tau_i$

Определим отображение  $\pi: SG_n \rightarrow S_n$  заданное на порождающих равенствами:  $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i, i+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Ядро этого отображения  $\ker(\pi)$  будем называть группой сингулярных крашенных кос и обозначать  $SP_n$ .

Известно, что единственная перестановка, которая коммутирует со всеми перестановками, – тривиальная. Поскольку отображение кос в перестановки является гомоморфизмом, любая коса, лежащая в центре кос, должна быть крашеной косой. Рассмотрим крашеную косу на  $n$  нитей, заданную образующими по формуле  $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$ . Эта коса представляет собой «полный поворот всех нитей на  $2\pi$ ». Эта коса коммутирует со всеми косами и следовательно, лежит в центре группы кос. Достаточно проверить, что она коммутирует с образующими группы кос, что продемонстрировано на рисунке 22.

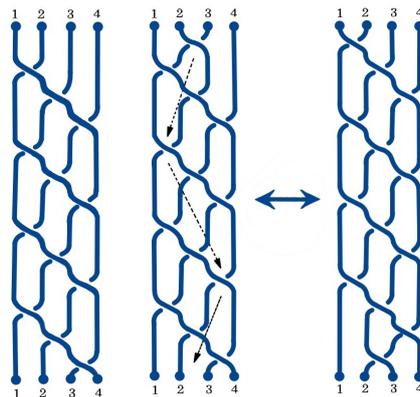


Рисунок 22 – Центральная элемент  $\Delta_n$  группы кос (слева), элемент  $\Delta_n$  коммутирует с образующими группы кос

В [91] показано, что центр группы  $B_n$  – бесконечно циклическая группа, порожденная элементом  $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n = a_{12}(a_{13}a_{23}) \dots (a_{1n}a_{2n} \dots a_{n-1n})$ . В. Вершинин доказал, что в группе сингулярных кос центр – бесконечно циклическая группа и совпадает с

центром группы кос [92]. М. Нецадим в [93], [94] установил, что в группе крашенных кос центр выделяется простым множителем, а в группе кос не выделяется.

В работе [95] найдены порождающие и определяющие соотношения группы сингулярных крашенных кос на 3 нитях. Исследована алгебраическая структура этой группы. Найдены автоморфизмы группы сингулярных крашенных кос, индуцированные сопряжением порождающих группы сингулярных кос. Доказано, что центр группы сингулярных кос на трех нитях выделяется прямым множителем в подгруппе сингулярных крашенных кос на трех нитях.

Случай 4-х нитей кардинально отличается от изученного случая в работе [95]. Дело в том, что группа  $SG_4$  содержит определяющие соотношения вида:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, |i - j| \geq 2,$$

которых не было в группе  $SG_4$ . Изучив случай 4-х нитей, можно попытаться доказать аналогичные утверждения для произвольного числа нитей.

Для группы  $SP_4$  найдена конечная система порождающих и соотношений. Используя полученное представление, доказано, что центр группы сингулярных кос выделяется в группе сингулярных крашенных кос прямым множителем, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос  $SG_4$ .

Результаты и обсуждения.

Теорема 7.1. Группа сингулярных крашенных кос  $SP_4$  порождается элементами  $a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}$  и определяется соотношениями:

-отношения коммутативности:

$$a_{12} b_{12} = b_{12} a_{12};$$

$$a_{13} b_{13} = b_{13} a_{13};$$

$$a_{23} b_{23} = b_{23} a_{23};$$

$$a_{14} b_{14} = b_{14} a_{14};$$

$$a_{12} b_{12} = b_{12} a_{12};$$

$$a_{24} b_{24} = b_{24} a_{24};$$

$$a_{34} b_{34} = b_{34} a_{34};$$

-сопряжение элементом  $a_{12}$ :

$$\begin{aligned}
a_{12}^{-1}a_{13}a_{12} &= a_{13}a_{23}a_{13}^{-1}a_{23}^{-1}a_{13}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}b_{13}a_{12} &= a_{13}a_{23}b_{13}a_{23}^{-1}a_{13}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}a_{23}a_{12} &= a_{13}a_{23}a_{13}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}b_{23}a_{12} &= a_{13}b_{23}a_{13}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}a_{14}a_{12} &= a_{14}a_{24}a_{14}^{-1}a_{24}^{-1}a_{14}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}b_{14}a_{12} &= a_{14}a_{24}b_{14}a_{24}^{-1}a_{14}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}a_{24}a_{12} &= a_{14}a_{24}a_{14}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}b_{24}a_{12} &= a_{14}b_{24}a_{14}^{-1}; \\
a_{12}^{-1}a_{34}a_{12} &= a_{34}; \\
a_{12}^{-1}b_{34}a_{12} &= b_{34};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $a_{13}$ :

$$\begin{aligned}
a_{13}^{-1}a_{14}a_{13} &= a_{14}a_{34}a_{14}^{-1}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1}; \\
a_{13}^{-1}b_{14}a_{13} &= a_{14}a_{34}b_{14}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1}; \\
a_{13}^{-1}a_{24}a_{13} &= [a_{14}^{-1}, a_{34}^{-1}]a_{24}[a_{34}^{-1}, a_{14}^{-1}]; \\
a_{13}^{-1}b_{24}a_{13} &= [a_{14}^{-1}, a_{34}^{-1}]b_{24}[a_{34}^{-1}, a_{14}^{-1}]; \\
a_{13}^{-1}a_{34}a_{13} &= a_{14}a_{34}a_{14}^{-1}; \\
a_{13}^{-1}b_{34}a_{13} &= a_{14}b_{34}a_{14}^{-1};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $a_{23}$ :

$$\begin{aligned}
a_{23}^{-1}a_{14}a_{23} &= a_{14}; \\
a_{23}^{-1}b_{14}a_{23} &= b_{14}; \\
a_{23}^{-1}a_{24}a_{23} &= a_{24}a_{34}a_{24}^{-1}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}b_{24}a_{23} &= a_{24}a_{34}b_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}a_{34}a_{23} &= a_{24}a_{34}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}b_{34}a_{23} &= a_{24}b_{34}a_{24}^{-1};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{12}$ :

$$\begin{aligned}
b_{12}^{-1}(a_{13}a_{23})b_{12} &= a_{13}a_{23}; \\
b_{12}^{-1}(a_{14}a_{24})b_{12} &= a_{14}a_{24}; \\
b_{12}^{-1}a_{34}b_{12} &= a_{34}; \\
b_{12}^{-1}b_{34}b_{12} &= b_{34};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{13}$ :

$$\begin{aligned}
b_{13}^{-1}(a_{14}a_{34})b_{13} &= a_{14}a_{34}; \\
b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}a_{24}a_{34})b_{13} &= a_{34}^{-1}a_{24}a_{34}; \\
b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}b_{24}a_{34})b_{13} &= a_{34}^{-1}b_{24}a_{34};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{23}$  :

$$\begin{aligned} b_{23}^{-1} a_{14} b_{23} &= a_{14}; \\ b_{23}^{-1} b_{14} b_{23} &= b_{14}; \\ b_{23}^{-1} (a_{24} a_{34}) b_{23} &= a_{24} a_{34}. \end{aligned}$$

Известно, что центр группы  $B_n$  – бесконечно циклическая группа, порожденная элементом  $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n = a_{12} (a_{13} a_{23}) \dots (a_{1n} a_{2n} \dots a_{n-1n})$ . Пусть  $\delta_k = a_{1k} a_{2k} \dots a_{k-1k}$ ,  $k = 2, 3, 4$ . Тогда  $\Delta_n = \delta_2 \delta_3 \delta_4$ .

Лемма 7.1. Следующие формулы верны в  $SP_4$ :

$$\begin{aligned} a_{14}^{a_{24}^{-1} a_{14}^{-1} \delta_3 \delta_4} &= a_{14} b_{14}^{a_{24}^{-1} a_{14}^{-1} \delta_3 \delta_4} = b_{14}, \\ a_{24}^{a_{14}^{-1} \delta_3 \delta_4} &= a_{24} b_{24}^{a_{14}^{-1} \delta_3 \delta_4} = b_{24}. \end{aligned}$$

Лемма 7.2. Следующие формулы верны в  $SP_4$ , ( $i \in \{1, 2\}$ ):

$$\begin{aligned} (a_{14} a_{24} a_{34})^{a_{i3}} &= a_{14} a_{24} a_{34}, \\ (a_{14} a_{24} a_{34})^{b_{i3}} &= a_{14} a_{24} a_{34}. \end{aligned}$$

Теорема 7.2. Центр группы сингулярных кос  $Z(SG_4)$  выделяется в группе сингулярных крашенных кос  $SP_4$  прямым множителем, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос  $SG_4$ .

С л е д с т в и е. Группа сингулярных крашенных кос  $SP_4$  порождается элементами

$\Delta_4, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}$  и определяется соотношениями:

$$\Delta_4 c = c \Delta_4, \quad c \in \{a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}\};$$

-отношения коммутативности:

$$\begin{aligned} a_{13} b_{13} &= b_{13} a_{13}; \\ a_{23} b_{23} &= b_{23} a_{23}; \\ a_{14} b_{14} &= b_{14} a_{14}; \\ a_{24} b_{24} &= b_{24} a_{24}; \\ a_{34} b_{34} &= b_{34} a_{34}; \end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $a_{13}$  :

$$\begin{aligned} a_{13}^{-1} a_{14} a_{13} &= a_{14} a_{34} a_{14} a_{34}^{-1} a_{14}^{-1}; \\ a_{13}^{-1} b_{14} a_{13} &= a_{14} a_{34} b_{14} a_{34}^{-1} a_{14}^{-1}; \\ a_{13}^{-1} a_{24} a_{13} &= [a_{14}^{-1}, a_{34}^{-1}] a_{24} [a_{34}^{-1}, a_{14}^{-1}]; \\ a_{13}^{-1} b_{24} a_{13} &= [a_{14}^{-1}, a_{34}^{-1}] b_{24} [a_{34}^{-1}, a_{14}^{-1}]; \\ a_{13}^{-1} a_{34} a_{13} &= a_{14} a_{34} a_{14}^{-1}; \\ a_{13}^{-1} b_{34} a_{13} &= a_{14} b_{34} a_{14}^{-1}; \end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $a_{23}$  :

$$\begin{aligned}
a_{23}^{-1}a_{14}a_{23} &= a_{14}; \\
a_{23}^{-1}b_{14}a_{23} &= b_{14}; \\
a_{23}^{-1}a_{24}a_{23} &= a_{24}a_{34}a_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}b_{24}a_{23} &= a_{24}a_{34}b_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}a_{34}a_{23} &= a_{24}a_{34}a_{24}^{-1}; \\
a_{23}^{-1}b_{34}a_{23} &= a_{24}b_{34}a_{24}^{-1};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{12}$ :

$$\begin{aligned}
b_{12}^{-1}(a_{13}a_{23})b_{12} &= a_{13}a_{23}; \\
b_{12}^{-1}(a_{14}a_{24})b_{12} &= a_{14}a_{24}; \\
b_{12}^{-1}a_{34}b_{12} &= a_{34}; \\
b_{12}^{-1}b_{34}b_{12} &= b_{34};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{13}$ :

$$\begin{aligned}
b_{13}^{-1}(a_{14}a_{34})b_{13} &= a_{14}a_{34}; \\
b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}a_{24}a_{34})b_{13} &= a_{34}^{-1}a_{24}a_{34}; \\
b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}b_{24}a_{34})b_{13} &= a_{34}^{-1}b_{24}a_{34};
\end{aligned}$$

-сопряжение элементом  $b_{23}$ :

$$\begin{aligned}
b_{23}^{-1}a_{14}b_{23} &= a_{14}; \\
b_{23}^{-1}b_{14}b_{23} &= b_{14}; \\
b_{23}^{-1}(a_{24}a_{34})b_{23} &= a_{24}a_{34}.
\end{aligned}$$

**Методы.** Для нахождения представления группы сингулярных крашенных кос использованы методы комбинаторной теории групп, в частности, метод Рейдемейстера-Шрайера [96], а для исследования структуры этой группы - методы теории групп. Для доказательства Теоремы 7.1. использовались идеи из [97].

**З а к л ю ч е н и е.** За отчетный период построено конечное представление для группы сингулярных крашенных кос  $SP_4$  на 4-х нитях. Как следствие, доказано, что центр  $Z(SG_4)$ , являющийся бесконечной циклической группой, выделяется прямым множителем в  $SP_4$ . С другой стороны, установлено, что  $Z(SG_4)$ , не выделяется прямым множителем в группе сингулярных кос  $Z(SG_4)$ .

Запланированные на 2021 год результаты получены. Построена система порождающих и определяющих соотношений для группы крашенных сингулярных кос в случае числа более трех нитей.

Полученные результаты опубликованы в статье [А.8]. Результаты прошли апробацию на следующих международных конференциях и исследовательских семинарах:

1. Conference «Primorie Mathematical Fair», Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), Владивосток, Россия, 21-26 июля 2021 г. – Т. А. Козловская «Группа сингулярных кос и ее представления» (секционный доклад), <https://www.maths.ed.ac.uk/cheltsov/vladik/index.html>.

2. Конференция международных математических центров мирового уровня, Центр Сириус, Сочи, Россия, 9-13 августа 2021 г. – Т. А. Козловская «Группа сингулярных кос и ее представления» (секционный доклад), <https://siriusmathcenter.ru/all-russian-conference>.

3. Конференция «Дни геометрии», Новосибирск, Россия, 21-25 сентября 2021 г. – Т. А. Козловская «Группа сингулярных крашенных кос» (приглашенный доклад), <http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2021/>.

4. Конференция «Динамика в Сибири», Новосибирск, Россия, 1-6 марта 2021 г. – Т. А. Козловская «Группа сингулярных кос и ее представления» (приглашенный доклад), <http://www.math.nsc.ru/conference/ds/2021/>.

5. Second Russia-Korea Conference on Knot Theory and Related Topics, онлайн конференция, 29 ноября – 3 декабря 2021 г. – Т. А. Козловская «The singular pure braid group» (приглашенный доклад), <https://www.korusknot.com>.

6. VIII Russian-Chinese Conference on Knot Theory and Related Topics, онлайн конференция, 24-26 декабря 2021 г. – Т. А. Козловская «The singular braid group» (приглашенный доклад), <http://labtd.nsu.ru/8RCCKT/>.

### **1.8 Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости**

**Введение.** Рассмотрим односвязную область  $\Delta$ , обладающую следующими свойствами: при линейном преобразовании  $L(w) = w + 2\pi$  область  $\Delta$  остается неизменной  $L(\Delta) = \Delta$ ; существует  $M$  такое, что  $\{w : \text{Im } w > M\} \subset \Delta$ ; часть границы области от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  состоит из конечного числа отрезков прямых. Такую область называют [98, 19] периодическим многоугольником или счетноугольником типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ .

Конформное отображение  $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta$  верхней полуплоскости  $\Pi^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$  на счетноугольник  $\Delta$ , нормированное условиями  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ ,  $f(0) = w_0$  существует и единственно.

Отображение  $f$  верхней полуплоскости на счетноугольник  $\Delta$ , удовлетворяющее условиям  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ , представимо в виде

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{\zeta - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2, \quad (5)$$

где  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – прообразы вершин на основном периоде,  $\alpha_k \pi$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – углы при этих вершинах,  $c_1$ ,  $c_2$  – константы.

Практическая сложность в применении формулы (5) заключается в сложности определения прообразов вершин  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , будем далее называть прообразы  $a_k$  параметрами отображения  $f$ .

Формула (5) получена в работе [19] с помощью принципа симметрии Римана–Шварца, в работе [99] с помощью формулы типа формулы Шварца. Интеграл Кристоффеля–Шварца распространен для отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией [100]. В работе [101] для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца. Численный метод нахождения конформных отображений на счетноугольники предложен в [20]. С помощью алгебры сверток и теории рядов Фробениуса [21] предложен метод построения конформных отображений на полигональные области, в том числе счетноугольники типа полуплоскости. С помощью параметрического метода Левнера получено дифференциальное уравнение [102] типа дифференциального уравнения Левнера для отображения верхней полуплоскости на области с симметрией переноса на  $2\pi$ . В работе [103] метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник, в работе [104] – на случай круговых счетноугольников.

Конформные отображения полуплоскости на счетноугольники, ограниченные дугами окружностей или отрезками прямых, имеют приложения в различных задачах математической физики [105]–[109].

В данной работе метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца, предложенный в работе [А.10], распространяется на случай счетноугольника.

**Методы.** Искомое отображение вкладывается в однопараметрическое семейство конформных отображений  $f = f(z, t)$  верхней полуплоскости на семейство счетноугольников  $\Delta(t)$ , получаемое сдвигом некоторых вершин начального счетноугольника  $\Delta(0)$  при условии сохранения углов. Семейство отображений  $f$  описывается с помощью дифференциального уравнения по параметру  $t$ , отвечающему за движение вершин. С помощью этого уравнения получена относительно параметров

отображения система обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

Рассмотрим счетноугольник  $\Delta(0)$ , имеющий  $n$  вершин  $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_n^{(0)}$  на основном периоде. Образует семейство счетноугольников  $\Delta(t)$ , сдвигая вершины счетноугольника  $\Delta(0)$  по закону  $A_k^{(m)}(t) := A_k^{(0)} + tB_k$ ,  $B_k \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , так, чтобы углы многоугольника оставались неизменными при  $0 < t < T$ . Таким образом, многоугольник  $\Delta(t)$  имеет углы  $\alpha_k \pi$  при вершинах  $A_k^{(m)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Пусть отображение  $\tilde{f}: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ ,  $w = \tilde{f}(\zeta, t)$ , при фиксированном  $t$  переводит верхнюю полуплоскость на счетноугольник  $\Delta(t)$ . Отображение  $\tilde{f}$ , обладает свойством  $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(\zeta, t) - \zeta) = \gamma(t)$ . Будем далее рассматривать семейство отображений  $f(z, t) = \tilde{f}(z - \text{Re } \gamma(t), t)$ . Отображение  $f$  обладает свойством

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z, t) - z) = i\delta(t), \quad \delta(t) \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Обозначим прообраз вершины на основном периоде  $A_k^{(0)}(t) = A_k^{(0)} + tB_k$  многоугольника  $\Delta(t)$  при отображении  $f$  через  $a_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , остальные прообразы вершин определяются равенством  $a_k^{(m)}(t) = a_k(t) + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Отображение  $f$  можно представить с помощью формулы Кристоффеля–Шварца (5).

Результаты и обсуждения. В следующей теореме для семейства отображений  $f$  получено дифференциальное уравнение по параметру  $t$ .

Теорема 8.1. Семейство отображений  $f = f(z, t)$ , нормированное условиями  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$  и (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{f}(z, t) = \frac{c(t)}{2} \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{z - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}, \quad (7)$$

точка над функцией означает частную производную по  $t$ .

Лемма 8.1. Параметр  $c(t)$  не зависит от  $t$ , кроме того

$$\sum_{k=1}^n \dot{a}_k(t) (\alpha_k - 1) = 0.$$

Теорема 8.2. Параметры  $a_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $t \in [0, T]$ , отображения  $f$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{a}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\alpha_j - 1) (\dot{a}_k(t) - \dot{a}_j(t))^2 \operatorname{ctg} \frac{a_k(t) - a_j(t)}{2} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Теорема 8.3. Пусть  $A_p^{(0)}(t) \neq A_q^{(0)}(t)$ ,  $p \neq q$ , при  $t \in [0, T)$ , тогда начальные данные  $\dot{a}_k(0) = a_{k,1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , системы дифференциальных уравнений (8) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\frac{B_k - B_{k-1}}{c(a_{k,0} - a_{k-1,0})} = \frac{a_{k,1} - a_{k-1,1}}{a_{k,0} - a_{k-1,0}} \int_0^1 F_k(\xi) d\xi + \sum_{q=1}^n \frac{\alpha_q - 1}{2} \int_0^1 (\xi(a_{k,1} - a_{k-1,1}) + a_{k-1,1} - a_{q,1}) \operatorname{ctg} \frac{\xi(a_{k,0} - a_{k-1,0}) + a_{k-1,0} - a_{q,0}}{2} F_k(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где

$$F_k(\xi) = \prod_{j=1}^n \left( \sin \frac{\xi(a_{k,0} - a_{k-1,0}) + a_{k-1,0} - a_{j,0}}{2} \right)^{\alpha_j - 1}.$$

В работе автора [103] предложен метод, позволяющий определить параметры отображения на счетноугольник с симметрией переноса. На  $n$ -м шаге рассматривается семейство счетноугольников  $\Delta(\tau)$ , получаемое проведение разрезов  $l^{(m)}(\tau) = l^{(0)}(\tau) + 2m\pi$  вдоль отрезков прямых в некотором начальном счетноугольнике  $\Delta(0)$ , начало разреза  $l^{(0)}(\tau)$  принадлежит границе  $\Delta(0)$ , параметр  $\tau$  связан с длиной разреза,  $0 \leq \tau < T$ . Если при  $\tau$  стремящемся к  $T$  подвижный конец разреза достигает некоторой граничной точки области  $\Delta(0)$ , то ядро семейства счетноугольников  $\Delta(\tau)$  можно выбрать различными способами (в процессе построения отображения на каждом шаге выбирается ядро, являющееся счетноугольником).

З а к л ю ч е н и е. Метод, предложенный автором в работе [А.10] распространен на случай счетноугольника с симметрией переноса. Метод позволяет поэтапно за  $N$  шагов определить параметры отображения полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса. На  $k$ -ом этапе искомое отображение вкладывается в однопараметрическое семейство конформных отображений верхней полуплоскости на семейство счетноугольников, получаемое сдвигом некоторых вершин начального счетноугольника при условии сохранения углов. Относительно семейства отображений получено дифференциальное уравнение (8) по параметру  $t$ . Задача определения параметров семейства отображений сведена к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с начальными условиями Коши. Данный метод в сочетании с работой [103]

позволяет поэтапно построить конформное отображение на произвольный счетноугольник так, чтобы на каждом шаге ядро семейства счетноугольников определялось однозначно. Такой подход обладает высокой точностью вычислений.

Результаты получены в рамках заявленной тематики (определение параметров в дифференциальном уравнении Шварца, используемом для представления конформных отображений из канонической области на круговые многоугольники). Решена смежная задача об определении параметров конформного отображения полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса. Исследования по определению параметров в дифференциальном уравнении Шварца планируется продолжить.

Результаты опубликованы в работах [А.10, А.22] и прошли апробацию на конференции:

1. Всероссийская научная конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томский государственный университет, Томск, Россия, 6-11 декабря 2021 г. – И. А. Колесников «Конформное отображение полуплоскости на многоугольник» (приглашенный доклад), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>.

### **1.9 Нестационарные режимы переноса массы, импульса и энергии в элементах строительных сооружений на основе преобразованных переменных «функция тока – завихренность»**

**Введение.** Проектирование современных зданий и сооружений неразрывно связано с многопараметрическим моделированием гидродинамики и теплопереноса с целью определения оптимальных параметров, отражающих эффективное функционирование объекта с минимальным потреблением энергетических ресурсов. На сегодняшний день исследование особенностей теплопереноса в строительных элементах зданий и сооружений на основе математического моделирования является актуальным [110–112], в связи с необходимостью разработки моделей, отражающих зависимость внутренней температуры объекта от внешних климатических условий и теплофизических характеристик строительных элементов.

В последнее время в строительстве все чаще используют пустотелые кирпичные и бетонные блоки. Наличие пустот, заполненных воздухом, позволяет увеличить общее термическое сопротивление строительного элемента, тем самым приводя к повышению энергоэффективности здания. В этой связи поиск способов снижения значений интегрального коэффициента теплоотдачи внутри пустотелых строительных элементов является актуальной задачей.

В рамках настоящего проекта проведено численное моделирование процессов сложного теплообмена (конвекция, теплопроводность, излучение) в элементах строительных сооружений (пустотелый кирпичный блок). Рассматриваемая область представлена на рисунке 23.

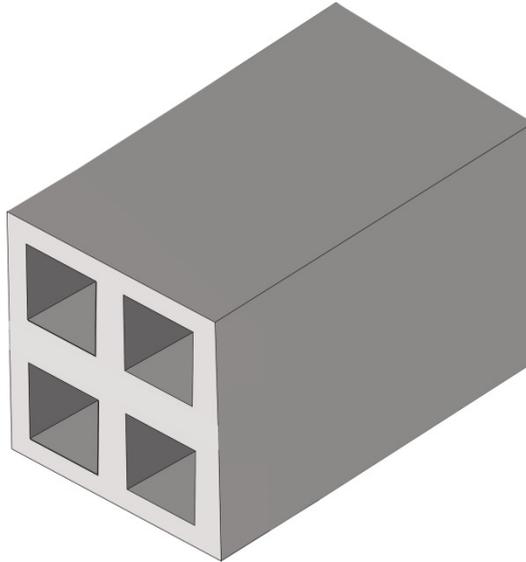


Рисунок 23 – Область решения рассматриваемой задачи

В пустотах находится воздух, который считается ньютоновской диатермичной средой, удовлетворяющей приближению Буссинеска. На левой и правой внешних границах формулируются граничные условия первого рода. Верхняя и нижняя внешние границы – теплоизолированы. Внутренние поверхности твердых стенок считаются серыми. Теплообмен излучением между стенками моделируется на основе приближения поверхностного излучения.

Методы. С учетом отмеченных выше особенностей процессы переноса массы, количества движения и энергии описываются следующей системой дифференциальных уравнений [113]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} = R \quad k = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ T \\ k \\ \varepsilon \\ T \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$S_i = \begin{pmatrix} u_i \\ p\delta_{i1} - (v + v_t)\sigma_{i1} + u_i u_1 \\ p\delta_{i2} - (v + v_t)\sigma_{i2} + u_i u_2 \\ -(a + a_t)\partial T/\partial x_i + u_i T \\ -(v + v_t/\sigma_k)\partial k/\partial x_i + u_i k \\ -(v + v_t/\sigma_\varepsilon)\partial \varepsilon/\partial x_i + u_i \varepsilon \\ a_w \partial T/\partial x_i \end{pmatrix}, \forall i = 1, 2 \quad (12)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g\beta\Delta T \\ 0 \\ P_k + G_k - \varepsilon \\ (c_{1\varepsilon}(P_k + c_{3\varepsilon}G_k) - c_{2\varepsilon}\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (14)$$

Здесь  $x_1, x_2$  – физические координаты;  $u_1, u_2$  – составляющие скорости в проекции на оси  $x_1, x_2$ , соответственно;  $T$  – температура;  $\Delta T$  – температурный напор;  $t$  – время;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности;  $a_w$  – коэффициент теплопроводности материала твердой стенки;  $\nu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости;  $\rho$  – плотность среды;  $c_p$  – удельная теплоемкость;  $\beta$  – температурный коэффициент объемного расширения;  $g$  – ускорение свободного падения;  $Pr_t = \nu_t/a_t$  – турбулентное число Прандтля.

Значения параметров  $P_k, G_k$  и турбулентных характеристик можно найти в работе [114].

Уравнения (10)–(14) с соответствующими граничными условиями решаются методом конечных разностей. Для решения параболических и эллиптических уравнений используются разные подходы. Для параболических уравнений схема выглядит следующим образом:

- 1) Применение локально-одномерной схемы Самарского;
- 2) Дискретизация диффузионных и конвективных членов;

3) Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки.

Разработанный метод решения был детально протестирован на множестве модельных задач.

Результаты и обсуждения. В реальных практических ситуациях размеры пустот и толщина стенок в пустотелом кирпичном блоке постоянны. Таким образом, реальное тепловое состояние исследуемого объекта определяется разницей температур, коэффициентами теплопроводности среды и стенок, а также степенью черноты внутренних поверхностей твердых стенок. Влияние последнего параметра на теплопередачу и гидродинамику, по мнению автора работы, изучено недостаточно. В связи с этим основной целью данной работы является исследование влияния степени черноты поверхностей на распределение интегральных и локальных параметров. Численные исследования краевой задачи проводилось при следующих значениях определяющих параметров:  $Ra = 0.5 \cdot 10^8$ ,  $\zeta = 0.92$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $N_{rad} = 112.2$ ,  $\tau = 10000$ ,  $\tilde{\epsilon} = 0 - 0.8$ . Здесь  $\tilde{\epsilon}$  - степень черноты внутренних поверхностей твердых стенок.

На рисунке 24 представлены распределения изотерм и скоростей  $\tau = 10000$ ,  $\tilde{\epsilon} = 0$ . Из представленных распределений видно, что вблизи вертикальных внутренних стенок образуется тепловой пограничный слой. Движение воздушных масс происходит в одних и тех же направлениях (по часовой стрелке) для каждой области в пустотелом кирпиче. Это связано с геометрией области решения, а также с нагревом и охлаждением внешней левой и правой стенок, соответственно.

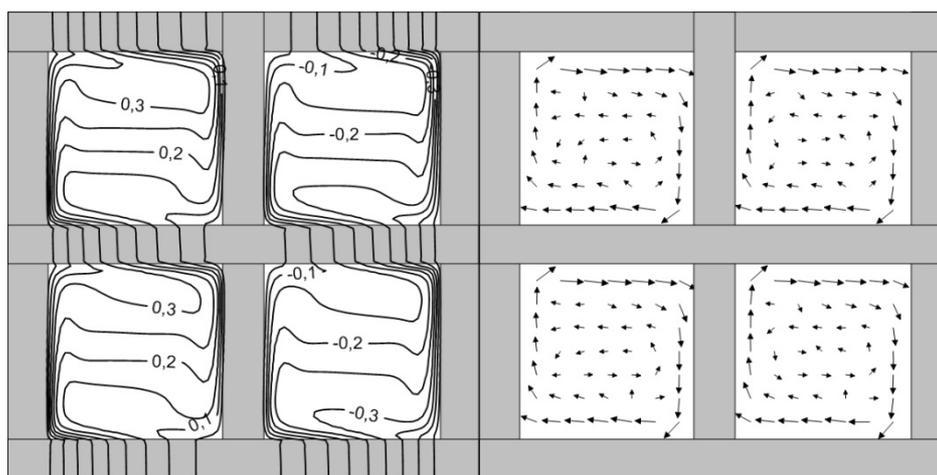


Рисунок 24 – Распределения изотерм и скоростей при  $\tau = 10000$ ,  $\tilde{\epsilon} = 0$

В таблице 2 представлены изменения различных исследуемых параметров (среднее конвективное число Нусельта, максимальное абсолютное значение функции потока, среднее радиационное число Нуссельта) в зависимости от степени черноты поверхностей.

Таблица 2 – Влияние степени черноты поверхностей на значение характерных параметров при  $\tau = 10000$

Степень черноты поверхностей	$Nu_{conv}$	$ \Psi _{max}$	$Nu_{rad}$
0.2	9.95	0.00675	1.47
0.4	8.88	0.00670	3.04
0.6	8.77	0.00663	4.73
0.8	8.63	0.00656	6.61

С ростом степеней черноты твердых стенок наблюдается характерное снижение интенсивности конвективного теплообмена при одновременном росте среднего радиационного числа Нуссельта с увеличением значений  $\tilde{\epsilon}$ . Следует отметить, что при высоких значениях степени черноты поверхностей вклад лучистого теплообмена в общий теплообмен является значительным. Поэтому при моделировании процессов тепломассопереноса в полых строительных элементах необходимо учитывать излучение между внутренними поверхностями.

**З а к л ю ч е н и е.** В результате реализации настоящего проекта были разработаны современные математические модели, описывающие нестационарные режимы переноса массы, импульса и энергии в элементах строительных сооружений на основе преобразованных переменных «функция тока – завихренность». Для эффективной реализации созданных математических моделей были сформулированы методы решения, созданы численные алгоритмы и программные коды на языке C++. Проведена верификация разработанных математических моделей и численных алгоритмов на известных экспериментальных данных и модельных задачах. В результате получены распределение интегральных (числа Нуссельта) и локальных (изотермы и линии тока) параметров. Показано характерное снижение интенсивности конвективного теплообмена с увеличением излучательной способности внутренних поверхностей твердых стенок. Установлено, что при изменении степени черноты поверхностей от 0.6 до 0.8 среднее радиационное число Нуссельта можно увеличить на 37%. Поэтому, использование пустотелого кирпича с низким значением степени черноты поверхностей позволяет увеличить энергоэффективность зданий. Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью.

### 1.10 О некоторых свойствах кольца формальных матриц $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$

**Введение.** Пусть  $k$  – натуральное число,  $k \geq 2$ ,  $R$  – произвольное кольцо. Элемент  $a$  кольца  $R$  называется  $k$ -хорошим, если его можно записать в виде суммы  $k$  обратимых элементов кольца  $R$ . Кольцо называется  $k$ -хорошим, если каждый его элемент является  $k$ -хорошим. Изучение колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами, началось в 1953–1954 годах, когда Вольфсон [115] и Зелинский [116] независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства  $V$  над телом  $D$  есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда  $\dim(V) = 1$  и  $D = \mathbb{Z}_2$ . Это значит, что кольцо линейных преобразований  $\text{End}(V)$  порождается аддитивно своими обратимыми элементами. В 1958 году Л.А. Скорняков [117] поставил задачу описания такого рода колец. Независимо от предыдущих работ к этой проблеме пришел Фукс. В [118] он сформулировал вопрос – «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?». За этим последовал ряд статей Стрингалла, Фридмана, Хилла, Кастаньо и других. В 1973 году Хенриксен [119] описал два широких класса колец порождаемых своими обратимыми элементами. Позже с этими кольцами работали Вамос [120] (он ввел понятие  $k$ -хорошего кольца), Сривастава [121]. Имеется несколько статей, посвященных различным  $k$ -хорошим кольцам. Так, например, в [120] и [121] получены результаты по  $k$ -хорошести регулярных колец фон Неймана, правых самоинъективных колец.

**З а м е ч а н и е.** Если кольцо  $R$  не является  $k$ -хорошим ни для какого номера  $k \in \mathbb{N}$ , но все его элементы  $k$ -хорошие для разных номеров  $k$ , то будем называть  $R$   $\omega$ -хорошим.

**З а м е ч а н и е.** Несложно видеть, что если  $R$  –  $k$ -хорошее кольцо, то оно будет  $(k+m)$ -хорошим,  $m \in \mathbb{N}$ . Поэтому имеет смысл говорить о минимальном  $k \in \mathbb{N}$ , при котором  $R$  –  $k$ -хорошее.

В 1977 году Николсон [122] ввел понятие чистоты для колец и отдельных элементов колец. Элемент называется (сильно) чистым, если он представим в виде суммы идемпотентного элемента и обратимого (коммутирующих друг с другом). Кольцо называется (сильно) чистым, если все его элементы (сильно) чистые. За этим последовало множество работ посвященных свойству чистоты.

В [123] Сяо и Тонг обобщают николсонвскую «чистоту», заводя понятие  $n$ -чистоты,  $n \in \mathbb{N}$  – элемент кольца называется  $n$ -чистым,  $n \in \mathbb{N}$ , если он представим в виде суммы идемпотентного элемента и  $n$  обратимых. Кольцо называется  $n$ -чистым, если все его элементы  $n$ -чистые.

Далее у Дизля [124] появилось связанное понятие (сильно) ниль-чистого элемента – элемента представимого в виде суммы идемпотентного и нильпотентного элементов (коммутирующих друг с другом). Аналогично, кольцо называется (сильно) ниль-чистым, если все его элементы (сильно) ниль-чистые. Очевидно, что ниль-чистое кольцо всегда будет чистым.

Отталкиваясь от работы Дизля, Калугареану и Лам [125] ввели понятие изящного разложения элемента. Элемент кольца называется изящно разложимым или просто изящным, если его можно записать как сумму нильпотентного элемента и обратимого. Опять же кольцо называем изящно разложимым или изящным, если все его элементы изящные.

Данчев [126], обобщая свойство изящности, определил свойство ниль-хорошести для колец и их элементов. Элемент  $x$  кольца  $R$  называется ниль-хорошим, если он представим в виде суммы нильпотентного и обратимого элемента или, что важно, нулевого;  $x$  называется сильно ниль-хорошим, если  $x$  – ниль-хороший, и обратимый и нильпотентный элемент, в сумме дающие  $x$ , коммутируют;  $x$  называется уникально ниль-хорошим, если  $x$  – ниль-хороший и его разложение в сумму нильпотента и обратимого или нулевого элементов единственно. Кольцо называется (сильно, уникально) ниль-хорошим, если все его элементы (сильно, уникально) ниль-хорошие.

Несложно видеть, что всякое изящное кольцо будет ниль-хорошим, однако, обратное неверно. Например, кольца вычетов  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_4$  ниль-хороши, но не изящны. Ниль-хорошие кольца обладают более интересными свойствами по сравнению с изящными, хотя отличаются они, как могло бы показаться, незначительно.

Наконец, в [127] М.С. Абудлюсефи, Н. Ашрафи и Х. Чен ввели понятие 2-ниль-хорошего элемента кольца – элемента, представимого в виде суммы двух обратимых элементов и одного нильпотентного. Кольцо называется 2-ниль-хорошим, если все его элементы 2-ниль-хорошие. В этой же статье они получили некоторые свойства таких колец. Отметим также, что понятие 2-ниль-хорошести, несмотря на название, обобщает скорее понятие изящной разложимости, нежели ниль-хорошести по Данчеву. Так, есть кольца, не являющиеся 2-ниль-хорошими, но ниль-хорошие по Данчеву. Например,  $\mathbb{Z}_2$  – не является 2-ниль-хорошим, но изящно и уникально ниль-хорошее по Данчеву.

По аналогии с [123] можно ввести следующее обобщение свойства 2-ниль-хорошести для колец и их элементов:

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $k$  – натуральное число, большее 1.

а) Элемент кольца назовем  $k$ -ниль-хорошим, если его можно представить в виде суммы одного нильпотентного и  $k$  обратимых элементов.

б) Кольцо  $R$  назовем  $k$ -ниль-хорошим, если все его элементы  $k$ -ниль-хорошие.

в) Если кольцо  $R$  не является  $k$ -ниль-хорошим ни для какого  $k$ , но каждый элемент из  $R$  является  $k$ -ниль-хорошим для подходящего  $k$ , то будем говорить, что  $R$  есть  $\omega$ -ниль-хорошее кольцо.

Классический объект в математике –  $M(n, R)$  – кольцо всех матриц порядка  $n$  над некоторым кольцом  $R$ . Заметим, что запись матриц в виде таблиц – это на самом деле один из способов их представления. Кольцо матриц является кольцом некоторых функций с поточечным сложением и умножением типа свертки. Это касается всех матриц, появляющихся в тексте.

В последнее время активно изучаются так называемые формальные матрицы (по-другому – обобщенные матрицы). Изучению произвольных колец формальных матриц посвящено множество работ (например, [23], [128]–[133]).

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц проистекают из работ японского математика Киити Мориты (1915–1995). В 1958 году он в статье «Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition» [134] ввел объект, который позже был назван контекстом Мориты.

Контекст Мориты – это набор  $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$ , состоящий из произвольных колец  $R$  и  $S$ , бимодулей  ${}_R M_S$  и  ${}_S N_R$ , и, определенным образом связанных между собой, бимодульных гомоморфизмов  $\varphi$  и  $\psi$ . Он пришел к нему при изучении контравариантных функторов  $D_1$  и  $D_2$  между категориями модулей  $Mod\text{-}R$  и  $Mod\text{-}S$  таких, что выполняются условия  $D_1 D_2 = Id_{Mod\text{-}R}$  и  $D_2 D_1 = Id_{Mod\text{-}S}$ . Контексты Мориты интересны и сами по себе, и как очень полезный инструмент обобщения в теории колец. Эта тема заслуженно привлекает внимание алгебраистов уже более полувека. Подробнее с историей развития этого направления исследований можно познакомиться в обзорной статье [135]. В ней же можно найти ссылки на важнейшие работы по теме.

По данному контексту Мориты всегда можно построить кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\},$$

называемое кольцом контекста Мориты или кольцом формальных матриц второго порядка с поэлементным сложением и умножением вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}, \quad \text{причем должны выполняться}$$

равенства ассоциативности  $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$  и  $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$  для всех  $m, m' \in M, n, n' \in N$ .

Пусть  $p$  – простое число.  $\langle \mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2), + \rangle$  – абелева группа порядка  $p^3$ . Как устроено кольцо эндоморфизмов  $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$ ? Бергман [22] доказал, что если  $p$  – простое число, то  $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$  – полулокальное кольцо мощности  $p^5$ , которое не может быть вложено в кольцо матриц ни над каким коммутативным кольцом. Климент, Наварро и Тортоса изучили арифметику кольца  $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$ , которое они обозначают  $E_p$ , описали группу его обратимых элементов, центр. Далее ими были построены криптографические системы, основывающиеся на арифметике  $E_p$  [136], [137].

На кольцо  $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$  можно посмотреть как на кольцо формальных (или как еще говорят «обобщенных») матриц  $\begin{pmatrix} \text{End}(\mathbb{Z}_p) & \text{Hom}(\mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_p) \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2}) & \text{End}(\mathbb{Z}_{p^2}) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_{p^2} \end{pmatrix}$ . Теория колец формальных матриц изложена в книге [23]. Вообще,  $\text{End}(\mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^m))$ ,  $n < m$  – наглядная иллюстрация к понятию кольца формальных матриц. Его можно отождествить с

кольцом формальных матриц  $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix}$ , подробнее в [23].

В недавней статье Е.А. Тимошенко и А.Ю. Степановой [24] изучаются кольца эндоморфизмов конечных примарных абелевых групп ранга 2 и 3. Всякая конечная  $p$ -группа  $H$  ранга 2 может быть отождествлена с подходящей группой вида  $\mathbb{Z}(p^m) \times \mathbb{Z}(p^n)$ , где  $m \geq n > 0$ . Тогда ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу обобщенных матриц

$\begin{pmatrix} \text{End}(\mathbb{Z}_{p^m}) & \text{Hom}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^m}) \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}_{p^m}, \mathbb{Z}_{p^n}) & \text{End}(\mathbb{Z}_{p^n}) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^m} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \end{pmatrix}$ . Они нашли необходимые и достаточные

условия обратимости таких матриц, а также формулы для построения обратной матрицы.

Методы. В работе были использованы всевозможные методы теории колец, теории абелевых групп, теории модулей. Именно, методы связанные с формальными матрицами и кольцами таких матриц были разработаны японским математиком Киити Моритой в его статье «Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition» [134] и дальше развивались во множестве работ, см. обзорную статью [135]. Методы, касающиеся аддитивных задач в кольцах, развивались, как было сказано во введении, с середины прошлого века Вольфсоном [115], Зелинским [116], Скорняковым [117], Хенриксеном [119], Никлсоном [122] и другими.

Результаты и обсуждения.

Теорема 10.1 [131]. Если  $K$  – кольцо формальных матриц порядка  $n$  и все кольца  $R_1, \dots, R_n$  являются  $k$ -хорошими, то  $K$  – тоже  $k$ -хорошее кольцо.

Несложно видеть, что кольца  $\mathbb{Z}_{2^l}$ , где  $l \geq 1$ , являются  $\omega$ -хорошими и  $\omega$ -ниль-хорошими.

Следствие 10.1. При  $p=2$   $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$  –  $\omega$ -хорошее кольцо, при  $p>2$  – 2-хорошее.

Следствие 10.2.  $\text{End}(\mathbb{Z}(2^n) \times \mathbb{Z}(2^m))$ ,  $n < m$  –  $\omega$ -хорошее кольцо.

Ясно, что если кольцо  $R$  является  $k$ -хорошим, то оно будет и  $k$ -ниль-хорошим.

Следствие 10.3. При  $p=2$   $\text{End}(\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p^2))$  –  $\omega$ -ниль-хорошее кольцо, при  $p>2$  – 2-ниль-хорошее.

Предложение 10.1. Если кольцо  $R$  является  $k$ -ниль-хорошим, то оно является и  $(k+j)$ -ниль-хорошим для всякого натурального  $j$ .

Действительно, достаточно доказать, что  $R$  является  $(k+1)$ -ниль-хорошим кольцом. Действительно, для всякого  $x \in R$  мы можем записать элемент  $x-1$  как сумму одного нильпотентного и  $k$  обратимых элементов. В этом случае элемент  $x = (x-1) + 1$  будет суммой одного нильпотентного и  $k+1$  обратимых элементов.

Заключение. Было показано, что  $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$  изоморфное кольцу формальных матриц второго порядка  $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_{p^2} \end{pmatrix}$ , является 2-хорошим и 2-ниль-хорошим при  $p>2$ , и  $\omega$ -хорошим и  $\omega$ -ниль-хорошим при  $p=2$ .

### 1.11 Оценки на собственные числа задачи Дирихле и Неймана для оператора $p$ -Лапласа

Введение. В отчетный период исследовалась задача на собственные числа оператора Лапласа ( $p=2$ ) с краевым условием Дирихле

$$-\text{div}(\nabla u) = \lambda u \text{ в } \Omega, \quad u=0 \text{ на } \partial\Omega$$

в ограниченных областях  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих квазигиперболическому условию на границу [138, 139]. Этот класс областей включает, в частности, области с липшицевой границей, области с гёльдеровыми особенностями и области с условием Альфорса [140].

Методы. Напомним, что область  $\Omega$  удовлетворяет  $\gamma$ -квазигиперболическому условию на границу для некоторого  $\gamma>0$ , если условие роста на квазигиперболическую метрику

$$k_{\Omega}(x, x_0) \leq \frac{1}{\gamma} \log \frac{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} + C_0$$

выполнено для каждого  $x \in \Omega$ , где  $x_0 \in \Omega$  – фиксированная точка и  $C_0 = C_0(x_0) < \infty$  [141].

Известно [142], что в ограниченных областях  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  оператор Лапласа с граничным условием Дирихле имеет дискретный спектр, который можно представить в виде неубывающей последовательности

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_n(\Omega) \leq \dots,$$

где каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность. Следовательно, по принципу минимакса первое собственное число для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле определяется равенством

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}.$$

Другими словами, первое собственное значение есть точная постоянная в неравенстве Соболева

$$\left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_{2,2}(\Omega) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

где  $W_0^{1,2}(\Omega)$  – пространство Соболева.

Как известно [143] собственные числа для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле можно точно вычислить лишь в некоторых областях, таких например, как круг, прямоугольник или треугольник. По этой причине, оценки собственных чисел для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле имеют важное значение в спектральной теории эллиптических операторов.

Нижние оценки на собственные числа для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле в ограниченных областях связаны с неравенством Рэля-Фабера-Крана [142]. Это неравенство говорит, что первое собственное число Дирихле в ограниченной области не меньше соответствующего собственного числа Дирихле в круге, имеющего ту же площадь, т.е.

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) = \frac{j_{0,1}^2}{R_*^2},$$

где  $j_{0,1} \approx 2.4048$  – первый положительный корень функции Бесселя  $J_0$  и  $\Omega^*$  – круг радиуса  $R_*$  той же площади, как  $\Omega$ .

Другая нижняя грань для первого собственного значения для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле в односвязной плоской области была получена Макай [144]:

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\alpha}{\rho^2},$$

где  $\alpha=1/4$  и  $\rho$  – радиус наибольшего круга вписанного в  $\Omega$ . Для выпуклых областей эта нижняя грань с  $\alpha=\pi^2/4$  была установлена Хершом [145].

В отчетный период нами получены нижние оценки и оценки изменения первых собственных чисел для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле в областях, удовлетворяющих квазигиперболическому условию на границу.

**Теорема 11.1.** Если ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  удовлетворяет квазигиперболическому условию на границу, то

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\lambda_1(\Omega')}{K \|J_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

где  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область и  $J_\varphi$  – якобиан  $K$ -квазиконформного отображения  $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ .

**Пример 11.1.** Отображение

$$\varphi(z) = \sqrt{a^2+1}z + a\bar{z}, \quad z = x + iy, \quad a \geq 0,$$

является  $K$ -квазиконформным с коэффициентом квазиконформности

$K = (\sqrt{a^2+1} + a) / (\sqrt{a^2+1} - a)$  и отображает единичный круг  $D$  на внутренность эллипса

$\Omega_e$  с полуосями  $\sqrt{a^2+1} + a$  и  $\sqrt{a^2+1} - a$ . В этом случае  $J_\varphi = 1$ . Следовательно, имеем

$$\lambda_1(\Omega_e) \geq \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{\sqrt{a^2+1} + a} j_{0,1}^2,$$

где  $j_{0,1} \approx 2.4048$  – первый положительный корень функции Бесселя  $J_0$ . Отметим, что данная оценка для  $a \leq 1/8$  является лучше, чем оценка полученная Хершом для  $\alpha=\pi^2/4$ .

Классический результат [142] говорит, что собственные числа  $\lambda(\Omega)$  удовлетворяют свойству монотонности по области, а именно, если  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ , то  $\lambda(\Omega_1) \geq \lambda(\Omega_2)$ .

Учитывая это свойство и Теорему 1 получим оценки изменения первого собственного числа для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле.

**Теорема 11.2.** Если ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  удовлетворяет квазигиперболическому условию на границу и такая, что  $\Omega \subset \Omega'$ , то

$$\lambda_1(\Omega) - \lambda_1(\Omega') \geq \left( \frac{1}{K \|J_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}} - 1 \right) \lambda_1(\Omega'),$$

где  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область и  $J_\varphi$  – якобиан  $K$ -квазиконформного отображения  $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ .

Пример 11.2. Отображение

$$\varphi(z) = a(z+1)^{\frac{3}{4}}(\bar{z}+1)^{\frac{1}{4}}, \quad z = x+iy, \quad 0 < a < 1,$$

является 2-квазиконформным и отображает единичный круг  $D$  на область

$$\Omega_a := \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = 2a \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

В этом случае величина  $K \|J_\varphi\|_{L^\infty(D)} = a^2 < 1$  и  $D \supset \Omega_a$ . Следовательно, имеем

$$\lambda_1(\Omega_a) - \lambda(D) \geq \frac{1-a^2}{a^2} j_{0,1}^2,$$

где  $j_{0,1} \approx 2.4048$  – первый положительный корень функции Бесселя  $J_0$ .

Предложенный метод базируется на операторах композиции, порожденных квазиконформными отображениями [146] и их приложениях к весовым неравенствам Соболева. Обозначим через  $h(x) = |J_\varphi(x)|$  квазигиперболический вес, определенный  $K$ -квазиконформным отображением  $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ .

Теорема 11.3. Пусть  $\Omega$  – односвязная область с непустой границей. Тогда для любой функции  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  справедливо весовое неравенство Соболева

$$\left( \int_{\Omega} |u(x)|^r h(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq A_{r,2}(\Omega, h) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

для любого  $r \geq 2$  с постоянной

$$A_{r,2}(\Omega, h) \leq K^{\frac{1}{2}} \inf_{p \in \left(\frac{2r}{r+2}, 2\right)} \left( \frac{p-1}{2-p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{(\sqrt{\pi} \sqrt[2]{2})^{-1} |\Omega'|^{\frac{1}{r}}}{\sqrt{\Gamma(2/p) \Gamma(p-2/p)}}.$$

**З а к л ю ч е н и е.** В заключении отметим, что работы выполнены в соответствии с предусмотренным планом на 2021 год. Все результаты, полученные в проекте, являются новыми, являются определяющими в развитии спектральной теории эллиптических операторов и теории квазиконформных отображений и опубликованы в [147]. Основной вклад результатов проекта в спектральную теорию эллиптических операторов заключается в развитии новых геометрических методов, основанных на геометрической теории

операторов композиции в пространствах Соболева и теории квазиконформных отображений. Предложенные методы позволяют получать нижние оценки собственных чисел для оператора  $p$ -Лапласа в широком классе областей, включающий выпуклые, звездные и фрактальные области.

### **1.12 Численное исследование сопряженной естественной конвекции в замкнутой полости с локальными источниками энергии решеточным методом Больцмана**

**Введение.** Сопряженный теплообмен в полостях различной конфигурации с нагревательными элементами является важной задачей в области охлаждения электронного оборудования [1–5], целью которой является интенсификация теплоотдачи от нагревателей. В работе [1] авторы исследовали сопряженную естественную конвекцию в замкнутой квадратной полости с локальным источником энергии внутри теплопроводной подложки. Были проведены исследования в широком диапазоне чисел Рэлея и Прандтля. Снижение максимальной температуры нагретой поверхности наблюдается в случае низких и умеренных коэффициентов теплопроводности. В работе [2] авторы численно исследовали сопряженный естественный конвективный теплообмен в замкнутой полости. Три нагревательных элемента были расположены на теплопроводной подложке и расстояние между нагревателями варьировалось. В результате было обнаружено, что числа Рэлея и Прандтля оказывают существенное влияние на характеристики теплопередачи и структуру потока среды внутри полости. В работе [3] авторы исследовали ламинарные режимы естественной конвекции в канале с теплопроводной подложкой и локальным источником энергии. Авторы проанализировали влияние теплопроводности подложки и ее толщины, а также ширины канала. Показано, что с увеличением толщины подложки снижается температура нагревателя.

В настоящее время активно развивается относительно новый вычислительный метод – решёточный метод Больцмана. Задачи сопряжённого теплообмена, решённые с помощью решёточного метода Больцмана, были рассмотрены в ряде работ [6–15].

Область решения, заполненная воздухом представлена на рисунке 25. Локальный источник энергии длиной  $l$  и высотой  $h_2$ , прямоугольной и треугольной формы расположен на теплопроводной подложке толщиной  $h_1$ . Вертикальные стенки поддерживаются при постоянной минимальной температуре  $T_c$ , остальные стенки адиабатические. Температура источника энергии была постоянной и максимальной в рассматриваемой системе  $T_h$ .

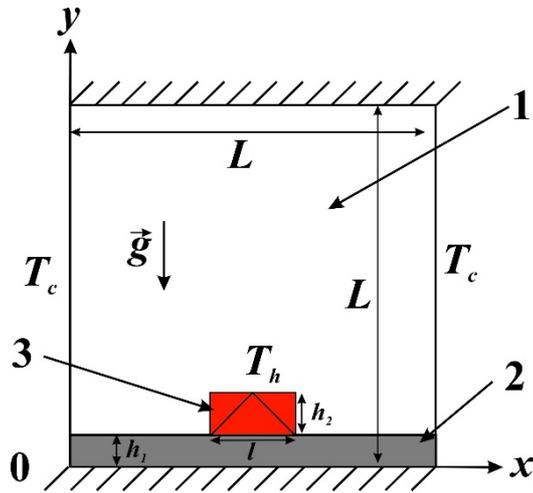


Рисунок 25 – Вычислительная область: 1–воздушная полость, 2–теплопроводная подложка, 3–источник энергии

**Методы.** Численное исследование рассматриваемой задачи было проведено на основе решеточного метода Больцмана (РМБ) с использованием схемы D2Q9. Основным уравнением для описания транспортных процессов в РМБ является кинетическое уравнение Больцмана. Это уравнение может быть записано с использованием безразмерных переменных следующим образом [16]:

$$f_i(X + C_{x_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = (1 - \omega_f) f_i(X, Y, \tau) + \omega_f f_i^{eq}(X, Y, \tau) + F_{y_i}(X, Y, \tau) \Delta \tau \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (15)$$

$$g_i(X + C_{x_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = (1 - \omega_g) g_i(X, Y, \tau) + \omega_g g_i^{eq}(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (16)$$

$$h_i(X + C_{x_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = (1 - \omega_h) h_i(X, Y, \tau) + \omega_h h_i^{eq}(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (17)$$

Здесь  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  – функция распределения плотности, функция распределения энергии для жидкой среды и для твердого тела, соответственно;  $X$  и  $Y$  – безразмерные декартовы координаты;  $\tau$  и  $\Delta \tau$  – безразмерное время и шаг по времени, соответственно. При решении этих уравнений, вычислительный процесс делится на два этапа

1. Столкновение:

$$f_i(X, Y, \tau) = (1 - \omega_f) f_i(X, Y, \tau) + \omega_f f_i^{eq}(X, Y, \tau) + F_{y_i}(X, Y, \tau) \Delta \tau \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (18)$$

$$g_i(X, Y, \tau) = (1 - \omega_g) g_i(X, Y, \tau) + \omega_g g_i^{eq}(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (19)$$

$$h_i(X, Y, \tau) = (1 - \omega_h) h_i(X, Y, \tau) + \omega_h h_i^{eq}(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (20)$$

2. Течение:

$$f_i(X + C_{y_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = f_i(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (21)$$

$$g_i(X + C_{y_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = g_i(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (22)$$

$$h_i(X + C_{y_i} \Delta \tau, Y + C_{y_i} \Delta \tau, \tau + \Delta \tau) = h_i(X, Y, \tau) \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (23)$$

Для определения функции локального равновесного распределения используются следующие соотношения:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left( 1 + \frac{VC_i}{C_s^2} + \frac{(VC_i)^2}{2C_s^4} - \frac{VV}{2C_s^2} \right),$$

$$g_i^{eq} = w_i \Theta \left( 1 + \frac{VC_i}{C_s^2} + \frac{(VC_i)^2}{2C_s^4} - \frac{VV}{2C_s^2} \right),$$

$$h_i^{eq} = w_i \Theta \left( 1 + \frac{VC_i}{C_s^2} + \frac{(VC_i)^2}{2C_s^4} - \frac{VV}{2C_s^2} \right).$$

Здесь  $f_i^{eq}$  – функция локального равновесного распределения для определения плотности,  $g_i^{eq}$  – функция локального равновесного распределения для определения температуры среды,  $h_i^{eq}$  – функция локального равновесного распределения для определения температуры твердой стенки,  $\rho$  – безразмерная плотность,  $\Theta$  – безразмерная температура,  $w_i$  – весовые функции  $\left( \sum_i w_i = 1 \right)$ ,  $V$  – вектор макроскопической скорости,  $C_i$  – микроскопическая скорость,  $C_s = 1/\sqrt{3}$  – скорость звука,  $F_{y_i} = \{w_i \rho g \beta (\Theta - \Theta_0) C_{y_i}\} / C_s^2$  – сила тяжести,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объемного термического расширения. Частота релаксации для каждого из уравнений определяется с помощью следующих соотношений:

$$\omega_f = \frac{1}{0.5 + \frac{v}{\Delta \tau C_s^2}}, \quad \omega_g = \frac{1}{0.5 + \frac{a}{\Delta \tau C_s^2}}, \quad \omega_h = \frac{1}{0.5 + k \frac{a}{\Delta \tau C_s^2}},$$

здесь  $k = \frac{k_{wall}}{k_{fluid}}$  – относительная теплопроводность.

Плотность и вектор макроскопической скорости определялись как:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \quad \rho V = \sum_{i=0}^8 f_i C_i.$$

Все вычисления были проведены с использованием решётки D2Q9. В качестве типа граничного условия была выбрана схема упругого отскока [21].

Начальные условия:  $V(X, Y, 0) = \Theta(X, Y, 0) = 0$  для локального источника энергии  $\Theta = 1$ .

Граничные условия:  $V(X, Y) = 0$  на границе источника энергии и полости,

$$\Theta(X, Y) = 1 \text{ в нагревателе;}$$

$$\Theta(0, Y) = \Theta(1, Y) = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 0) = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 1) = 0.$$

Результаты и обсуждения. Численное исследование сопряженной термогравитационной конвекции в замкнутой полости с локальным источником энергии квадратной и треугольной формы было проведено при следующих значениях определяющих параметров:  $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ ,  $Pr = 0.7$ . Были исследованы два материала теплопроводной подложки, а именно текстолит с коэффициентом теплопроводности  $k = 18.2$ , и сталь с коэффициентом теплопроводности  $k = 631.8$ . Рассматриваемый временной интервал  $0 \leq \tau \leq 100$ . Высота подложки была равна  $h_1/L = 0.1$ , высота источника энергии  $h_2/L = 0.2$ . Размеры нагревателей были выбраны таким образом, чтобы их площади были одинаковыми:  $S_{\text{triangle}} = S_{\text{rectangle}}$  ( $l/L = 0.4$  для треугольного источника тепловыделения,  $l/L = 0.2$  для прямоугольного).

На рисунке 26 показаны поля температуры для различных значений коэффициента теплопроводности и числа Рэлея в случае квадратного нагревателя. При  $k = 18,2$  (текстолитовый материал для нижней стенки) и  $Ra = 10^4$  преобладает кондуктивный режим теплопередачи. В результате воздушная область и теплопроводящая стенка нагреваются вблизи источника энергии. С увеличением числа Рэлея наблюдается переход от кондуктивного режима к конвективному, и фронт холодного воздуха вплотную подходит к боковым стенкам источника энергии. Сгущение изотерм вблизи вертикальных стенок квадратного источника характеризует развитие тепловых пограничных слоев. В случае  $k = 631,8$  (стальная подложка), из-за высокой теплопроводности материала подложки, с увеличением числа Рэлея повышаются температуры как внутри полости, так и внутри теплоотводящей стенки. При  $Ra = 10^6$  нагретая часть воздуха смещается вверх от источника, и холодный фронт воздуха максимально сближается с боковыми стенками.

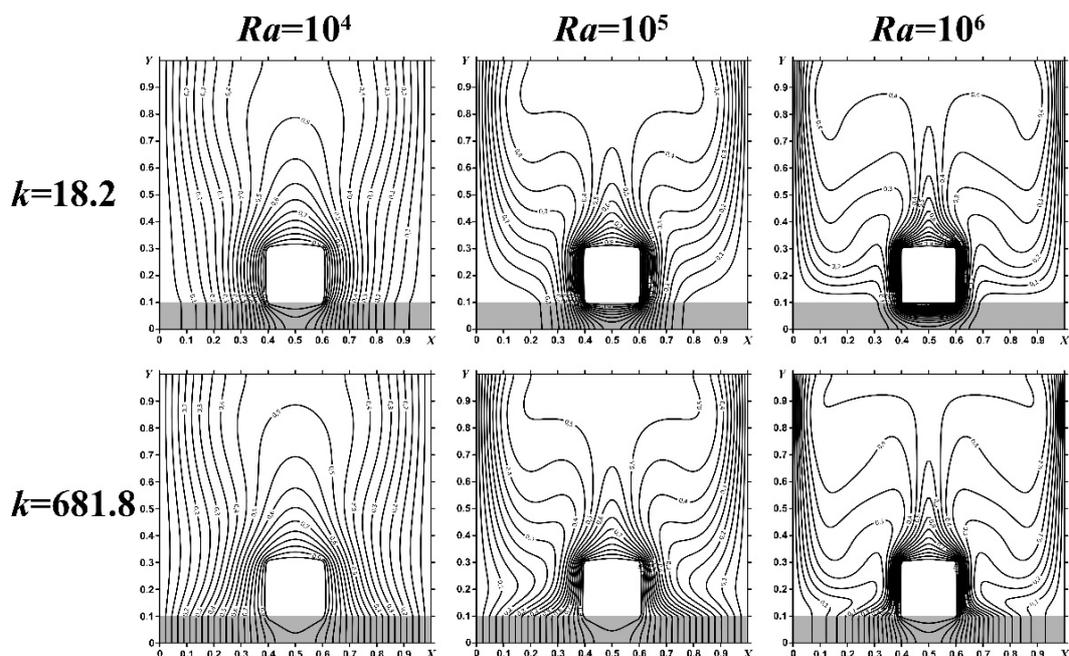


Рисунок 26 – Поля температур для различных значений  $k$  и  $Ra$

На рисунке 27 показано распределение температур в случае треугольного нагревателя. Как уже было сказано, по мере увеличения числа Рэлея происходит переход от доминирующего кондуктивного режима к режиму конвективного теплообмена. В случае  $k = 631,8$  (стальная нижняя стенка) из-за большой длины основания треугольного нагревателя теплопроводная подложка значительно нагревается. В результате повышается температура в полости и в подложке. Кроме того, можно отметить, что средняя температура в нижней стенке при  $Ra = 10^4$  и  $\tau = 100$  имеет максимальное значение для треугольного источника, независимо от материала подложки. С увеличением числа Рэлея средняя температура в полости имеет максимальное значение в случае треугольного нагревателя по сравнению с квадратным.

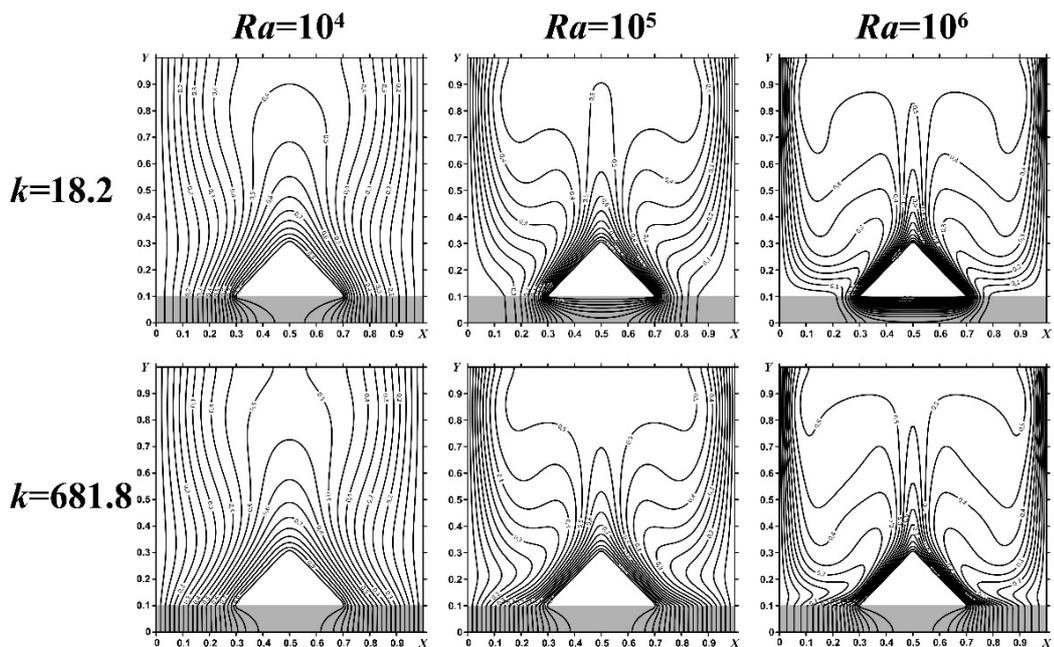


Рисунок 27 – Поля температур для различных значений  $k$  и  $Ra$

На рисунке 28 показаны средние числа Нуссельта на поверхности нагревателя для различных материалов подложки в зависимости от формы источника и числа Рэлея. Самые высокие значения наблюдались в случае квадратного источника энергии, независимо от материала теплоотводящей стенки. Теплообмен на поверхности квадратного источника энергии наиболее эффективен вследствие более активного взаимодействия холодного воздуха, поступающего от охлаждающих стенок, с нагревательным элементом.

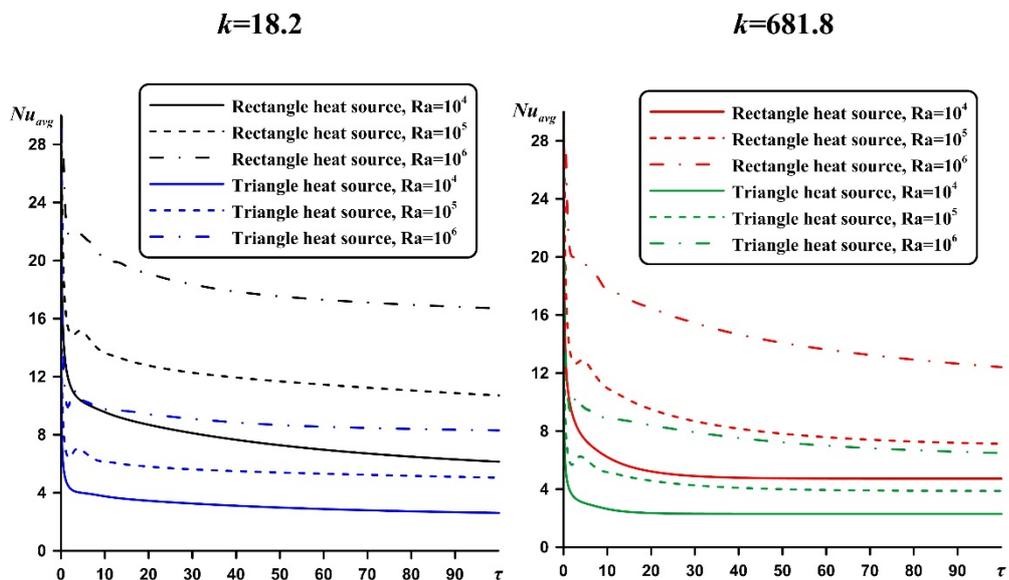


Рисунок 28 – Зависимости средних чисел Нуссельта на поверхности нагревателя от времени для различных значений  $k$  и  $Ra$  в случае треугольного и прямоугольного нагревателя

На рисунке 29 показаны средние числа Нуссельта на охлаждающей вертикальной стенке полости. В этом случае максимальное значение числа Нуссельта наблюдается для треугольной формы нагревателя из-за большой разницы температур стенки и среды в полости.

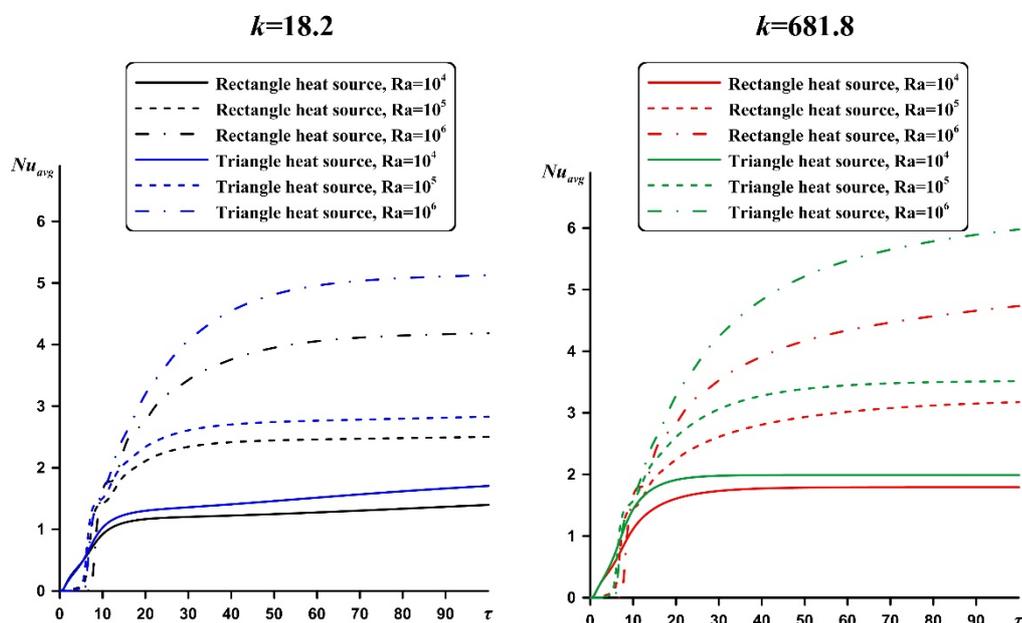


Рисунок 29 – Зависимости средних чисел Нуссельта на боковой стенке области от времени для различных значений  $k$  и  $Ra$  в случае треугольного и прямоугольного нагревателя.

**Заключение.** Численно исследована сопряженная термогравитационная конвекция в замкнутой полости с локальными источниками энергии различной геометрической формы. В качестве численного метода был выбран решеточный метод Больцмана. Анализ был проведен для двух различных материалов подложки, а именно текстолита и стали. Было установлено, что форма локального источника энергии, материал подложки и число Рэлея оказывают существенное влияние на изменение температуры в полости. Увеличение площади основания прямоугольного источника энергии приводит к незначительным изменениям эффективности теплоотдачи с его поверхности. Для повышения эффективности системы пассивного охлаждения необходимо учитывать совместное влияние формы нагревателя, материала теплоотводящих стенок, а также перепады температур. Прямоугольный нагреватель соответствует высоким значениям средних чисел Нуссельта по сравнению с треугольной формой источника, поэтому прямоугольная форма более эффективна для реализации системы пассивного охлаждения. В то же время повышение теплопроводности материала подложки приводит к снижению эффективности теплоотдачи с поверхности нагревателя.

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.13] и были представлены на следующих конференциях:

1. XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия, 27-30 апреля 2021 г. – Н. С. Гибанов «Численное исследование сопряжённой естественной конвекции в замкнутых областях с локальными источниками энергии решёточным методом Больцмана» (секционный доклад), <http://conf-prfn.org/>.

2. Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики», приуроченная к 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко, Томск, Россия, 27 мая – 1 июня 2021 г. – Н. С. Гибанов «Численное моделирование сложного теплообмена в замкнутых областях решёточным методом Больцмана» (секционный доклад), <http://conf.math.tsu.ru>.

3. Всероссийская конференции с международным участием и элементами научной школы для молодых учёных «XXXVII Сибирский теплофизический семинар», посвящённая Году науки и технологий Российской Федерации и 60-летию первого полёта человека в Космос, г. Новосибирск, Россия, 14-16 сентября 2021 г. – Н. С. Гибанов «Численное исследование сложного теплообмена в замкнутой области с тепловыделяющими элементами квадратной формы» (секционный доклад), <http://www.itp.nsc.ru/conferences/sts37/index.html>.

## **2 Образовательная составляющая**

### **2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные центром**

Все запланированные на 2021 г. научные конференции и семинары проведены в срок, а число фактически проведенных мероприятий превысило число планируемых почти в 2 раза. Так было организовано три международных конференции совместно с университетами Индии, Китая и Южной Кореи, что позволило привлечь зарубежных ученых к участию в мероприятиях центра. На базе центра было проведено три всероссийских научных конференции, посвященных в том числе наиболее актуальным в последнее время вопросам: математическому моделированию в задачах медицины и параллельным и высокопроизводительным вычислениям. Кроме того, центр организовал секцию «Теория узлов» в рамках Конференции международных математических центров в Сириусе, Сочи, и выступил со-организатором «Большой математической мастерской» совместно с Международным математическим центром в Академгородке. На площадке НОМЦ были реализованы три научно-исследовательских проекта по фундаментальной и прикладной математике. Весной 2021 г. были проведены две традиционных студенческих и одна школьная конференции. Продолжил свою работу еженедельный научный семинар.

Перечень научных конференций, семинаров, мастер-классов, съездов, конгрессов и других аналогичных мероприятий, организованных центром:

1. Научный семинар для студентов, аспирантов и преподавателей «Математический коллоквиум», апрель-декабрь 2021 г. (Томский государственный университет, г. Томск, очно-дистанционный формат, 64 участника), <http://rnc.math.tsu.ru/category/events-ru/nauchnyj-seminar-matematicheskij-kollokvium/>

2. Региональная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики», 27 мая–1 июня 2021 г. (Томский государственный университет, г. Томск, очно-дистанционный формат, 55 участников), <http://conf.math.tsu.ru>

3. XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Секция «математика», 27–30 апреля 2021 г. (дистанционный формат, 44 участника), <http://conf-prfn.org>

4. Научная конференция «Математика в медицине», 26–30 мая 2021 г. (Томский государственный университет, Томский политехнический университет, г. Томск, очно-дистанционный формат, 68 участников), <http://mim.rnc.math.tsu.ru>

5. IV Международная конференция «Группы и квандлы в маломерной топологии», 4–8 июля 2021 г. (Томский государственный университет, г. Томск, очно-дистанционный формат, 31 участник), <http://gqlt.rmc.math.tsu.ru>

6. «Большая математическая мастерская», площадка Томского государственного университета, 12 июля – 21 августа 2021 г. (дистанционный формат, 45 участников), <https://bmm.mca.nsu.ru>

7. Онлайн конференция «Le конференция 2021», 18–26 сентября 2021 г. (дистанционный формат, 80 участников), <https://conf.lerna.pro>

8. X Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям, 5–7 октября 2021 г. (Томский государственный университет, г. Томск, очно-дистанционный формат, 64 участника), <http://conference.tsu.ru/pvv>

9. Вторая Российско-корейская конференция по теории узлов и приложениям, 29 ноября – 2 декабря 2021 г. (дистанционный формат, 40 участников), <https://www.korusknot.com>

10. Всероссийская научная конференция «Декабрьские чтения в Томске – 2021», 6–11 декабря 2021 г. (Томский государственный университет, г. Томск, очный формат, 54 участника), <http://dr.rmc.math.tsu.ru>

11. VIII Российско-китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам, 24–26 декабря 2021 г. (дистанционный формат, 24 участника), <http://labtd.nsu.ru/8RCCKT/>

Всего в научных мероприятиях центра приняло участие 295 российских и зарубежных ученых, 250 студентов и 21 аспирант.

## **2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и образовательными организациями**

Научные мероприятия центра успешно способствуют развитию научных связей между российскими и зарубежными специалистами в области фундаментальной и прикладной математики, обеспечивая единое научное пространство для обсуждения и решения актуальных проблем. Особое внимание при этом уделено повышению вовлеченности молодых математиков, аспирантов и студентов в проводимые центром исследования (п.2.1 текущего отчета).

Партнеры центра в проведении научных мероприятий в 2021 г.:

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Институт прикладной математики ДВО РАН

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Международный математический центр в Академгородке (г. Новосибирск)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Московский физико-технический институт  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Российско-французский Междисциплинарный научный центр Понселе  
Челябинский государственный университет  
Beijing Normal University (Китай)  
Dalian University of Technology (Китай)  
Indian Institute Science Education and Research, Mohali (Индия)  
Indian Institute Science Education and Research, Pune (Индия)  
Indian Institute of Technology, Ropar (Индия)  
Kyungpook National University (Республика Корея)  
Peking University (Китай)  
Pusan National University (Республика Корея)  
Soochow University (Китай)

В рамках программы развития для работы в центре привлекаются ведущие ученые.

В 2021 г. к научному коллективу центра присоединились следующие новые сотрудники:

- Бардаков Валерий Георгиевич, д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории обратных задач математической физики Института математики СО РАН.
- Бубенчиков Михаил Алексеевич, д.ф.-м.н., ведущий специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром трансгаз Томск».

Также к работе в центре привлекаются молодые иностранные ученые. В 2021 г. принят на работу младшим научным сотрудником гражданин Вьетнама Вьонг Хью Бао (защита кандидаткой диссертации в 2022 г.). Также в должности младшего научного сотрудника с 2020 г. работает гражданин Казахстана Д.В. Лещинский. В рамках Большой математической мастерской по договору гражданско-правового характера был принят на работу гражданин Казахстана Б. Чужинов.

### **2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром**

С 2018 г. сотрудниками центра были разработаны и модернизированы 15 учебных курсов и модулей основных образовательных программ (ООП) бакалавриата и магистратуры механико-математического факультета (ММФ) ТГУ с учетом ФГОС 3++. Все

курсы реализуются в рамках учебных планов сотрудниками ММФ ТГУ, из них 6 – в отчетный период ведутся непосредственно сотрудниками центра: Основы информационной безопасности, Введение в методы параллельных вычислений, Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, Учебно-вычислительная практика, Молекулярная физика и математические модели наномеханики, Основы LaTeX.

#### **2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра**

В 2021 г. проведены две студенческие конференции: Региональная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики» и Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Участники — студенты, магистранты и аспиранты вузов Сибирского региона. Также традиционным стало участие студентов в качестве слушателей еженедельного научного семинара «Математический коллоквиум» и научных конференций, проводимых центром. Число проведенных мероприятий и принявших в них участие студентов полностью соответствуют запланированным показателям.

#### **2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре**

Под научным руководством ведущих научных сотрудников НОМЦ ведется научно-исследовательская работа аспирантов, магистрантов и бакалавров ММФ ТГУ. В 2021 г. состоялись защиты 6 выпускных квалификационных работ бакалавра, 7 магистерских диссертаций.

В ноябре 2021 г. состоялась защита диссертации младшего научного сотрудника центра Н.С. Гибанова на тему: «Нестационарные режимы сопряжённого конвективного теплопереноса в замкнутых областях с локальными источниками энергии различной формы», 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы. Также в отчетный период к работе группы под руководством профессора А.М. Бубенчикова по допсоглашению к трудовому договору № 706/18 с ТГУ была привлечена К.Г. Перфильева, которая успешно защитила кандидатскую диссертацию «Формирование, динамика и испарение кластера частиц дисперсной фазы в поле силы тяжести» по той же специальности в декабре 2021 г.

## **2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром**

В 2021 г. на базе центра было реализовано два курса повышения квалификации: «Индустриальная математика: моделирование задач гидродинамики в газотранспортных системах» и «Актуальные проблемы математики: Декабрьские чтения в Томске».

Первый курс предназначен для исследователей, связанных с работой промышленных предприятий, в целях их обучения применению теории и технологий математического и компьютерного моделирования к решению производственных задач современной нефтегазовой индустрии в условиях отсутствия у ее персонала профильного математического образования. Данную программу прошли 29 исследователей.

Второй курс проводился в формате Школы-конференции, предполагающей очную стадию интенсивного погружения в основные области фундаментальной математики, а также период свободного посещения по собственному выбору обучающегося серии лекций от приглашенных ученых математиков, которые представляют ведущие математические организации России. Слушателями данного курса стали 15 молодых ученых Томского госуниверситета.

Также начата разработка курса повышения квалификации «Современные методы и приёмы преподавания математики и развития математических способностей обучающихся», предназначенного для педагогического состава общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий) и учреждений дополнительного образования. Реализация курса планируется в 2022–2023 учебном году.

## **2.7 Вовлечение студентов, магистрантов, аспирантов и исследователей центра к мероприятиям, проводимым другими научными и образовательными организациями, в том числе повышение квалификации сотрудников центра**

НОМЦ ТГУ направляет сотрудников, а также студентов, магистрантов и аспирантов для участия в мероприятиях, проводимых другими научными и образовательными организациями по всем направлениям исследований центра. В 2021 г. сотрудники центра сделали более 30 приглашенных докладов на научных конференциях и семинарах.

НОМЦ ТГУ с привлечением студентов ТГУ выступил одной из площадок в совместном мероприятии «Большая математическая мастерская» в период с 12 июля по 21 августа 2021 г. В рамках мастерской, на площадке НОМЦ ТГУ велась работа 3 проектов, объединивших 45 участников. По каждому проекту проведены два недельных интенсива,

когда команды студентов под руководством ведущих ученых решали настоящие исследовательские задачи. По результатам работы мастерской готовятся научные статьи.

## **2.8 Вовлечение школьников в мероприятия центра**

В 2021 г. в соответствии с программой развития центром были проведены 8 мероприятий с привлечением школьников и учителей:

1. XIV Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск (турнир проходил в очном формате в несколько этапов, 220 участников – 180 школьников, 30 учителей, 10 преподавателей вузов Томска).

2. Международный день числа Пи, 14 марта 2021 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 86 участников – 78 школьников 9-11 классов Томской области, 8 преподавателей).

3. XXXII региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 8 апреля 2021 г. (конференция прошла в дистанционном формате, 54 участника – школьники, учителя, преподаватели вузов).

4. Круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», 21 мая – 7 июня 2021 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 69 участников – школьников Томской области).

5. Олимпиада «Пять с плюсом» для учащихся пятых классов, 26 марта 2021 г. (олимпиада проводилась в дистанционном формате, 457 школьников 5 классов Томской области, 8 преподавателей).

6. Школьная командная олимпиада «Математическая абака», 2 апреля 2021 г. (олимпиада проводилась в дистанционном формате, 450 участников: 360 школьников 5–7 классов, 90 учителей).

7. Школа-тренинг НОМЦ ТГУ «Решение олимпиадных задач по информатике» (занятия проводятся в очном формате еженедельно с марта 2021 г. для 2 групп, 37 участников – 34 школьника 7–11 классов г. Томска, 3 преподавателя).

8. Школа-тренинг НОМЦ ТГУ «Решение олимпиадных задач по математике» (занятия проводятся в очном формате еженедельно с марта 2021 г. для 12 участников – школьники 7–11 классов г. Томска).

Также центр проводит еженедельный семинар для учителей и педагогов, на котором обсуждается методика преподавания математики в школах, проводится обмен опытом проведения занятий с математически одаренными школьниками.

Цель указанных мероприятий – поднять интерес к изучению математики и информатики у школьников, предоставить им площадку для обсуждения задач и

расширения познаний в этих областях, повысить уровень олимпиадной подготовки и подготовки к ЕГЭ.

В обстоятельствах вынужденного изменения формата проведения некоторых олимпиад с очного на дистанционный значительно выросло число школьников, принявших в них участие. Всего в мероприятиях центра за отчетный период приняло участие 1232 школьника и 161 преподаватель и учитель математики и информатики.

Перечень школьников, принявших участие в мероприятиях центра и ставших победителями и призерами Всероссийской олимпиады школьников по математике и информатике или олимпиад РСОШ по математике или информатике 1 и 2 уровня:

1. Лучкин Вячеслав Александрович, МАОУ Лицей № 8 г. Томска, 10 класс.
2. Хоцков Алесандр Александрович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс.
3. Вежнин Егор Дмитриевич, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс.
4. Плющанский Иван Маркович, МБОУ "Северская гимназия", 11 класс.
5. Чаленко Андрей Сергеевич, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс.
6. Авдоченко Ангелина Дмитриевна, МБОУ "Северская гимназия", 11 класс.
7. Киреев Сергей Александрович, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 11 класс.
8. Забейворота Кирилл Владимирович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс.
9. Карташов Даниил Олегович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс.
10. Слободянюк Михаил Юрьевич, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс.
11. Казаков Никита Иванович МАОУ СОШ № 41 г. Томска, 10 класс Региональный этап ВсОШ по математике призер
12. Зюбин Константин Сергеевич, МАОУ СОШ № 32 г. Томска, 9 класс.
13. Агафонов Артём Александрович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс.
14. Русанова Маргарита Игоревна, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс.
15. Зиновьев Алексей Игоревич, МАОУ Лицей № 8 г. Томска, 9 класс.
16. Бородатов Егор Олегович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 9 класс.
17. Шаманаев Александр Сергеевич, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс.
18. Золин Никита Андреевич, СУНЦ МГУ, 11 класс.

19. Хамматов Никита Антонович, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс.

20. Шиптенко Владислав Двигриевич, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", 10 класс.

### **2.9 Дополнительная информация о деятельности центра**

По данным QS World University Rankings by Subject 2021 Томский государственный университет впервые вошел в рейтинг по математике (группа 401-450), в достижении этого результата важную роль сыграл РНОМЦ ТГУ. Благодаря работе центра с 2018 года по настоящее время, на механико-математическом факультете ТГУ увеличилось количество публикуемых статей и привлеченных грантов. Благодаря многочисленным конференциям и визитам в Томск ведущих российских и зарубежных математиков, увеличился авторитет томской математики в академическом сообществе.

На конкурсной основе НОМЦ ТГУ получил гранты и финансовую поддержку на проведение двух сателлитных конференций к Международному конгрессу математиков, который пройдет в Санкт-Петербурге в 2022 году.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все работы, запланированные на отчетный период проекта, успешно выполнены. Все ожидаемые к концу 2021 года результаты получены.

Результаты прошли апробацию на международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Участниками проекта сделано 37 докладов по тематике выполненных работ. Результаты работы по проекту опубликованы сотрудниками НОМЦ в 21 статье в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus с указанием авторов на поддержку НОМЦ (статьи [A.1]–[A.21]). В том числе: 11 статей опубликованы в журналах, входящих в первый и второй квартиль (Q1, Q2) базы данных Web of Science, Scopus (работы [A.1, A.3], [A.7]–[A.10], [A.14]–[A.17], [A.19]). 18 статей подготовлены с участием молодых исследователей НОМЦ (работы [A.1, A.2, A.7, A.8, A.10], [A.12]–[A.19], [A.22]–[A.26]).

Под руководством научных сотрудников НОМЦ подготовлены и защищены в 2021 году 7 магистерских диссертаций и 6 выпускных квалификационных работ бакалавра студентов ММФ ТГУ. В ноябре 2021 г. состоялась защита диссертации младшего научного сотрудника центра Н.С. Гибанова. Также в отчетный период к работе группы под руководством профессора А.М. Бубенчикова по допсоглашению к трудовому договору № 706/18 с ТГУ была привлечена К.Г. Перфильева, которая успешно защитила кандидатскую диссертацию в декабре 2021 г.

На базе или при сотрудничестве НОМЦ в отчетный период было организовано более 30 научных семинаров. Лекции проходили в рамках, организованного НОМЦ «Математического коллоквиума». Кроме того, в форме открытых лекций проходили пленарные доклады на научных конференциях, организованных НОМЦ. Были проведены 11 научных мероприятий и 8 школьных. Из них 3 международных, 3 всероссийские, 2 студенческие и 1 школьная конференции. Реализовано два курса повышения квалификации: «Индустриальная математика: моделирование задач гидродинамики в газотранспортных системах» и «Актуальные проблемы математики: Декабрьские чтения в Томске».

Сотрудники НОМЦ продолжают вести работу по 6 научным грантам, которые были получены в 2019 г. на конкурсной основе. Также в 2021 г. на базе центра начал реализацию новый проект РНФ на тему: «Математическое моделирование статистической механики взаимодействующих закрученных частиц и ее приложения».

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://rnc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

Отчет о работе Центра был заслушан и одобрен на заседании Ученого совета механико-математического факультета Томского государственного университета 23.12.2021 г.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // *Мат. заметки.* – 1972. – Т. 11, № 4. – С. 403–408.
- 2 Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // *Абелевы группы и модули.* – 1991. – С. 125–134.
- 3 Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород: 2014. – 73 с.
- 4 Cohn P. M. On the structure of the  $GL_2$  of a ring // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* – 1966. – Vol. 30. – P. 5–53.
- 5 Вильданов В. К. Об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 ее группой автоморфизмов / В. К. Вильданов, В. А. Гайдак, Е. А. Тимошенко // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* – 2020. – № 68. – С. 23–32.
- 6 Riley R. Discrete parabolic representations of knot groups // *Mathematika.* – 1975. – Vol. 22. – P. 141–150.
- 7 Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds / W.P. Thurston – Princeton lecture notes, 1980.
- 8 Riley R. A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements // *Expositiones Mathematicae*, 31:2 – 2013. – P. 104–115.
- 9 Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // *Bull. Amer. Math. Soc. (NS).* – 1982. – Vol. 6. – P. 357–381.
- 10 Hoste J. The first 1,701,936 knots / J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks // *The Mathematical Intelligencer.* – 1998. – Vol. 20. – P. 33–48.
- 11 Mostow G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces / G.D. Mostow – *Annals of mathematics studies*, 78, Princeton University Press, 1973.
- 12 Prasad G. Strong rigidity of  $Q$ -rank 1 lattices // *Inventiones Mathematicae.* – 1975. – Vol. 21, № 4. – P. 255–286.
- 13 Kojima S. Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds // *J. Differential Geom.* – 1998. – Vol. 49, № 3. – P. 469–516.
- 14 Agol I. The minimal volume orientable hyperbolic 2-cusped 3-manifolds // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2010. – Vol. 138. – P. 3723–3732.

- 15 Abrosimov N. The volume of a compact hyperbolic antiprism / N. Abrosimov, B. Vuong // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. – 2018. – Vol. 27, № 13. – Article no. 1842010.
- 16 Vesnin A. Yu. Hyperbolic volumes of Fibonacci manifolds / A. Yu. Vesnin, A. D. Mednykh // *Siberian Mathematical Journal*. – 1995. – Vol. 36, № 2. – P. 235–245.
- 17 Vesnin A. Yu. On Volumes of Some Hyperbolic 3-Manifolds. – *Lecture Notes Series*. – 1996. – Vol. 30.
- 18 Колесников И. А. Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца // *Сиб. матем. журн.* – 2021. – Т. 62, №4. – С. 784–802.
- 19 Александров И. А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // *Известия вузов. Матем.* – 1999. – № 6(445). – С. 15–18.
- 20 Floryan J. M. Schwarz–Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary // *J. Comput. and Applied Math.* – 1993. – №46. – P. 77–102.
- 21 Hussenpflug W. S. Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation // *Computers Math. Applic.* – 1997. – V. 33. No. 12. – P. 15–114.
- 22 Bergman G. M. Some examples in PI ring theory // *Israel Journal of Mathematics*. – 1974. – Vol. 18. – P. 257–277.
- 23 Krylov P. Formal matrices / P. Krylov, A. Tuganbaev // *Algebra and Applications*. – 2017. – Vol. 23.
- 24 Степанова А. Ю. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов / А. Ю. Степанова, Е. А. Тимошенко // *Вестник ТГУ. Математика и механика*. – 2021. – №6 (74). – С. 30–43.
- 25 Применение методов термографии для оценки масштабов турбулентности в пламени / Е. Л. Лобода, О. В. Матвиенко, М. В. Агафонцев, В. В. Рейно // *Оптика атмосферы и океана*. – 2018. – Т. 31, № 12. – С. 1001–1006.
- 26 О влиянии звуковых волн на процессы горения / А. В. Ильюшонок, И. А. Гончаренко, Н. С. Лешенюк [и др.] // *Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси*. – 2017. – Т. 1, № 1. – С. 26–34.
- 27 Кривокорытов М. С. Влияние акустических колебаний на диффузионное горение метана / М. С. Кривокорытов, В. В. Голуб, В. В. Володин // *Письма в Журнал технической физики*. – 2011. – № 38 (10). – С. 57–63.
- 28 Воздействие акустического поля на развитие пламени и переход в детонацию / В. В. Голуб, Д. И. Бакланов, С. В. Головастов [и др.] // *ТВТ*. – 2010. – Т. 6, № 48. – С. 901–907.

29 Влияние отраженных акустических возмущений на ускорение фронта пламени / В. В. Володин, А. Е. Коробов, С. В. Головастов, В. В. Голуб // Письма в журнал технической физики. – 2015. – Т. 41, № 21. – С. 60–65.

30 Влияние акустических волн на зону воспламенения и переход горения в детонацию: эксперимент и расчет / В. В. Голуб, М. Ф. Иванов, В. В. Володин [и др.] // ТВТ. – 2009. – Т. 2, № 47. – С. 315–316.

31 Модель вихревых возмущений волны горения / Ю. В. Полежаев, О. Г. Стоник, В. Д. Гешеле, С. А. Ковалев // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского. 2019. – Москва, 2019. – С. 206–210.

32 Влияние акустических колебаний на диффузионное горение пропана в микроструях / Ю. А. Литвиненко, В. В. Козлов, Г. Р. Грек [и др.] // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2013. – Т. 12, № 1. – С. 36–41.

33 Chakravarthy S. R. Dynamics and diagnostics of flame-acoustic interactions / S. R. Chakravarthy, R. Sampath, V. Ramanan // Combustion science and technology. – 2017. – Vol. 189, № 3. – P. 395–437. – DOI: 10.1080/00102202.2016.1202938.

34 Влияние акустических колебаний на круглые струи, сформированные в криволинейном канале / М. В. Литвиненко, Ю. А. Литвиненко, В. В. Вихорев, В. В. Козлов // Вестник новосибирского государственного университета. Серия: физика. – 2015. – Т. 10, № 2. – С. 67–72.

35 Fan S. A review of two-phase submerged boiling in thermal management of electronic cooling / S. Fan, F. Duan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 150. – Article number: en119324.

36 Masip Y. Experimental analysis of the thermal performance on electronic cooling by a combination of cross-flow and an impinging air jet / Y. Masip, A. Campo, S.M. Nuñez // Applied Thermal Engineering. – 2020. – Vol. 167. – Article number: en114779.

37 Tang H. Review of applications and developments of ultra-thin micro heat pipes for electronic cooling / H. Tang, Y. Tang, Z. Wan [et al.] // Applied Energy. – 2018. – Vol. 223. – P. 383–400.

38 Colangelo G. Cooling of electronic devices: Nanofluids contribution / G. Colangelo, E. Favale, M. Milanese [et al.] // Applied Thermal Engineering. – 2017. – Vol. 127. – P. 421–435.

39 Thermoelectric cooling technology applied in the field of electronic devices: Updated review on the parametric investigations and model developments / Y. Cai, Y. Wang, D. Liu, F.-Y. Zhao // Applied Thermal Engineering. – 2019. – Vol. 148. – P. 238–255.

- 40 Set-theoretic solutions to  $n$ -simplex equations / V. Bardakov, B. Chuzinov, I. Emel'yanenkov (in progress).
- 41 Bardakov V. G. On residually nilpotence of group extensions / V. G. Bardakov, O. V. Bryukhanov, M. V. Neshchadim // *Inter. J. Algebra and Comput.* (submitted).
- 42 Bardakov V. G. Multi-switches and virtual knot invariants / V. G. Bardakov, T. R. Nasybullov // *Topology Appl.* – 2021. – Vol. 293. – Article number 107552.
- 43 Bardakov V. G. On  $\lambda$ -homomorphic skew braces / V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, M. Yadav // *J. Pure and Appl. Algebra* (submitted).
- 44 Zero divisors in quandle rings / V. G. Bardakov, M. Singh, B. Passi // *Osaka Journal of Mathematics* (submitted).
- 45 Rota-Baxter operators on groups / V. G. Bardakov, V. Yu. Gubarev // *Journal of Group Theory* (submitted).
- 46 Rota-Baxter groups, skew left braces, and the Yang-Baxter equation / V. G. Bardakov, V. Yu. Gubarev // *J. Algebra* (submitted).
- 47 On homotopy braids / V. G. Bardakov, V. V. Vershinin, J. Wu // *Forum Mathematicum* (submitted).
- 48 Representations of flat virtual braids which do not preserve the forbidden relations / V. Bardakov, B. Chuzhinov, I. Emel'yanenkov [et al.] // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* (submitted).
- 49 Virtual and universal braid groups, their quotients and representations / V. Bardakov, I. Emel'yanenkov, M. Ivanov [et al.] // *Journal of Group Theory* (submitted).
- 50 Старченко А. В. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах / А. В. Старченко, Р. Б. Нутерман, Е. А. Данилкин. – Томск : Изд. дом Томского гос. ун-та, 2015. – 252 с.
- 51 Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme: II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *Journal of Computational Physics.* – 1974. – Vol. 14. – P. 361–370.
- 52 Ландсберг Г. Е. Климат города. – Л.: Гидрометеиздат, 1983. – 248 с.
- 53 Дудорова Н. В. Оценка факторов, определяющих формирование городского острова тепла в г. Томске / Н. В. Дудорова, Б. Д. Белан // *Оптика атмосферы и океана.* – 2016. – Т. 29, № 5. – С. 426–436.
- 54 ARW Version 4 Modeling System User's Guide // NCAR. – URL: [https://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user\\_guide\\_v4/v4.2/WRFUsersGuide\\_v42.pdf](https://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user_guide_v4/v4.2/WRFUsersGuide_v42.pdf) (дата обращения 20.01.2022).

55 Сваровский А. И. Применение модели Weather Research and Forecasting для исследования явления «остров тепла» для условий города Томск // Перспективы развития фундаментальных наук : сборник трудов XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 27–30 апреля 2021 г.). В 7 томах. Том 3. Математика / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021. – С. 76–78.

56 Афанасьева А. А. Численное решение задачи электроимпедансной томографии / А. А. Афанасьева, А. В. Старченко // Все грани математики и механики : сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции студентов, Томск, 27 мая–1 июня 2021 г. Томск: Изд-во НТЛ, 2021. – С. 17–29.

57 Дель И.В., Старченко А.В. Прогноз приземной температуры воздуха на основе модели рекуррентной нейронной сети типа LSTM // Десятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: сборник статей, Томск, 5–7 октября 2021 г. Томск: Изд-во НТЛ, 2021. – С. 91–100.

58 Diederik P. Kingma. A Method for stochastic optimization / Diederik P. Kingma, Jimmy Ba. Adam. – URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980> (дата обращения 12.12.2021).

59 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. / Л. Фукс. – М.: Мир, 1977. – 415 с.

60 Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 3(1). – С. 174–177.

61 Vildanov V. K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). – 2014. – V. 197, No. 5. – P. 590–594.

62 Leptin H. Abelsche p-gruppen und ihre Automorphismengruppen // Math. Z. – 1960. – Vol. 73. – P. 235–253.

63 Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups // Abelian Group Theory. Proceedings of the 1985 Oberwolfach Conference, Gordon and Breach. – 1987. – P. 9–31.

64 Fuchs L. Abelian groups / L. Fuchs. – Cham: Springer, 2015. – 747 p.

65 Крылов П. А. Кольца формальных матриц и модули над ними / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2017. – 192 с.

66 Riley R. Discrete parabolic representations of knot groups // Mathematika. – 1975. – Vol. 22. – P. 141–150.

67 Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds / W.P. Thurston – Princeton lecture notes, 1980.

- 68 Riley R. A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements // *Expositiones Mathematicae*,– 2013. – Vol. 31, № 2. – P. 104–115.
- 69 Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*. – 1982. – Vol. 6. – P. 357–381.
- 70 Hoste J. The first 1,701,936 knots / J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks // *The Mathematical Intelligencer*. – 1998. – Vol. 20. – P. 33–48.
- 71 Mostow G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces // *Annals of mathematics studies*, Vol. 78. – Princeton University Press, 1973.
- 72 Prasad G. Strong rigidity of Q-rank 1 lattices // *Inventiones Mathematicae*. – 1975. – Vol. 21, № 4. – P. 255–286.
- 73 Kojima S. Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds // *J. Differential Geom.* – 1998. – Vol. 49, № 3. – P. 469–516.
- 74 Agol I. The minimal volume orientable hyperbolic 2-cusped 3-manifolds // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2010. – Vol. 138. – P. 3723–3732.
- 75 Abrosimov N. The volume of a compact hyperbolic antiprism / N. Abrosimov, B. Vuong // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. – 2018. – Vol. 27, № 13. – Article no. 1842010.
- 76 Vesnin A. Yu. Hyperbolic volumes of Fibonacci manifolds / A. Yu. Vesnin, A. D. Mednykh // *Siberian Mathematical Journal*. – 1995. – Vol. 36, № 2. – P. 235–245.
- 77 Vesnin A. Yu. On Volumes of Some Hyperbolic 3-Manifolds // *Lecture Notes Series*, Vol. 30. – Seoul National University, 1996. – 132 p.
- 78 Gonzalez-Acuña F. On the character variety of group representations in  $SL(2, \mathbb{C})$  and  $PSL(2, \mathbb{C})$  / F. Gonzalez-Acuña, J. M. Montesinos-Amilibia // *Math. Z.* – 1993. – Vol. 214. – P. 627–652.
- 79 Суворов Д. В. Механизмы воздействия электромагнитной энергии на пламя / Д. В. Суворов, М. А. Кочева // *Современные наукоемкие технологии*. – 2014. – № 5(1). – С. 182–184.
- 80 Дубовицкий А. Н. Экспериментальное исследование низкочастотных режимов неустойчивого горения бедных метановоздушных смесей в малоэмиссионных камерах сгорания без закрутки течения / А. Н. Дубовицкий, А. Б. Лебедев, Е. Д. Свердлов // *Горение и взрыв*. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 51–59.
- 81 Семенова Е. В. Акустическая модель колебаний газа при горении в коаксиальных трубах / Е. В. Семенова, В. М. Ларионов, Е. И. Казакова // *Низкотемпературная плазма в процессах нанесения функциональных покрытий*. – 2015. – Т. 1, № 6. – С. 96–100.

- 82 Арефьев К. Ю. Определение акустических характеристик проточного тракта переменного сечения лабораторной установки / К. Ю. Арефьев, М. А. Ильченко // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. – № 9 (702). – С. 74–81. – DOI: 10.18698/0536-1044-2018-9-74-81.
- 83 ANSYS Fluent User's Guide, Release 15.0. – Canonsburg, 2013. – URL:<http://www.pmt.usp.br/academic/martoran/notasmodelosgrad/ANSYS%20Fluent%20Users%20Guide.pdf> (дата обращения 30.12.2021)
- 84 Effects of pressure pulsations on liquid fuel combustion characteristics / M. V. Agafontsev, A. S. Klimentiev, E. L. Loboda [et al.] // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. – 2020. – Vol. 11560. – Article number: 1156018. – DOI: 10.1117/12.2575007.
- 85 Agafontsev M. V. Effect of low-frequency vibrations on the characteristics of the diffusion flame / M. V. Agafontsev, E. L. Loboda, V. V. Reyno // Journal of Physics: Conference Series (under review).
- 86 Artin E. Theory of braids. // Annals of Mathematics. – 1947. – Vol.48, №1. – P. 101–126.
- 87 Марков А. А. Основы алгебраической теории кос. – Л.; М. : изд-во АН СССР, 1945. – 54 с. – (Тр. / Математич. ин-т им. В. А. Стеклова. – Т. 16).
- 88 Baez J. Link invariants of finite type and perturbation theory // Letters in Mathematical Physics. – 1992. – Vol. 26, № 1. – P. 43–51.
- 89 Birman J. S. New points of view in knot theory // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1993. – Vol. 28, № 2. – P. 253–287.
- 90 Fenn R. The singular braid monoid embeds in a group / R. Fenn, E. Keyman, C. Rourke. – Brighton: Univ. of Sussex, 1996. – URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=0F95FF45F71AD06B76AAE71F836FCA80?doi=10.1.1.221.5446&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения: 28.12.2021).
- 91 Chow W.-L. On the algebraic braid group // Annals of Mathematics Second Series. – 1948. – Vol. 49, № 3. – P. 654–658.
- 92 Vershinin V. V. On the singular braid monoid // Algebra i Analiz. – 2009. – Vol. 21, is. 5. – P. 19–36.
- 93 Neshchadim M. V. Inner automorphisms and some their generalizations // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. – 2016. – Vol. 13. – P. 1383–1400.
- 94 Neshchadim M. V. Normal automorphisms of braid groups. Preprint no. 4. – Novosibirsk : Institute of mathematics SB RAN, 1993.

95 Bardakov V. G. On 3-strand singular pure braid group / V. G. Bardakov, T. A. Kozlovskaya // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. – 2020. – Vol. 29, № 10. – Article number 2042001. – DOI: 10.1142/S0218216520420018.

96 Magnus W. Combinatorial group theory, presentations of groups in terms of generators and relations / W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar. – New York-London-Sydney : Interscience publishers, 1966. – 444 p.

97 Bardakov V. G. Lifting theorem for the virtual pure braid groups / V. G. Bardakov, J. Wu – URL: <https://arxiv.org/abs/2002.08686> (дата обращения 30.12.2021).

98 Driscoll T. A. Schwarz-Christoffel mapping. Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. / T. A. Driscoll, L. N. Trefethen – Cambridge : Cambridge University Press., 2002.

99 Копанев С. А. Формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для счетноугольника / С. А. Копанев, Л. С. Копанева // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2003. – № 280. – С. 52–54.

100 Колесников И. А. Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией / И. А. Колесников, Л. С. Копанева // *Известия вузов. Математика*. – 2014. – № 12. – С. 37–47.

101 Колесников И. А. Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2013. – № 2(22). – С. 33–43.

102 Александров И. А. Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса / И. А. Александров, Л. С. Копанева // *Вестник Томского государственного университета*. – 2004. – № 284. – С. 5–7.

103 Колесников И. А. Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2014. – № 2(28). – С. 18–28.

104 Колесников И. А. Определение акцессорных параметров конформных отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией и круговые счетноугольники // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2019. – № 60. – С. 42–60.

105 Neviere M. Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating / M. Neviere, M. Cadilhac, R. Petit // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1973. – Vol. 21, №1. – P. 37–46.

106 Tsarin Yu. A. Conformal mapping technique in the theory of periodic structures // *Microwave and Optical Technology Letters*. – 2000. – Vol. 26, № 1. – P. 57–61.

- 107 Analytical and numerical techniques for solving Laplace and Poisson equations in a tubular permanent magnet actuator: Part II. Schwarz–Christoffel Mapping / B. L. J. Gysen, E. A. Lomonova, J. J. H. Paulides, A. J. A. Vandenput // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 2008. – Vol. 44, № 7. – P. 1761–1767.
- 108 Leontiou T. Optimum isothermal surfaces that maximize heat transfer / T. Leontiou, M. Kotsonis, M. M. Fyrillas // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2013. – Vol. 63. – P. 13–19.
- 109 Aouiche A. Fuzzy neuroconformal analysis of multilayer elliptical cylindrical and asymmetrical coplanar striplines / A. Aouiche, A. Djellid, F. Bouttout // *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)*. – 2015. – Vol. 69. – P. 1151–1166.
- 110 Awbi H. B. Natural convection from heated room surfaces / H. B. Awbi, A. Hatton // *Energy and Buildings*. – 1999. – Vol. 30. – P. 233–244.
- 111 Manz H. Numerical simulation of heat transfer by natural convection in cavities of facade elements // *Energy and Buildings*. – 2003. – Vol. 35. – P. 305–311.
- 112 Ben-Nakhi A. Conjugate turbulent natural convection in the roof enclosure of a heavy construction building during winter / A. Ben-Nakhi, M. A. Mahmoud // *Applied Thermal Engineering*. – 2008. – Vol. 28. – P. 1522–1535.
- 113 Miroshnichenko I. V. Simulation of thermal radiation and turbulent free convection in an enclosure with a glass wall and a local heater / I. V. Miroshnichenko, A. A. Toilibayev, M. A. Sheremet // *Fluids*. – 2021. – Vol. 6 (2). – Article number 91.
- 114 Miroshnichenko I. V. Numerical simulation of turbulent natural convection combined with surface thermal radiation in a square cavity / I. V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. – 2015. – Vol. 25. – P. 1600–1618.
- 115 Wolfson K. G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations // *Amer. J. Math.* – 1953. – Vol. 75, is. 2. – P. 358–386.
- 116 Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1954. – Vol. 5, is. 4. – P. 627–630.
- 117 Skornyakov L. Complemented modular lattices and regular rings / L. Skornyakov. – Oliver&Boyd, Edinburgh, 1963. – 182 p.
- 118 Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // *Алгебра и логика*. – 2008. – № 4 (47). – С. 456 – 463.
- 119 Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // *J. Algebra*. – 1974. – Vol. 31. – P. 182–193.
- 120 Vamos P. 2-good rings // *Quart. J. Math.* – 2005. – Vol. 56, is. 3. – P. 417–430.

- 121 Srivastava A. K. A survey of rings generated by units // *Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques*. – 2010. – Vol. 6, is. 19. – P. 203–213.
- 122 Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1977. – Vol. 229. – P. 269–278.
- 123 Xiao G.  $n$ -clean rings and weakly unit stable range rings / G. Xiao, W. Tong // *Communications in algebra*. – 2005. – Vol. 33. – P. 1501–1517.
- 124 Diesl A. J. Nil clean rings // *J. Algebra*. – 2013. – Vol. 383. – P. 197–211.
- 125 Calugareanu C. Fine rings: a new class of simple rings / C. Calugareanu, T. Y. Lam // *J. Algebra. Appl.* – 2016. – Vol. 15, № 9. – Article number 1650173.
- 126 Danchev P. Nil-good unital rings // *International Journal of Algebra*. – 2016. – Vol. 10. – P. 239–252.
- 127 Abdolyusefi M. S. On 2-nil-good rings / M. S. Abdolyusefi, N. Ashrafi, H. Chen // *J. Algebra Appl.* – 2018. – Vol. 17, № 6. – Article number 1850110.
- 128 Крылов П. А. Формальные матрицы и их определители / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2014. – № 1 (19). – С. 65–119.
- 129 Крылов П. А. Автоморфизмы алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // *Сиб. матем. журнал*. – 2018. – № 5 (59). – С. 1116–1127.
- 130 Крылов П. А. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2018. – № 3 (53). – С. 16–22.
- 131 Норбосамбуев Ц. Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2015. – № 4 (36). – С. 34–41.
- 132 Норбосамбуев Ц. Д. 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // *Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» (25-29 апреля 2016 г.)*. Сборник статей. – Томск : Изд. ТГУ, 2016. – С. 6–13.
- 133 Норбосамбуев Ц. Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2018. – № 2 (52). – С. 5–13.
- 134 Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect.* – 1958. – Vol. 6. – P. 83–142.
- 135 Shapiro J. Morita contexts / J. Shapiro, P. Loustaunau // *Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics*. – 1990. – Vol. 1448. – P. 80–92.

- 136 Climent J. J. On arithmetic of endomorphism ring / J. J. Climent, P. R. Navarro, L. Tortosa // *Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.* – 2011. – Vol. 22. – P. 91–108.
- 137 Climent J. J. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of  $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$  / J. J. Climent, P. R. Navarro, L. Tortosa // *International Journal of Computer Mathematics.* – 2012. – Vol. 89, is. 13–14 – P. 1753–1763.
- 138 Koskela P. Quasihyperbolic boundary conditions and capacity: Hölder continuity of quasiconformal mappings / P. Koskela, J. Onninen, J. T. Tyson // *Comment. Math. Helv.* – 2001. – Vol. 76. – P. 416–435.
- 139 Koskela P. Quasihyperbolic boundary conditions and Poincaré domains / P. Koskela, J. Onninen, J. T. Tyson // *Math. Ann.* – 2002. – Vol. 323. – P. 811–830.
- 140 Rohde S. Quasircles modulo bilipschitz maps // *Rev. Mat. Iberoam.* – 2001. – Vol. 17. – P. 643–659.
- 141 Gehring F. W. Lipschitz classes and quasiconformal mappings / F. W. Gehring, O. Martio // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* – 1985. – Vol. 10. – P. 203–219.
- 142 Maz'ya V. Sobolev spaces: with applications to elliptic partial differential equations / Berlin-Heidelberg : Springer, 2011. – 894 p.
- 143 Kuznetsov N. Sharp constants in the Poincaré, Steklov and related inequalities (a survey) / N. Kuznetsov, A. Nazarov // *Mathematika.* – 2015. – Vol. 61. – P. 328–344.
- 144 Makai E. A lower estimation of simply connected membranes // *Act. Math. Acad. Sci. Hungary.* – 1965. – Vol. 16. – P. 319–327.
- 145 Hersch J. Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum // *Z. Angew. Math. Phys.* – 1960. – Vol. 11. – P. 387–413.
- 146 Vodop'yanov S. K. Lattice isomorphisms of the spaces  $W^{1,n}$  and quasiconformal mappings / S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dstein // *Siberian Math. J.* – 1975. – Vol. 16. – P. 224–246.
- 147 Pchelintsev V. On growth monotonicity estimates of the principal Dirichlet-Laplacian eigenvalue. – URL: <https://arxiv.org/pdf/2112.00411.pdf> (дата обращения 30.12.2021).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

### Публикации

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

A.1 Abrosimov N. The volume of a spherical antiprism with  $S_{2n}$  symmetry / N. Abrosimov, B. Vuong // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2021. – Vol. 18, is. 2. – P. 1165–1179. – DOI: 10.33048/semi.2021.18.088 (журнал входит в Scopus Q2).

A.2 Abrosimov N. Explicit volume formula for a hyperbolic tetrahedron in terms of edge lengths / N. Abrosimov, B. Vuong // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. – 2021. – Article number 2140007. – DOI: 10.1142/S0218216521400071 (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q4).

A.3 Bardakov V. G. Quandle cohomology, extensions and automorphisms / V. G. Bardakov, M. Singh // *Journal of Algebra* – 2021. – Vol. 585. – P. 558–591. – DOI: 10.1016/j.jalgebra.2021.06.016 (журнал входит в Scopus Q1, WoS Q3).

A.4 Bardakov V. G. Virtually symmetric representations and marked Gauss diagrams / V. G. Bardakov et al., M. V. Neshchadim, M. Singh // *Topology and its Applications*. – 2022. – Vol. 306. – Article number 107936. – DOI: 10.1016/j.topol.2021.107936 (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q4).

A.5 Dobrynin A. A. On the Wiener  $(r,s)$ -complexity of fullerene graphs / A. A. Dobrynin, A. Yu. Vesnin // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2021. – DOI: 10.1080/1536383X.2021.1960511 (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q3).

A.6 An unknotting invariant for welded knots / K. Kaur, A. Gill, M. Prabhakar, A. Vesnin // *Proceedings of Indian Academy of Sciences. Mathematical Sciences*. – 2021. – Vol. 131. – Article number 47. – DOI: 10.1007/s12044-021-00640-9 (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q4).

A.7 Gol'dshtein V. Quasiconformal mappings and Neumann eigenvalues of divergent elliptic operators / V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, A. Ukhlov // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2021. – DOI: 10.1080/17476933.2021.1921752 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q3).

A.8 Kozlovskaya T. A. Structure of 4-strand singular pure braid group // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2022. – Vol. 19, is 1. – P. 18–33. – DOI: 10.33048/semi.2022.19.002 (журнал входит в Scopus Q2).

A.9 Zonov M. N. Quotient divisible groups of rank 2 / M. N. Zonov, E. A. Timoshenko // *Mathematical notes*. – 2021. – Vol. 110, is. 1. – P. 48–60. – DOI: 10.1134/S0001434621070051 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q4).

A.10 Колесников И. А. Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца // *Сибирский математический журнал* / – 2021. – Т. 62, № 4. – 2021. – С. 784–802. DOI: 10.33048/smzh.2021.62.407 (переводное издание входит в Scopus Q1, WoS Q3).

A.11 Степанова А. Ю. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов / А. Ю. Степанова, Е. А. Тимошенко // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2021. – № 74. – С. 30–42. – DOI: 10.17223/19988621/74/4. (переводное издание входит в Scopus Q3).

A.12 Dynamic state of columnar structures formed on the basis of carbon nanotori / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, D. V. Mamontov [et al.] // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2021. – Vol. 29, is. 10. – P. 825–831. – DOI: 10.1080/1536383X.2021.1908268 (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q3).

A.13 Movement of fullerenes and their dimers inside carbon nanotubes / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, D. V. Mamontov [et al.] // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2021. – Vol. 29, is. 10. – P. 803–809. – DOI: 10.1080/1536383X.2021. (журнал входит в Scopus Q3, WoS Q3).

A.14 Passage of monochromatic sound through a gas pipeline wall / A. V. Lun-Fu, M. A. Bubenchikov, A. M. Bubenchikov [et al.] // *Acoustics Australia*. – 2021. – DOI: 10.1007/s40857-021-00255-0 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q3).

A.15 Molecular dynamics study of collective behavior of carbon nanotori in columnar phase / A. V. Lun-Fu, M. A. Bubenchikov, A. M. Bubenchikov [et al.] // *Crystals*. – 2021. – Vol. 11. – Article number 1197. – DOI: 10.3390/cryst11101197 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q2).

A.16 An Analytical solution to the problem of hydrogen isotope passage through composite membranes made from 2D materials / A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, A. S. Chelnokova, S. Jambaa // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9. – Article number 2353. – DOI: 10.3390/math9192353 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q1).

A.17 Gibanov N. S. Numerical investigation of conjugate natural convection in a cavity with a local heater by the lattice Boltzmann method / N. S. Gibanov, M. A. Sheremet // *Fluids*. – 2021. – Vol. 6. – Article number 316. – DOI: 10.3390/fluids6090316 (журнал входит в Scopus Q2).

A.18 Miroshnichenko I. V. Numerical analysis of heat transfer through hollow brick using finite-difference method / I. V. Miroshnichenko, N. S. Gibanov, M. A. Sheremet // *Axioms*. – 2022. – Vol. 11. – Article number 37. – DOI: 10.3390/axioms11020037 (журнал входит в Scopus Q3).

A.19 Helium isotope separation by bi-layer membranes of g-C<sub>3</sub>N<sub>4</sub> / V. A. Poteryaeva, A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov // *Advances in Natural Sciences: Nanoscience and Nanotechnology*. – 2021. – Vol. 12. – Article number 045005. – DOI: 10.1088/2043-6262/ac4108 (журнал входит в Scopus Q2, WoS Q3).

A.20 Del I. V. Forecast of the near ground air temperature based on the multilayer perceptron model / I. V. Del, A. V. Starchenko // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1989. – Article number 012025. – DOI: 10.1088/1742-6596/1989/1/012025 (журнал входит в Scopus Q4).

A.21 Старченко А. В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов / А. В. Старченко, М. А. Седнев, С. В. Панько // *Вестник ТГУ. Математика и механика*. – 2021. – № 74. – С. 19–29. – DOI 10.17223/19988621/74/3 (переводное издание входит в Scopus Q3).

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых в РИНЦ:

A.22 Решение задачи Фекете и Сеге вариационным методом / Я. В. Борисова, И. А. Колесников, С. А. Копанев, Г. Садритдинова // *Дальневосточный математический журнал*. – 2021. – Т. 21, № 2. – С. 133–150. – DOI: 10.47910/FEMJ202112.

A.23 Параллельная реализация некоторых итерационных методов для решения системы линейных алгебраических уравнений в мезомасштабной метеорологической модели атмосферного пограничного слоя / Е. А. Данилкин, А. В. Старченко, Е. А. Каратаева [и др.] // *Десятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям : сборник статей / под ред. А.В. Старченко*. – Томск : Изд-во НТЛ, 2021. – С. 18–28.

A.24 Старченко А. В. Численное моделирование распространения выбросов автотранспорта в уличном каньоне / А. В. Старченко, Е. А. Данилкин, Д. В. Лещинский // *Уфимская осенняя математическая школа : Материалы международной научной конференции (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.)*. В 2 томах. Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. – Уфа : Аэтерна, 2021. – С. 239–241. – DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.93.

A.25 Leshchinskiy D. V. Influence of the pollution source location on the concentration of the impurity in street canyon / D. V. Leshchinskiy, E. A. Danilkin // Десятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям : сборник статей / под ред. А.В. Старченко. – Томск : Изд-во НТЛ, 2021. – С. 47–52.

A.26 Смиян Н. Параллельная реализация численного решения трехмерного уравнения переноса / Н. Смиян, Е. А. Данилкин // Все грани математики и механики: сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции студентов (Томск, 27 мая – 1 июня 2021 г.) / под ред. Л.В. Гензе. – Томск : Изд-во НТЛ, 2021. – С. 116–124.