

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ТГУ)

УДК 514.1  
Рег. № НИОКТР АААА-А19-119120690010-8  
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной и  
инновационной деятельности ТГУ  
д-р физ.-мат. наук, профессор

\_\_\_\_\_ А.Б. Ворожцов  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:  
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР  
(промежуточный, этап 4)

Соглашение № 075-02-2022-884

Начальник научного управления  
канд. геол.-минерал. наук

Руководитель НИР,  
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ Т.С. Краснова  
подпись, дата

\_\_\_\_\_ А.Ю. Веснин  
подпись, дата

Томск 2023

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| Руководитель НИР,<br>гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук,<br>чл.-корр. РАН | _____         | А.Ю. Веснин<br>(введение, подраздел<br>1.1, раздел 2,<br>заклучение) |
|  | подпись, дата |  |
| Исполнители:   |               |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | В.Г. Бардаков<br>(подраздел 1.2)                                     |
|  | подпись, дата |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | А.М. Бубенчиков<br>(подраздел 1.3)                                   |
|  | подпись, дата |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | М.А. Бубенчиков<br>(подраздел 1.3)                                   |
|  | подпись, дата |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | А.В. Старченко<br>(подраздел 1.4)                                    |
|  | подпись, дата |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | Е.А. Тимошенко<br>(подраздел 1.5)                                    |
|  | подпись, дата |  |
| Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук                                       | _____         | А.Р. Чехлов<br>(подраздел 1.6)                                       |
|  | подпись, дата |  |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук                                      | _____         | Н.В. Абросимов<br>(подраздел 1.7)                                    |
|  | подпись, дата |  |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук                                      | _____         | М.В. Агафонцев<br>(подраздел 1.8)                                    |
|  | подпись, дата |  |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук                                      | _____         | Х.Б. Выонг<br>(подраздел 1.9)  |
|  | подпись, дата |  |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук                                      | _____         | Е.А. Данилкин<br>(подраздел 1.4)                                     |
|  | подпись, дата |  |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук                                      | _____         | Т.А. Козловская<br>(подраздел 1.10)                                  |
|  | подпись, дата |  |

|                                       |               |                                       |
|---------------------------------------|---------------|---------------------------------------|
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук | _____         | И.А. Колесников<br>(подраздел 1.11)   |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук | _____         | И.В. Мирошниченко<br>(подраздел 1.12) |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук | _____         | Ц.Д. Норбосамбуев<br>(подраздел 1.13) |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук | _____         | В.А. Пчелинцев<br>(подраздел 1.14)    |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Мл. науч. сотр.                       | _____         | Д.В. Лещинский<br>(подраздел 1.4)     |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Мл. науч. сотр.                       | _____         | В.А. Потеряева<br>(подраздел 1.3)     |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Мл. науч. сотр.                       | _____         | А.С. Челнокова<br>(подраздел 1.3)     |
|                                       | подпись, дата |                                       |
| Нормоконтролер                        | _____         | Е.Н. Соколенко                        |
|                                       | подпись, дата |                                       |

## РЕФЕРАТ

Отчет 88 с., 1 кн., 18 рис., 1 табл., 110 источн., 1 прил.

АБЕЛЕВА ГРУППА, ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Объектами исследования являются свойства абелевых групп, теоретико-множественные решения уравнений Янга-Бакстера, группы кос и их обобщения, геометрические структуры на трехмерных многообразиях и орбифолдах, конформные отображения, спектральные свойства эллиптических операторов, конвекция, теплопроводность и излучение в элементах строительных сооружений и в системах охлаждения, процесс горения, молекулярные кристаллы, свойства ультратонких наномембран, качество атмосферного воздуха в уличных каньонах городов, прогнозирование временных рядов, задачи электроимпедансной томографии.

Цель работы – получение новых научных результатов, направленных на развитие теорий, описывающих свойства исследуемых объектов, организация и проведение научно-образовательных мероприятий, направленных на развитие математики и математического образования в регионе.

В процессе работы получены новые научные результаты по 14 отдельным задачам в направлениях фундаментальной математики, математических методов в механике, математическом моделировании и анализе данных.

В рамках научно-образовательной деятельности Центра в 2022 году были опубликованы 26 статей, проведено 11 научных и 9 образовательных мероприятий, 1 курс повышения квалификации, защищена 1 кандидатская диссертация.

Таким образом, все запланированные результаты в соответствии с Программой развития Центра на 2022 год получены.

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Введение .....   | 7  |
| 1 Научная составляющая .....   | 14 |
| 1.1 Оценки объемов гиперболических прямоугольных многогранников .....  | 14 |
| 1.2 Неклассические алгебраические системы и их приложения .....  | 16 |
| 1.3 Математические модели волновой и молекулярной динамики .....   | 20 |
| 1.4 Математическое моделирование некоторых задач экологии и медицины .....   | 23 |
| 1.5 Изучение автоморфизмов абелевых групп .....  | 32 |
| 1.6 Обобщенные группы Басса .....  | 36 |
| 1.7 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических<br>многогранников, многообразий и орбифолдов .....  | 39 |
| 1.8 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных<br>углеводородных топлив с применением оптических методов и математического<br>моделирования ..... | 44 |
| 1.9 Антиподальные октаэдры в трехмерном гиперболическом пространстве .....   | 48 |
| 1.10 Группы сингулярных крашенных кос на $n$ нитях .....   | 52 |
| 1.11 Внутренний модуль полигонального четырехугольника .....   | 56 |
| 1.12 Численное исследование конвективно-радиационного теплопереноса<br>в полости с перегородкой .....  | 58 |
| 1.13 Формальные матрицы над кольцами вычетов и некоторые их приложения .....   | 63 |
| 1.14 Регулярность отображений весовых классов Соболева и спектральные свойства<br>эллиптических операторов в дивергентной форме .....                                  | 67 |
| 2 Образовательная составляющая .....   | 70 |
| 2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные<br>центром .....   | 70 |
| 2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и<br>образовательными организациями .....   | 71 |
| 2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром .....  | 72 |
| 2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра .....  | 72 |
| 2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре .....   | 73 |
| 2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики<br>и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром ....   | 73 |
| 2.7 Вовлечение школьников в мероприятия центра .....   | 74 |
| 2.8 Дополнительная информация о деятельности центра .....  | 76 |

|  |    |
|--|----|
| Заключение.....                              | 77 |
| Список использованных источников.....        | 78 |
| Приложение А (обязательное) Публикации ..... | 86 |

## ВВЕДЕНИЕ

Коллектив НОМЦ проводит исследования по трем большим направлениям, которые соответствуют сформированным в НОМЦ научным группам:

- фундаментальная математика,
- математические методы в механике,
- математическое моделирование и анализ данных.

Научные сотрудники группы фундаментальной математики проводят исследования по актуальным направлениям современной алгебры, геометрии и топологии, неевклидовой геометрии. Полученные результаты опубликованы в статьях [А.1, А.2, А.3, А.4, А.5, А.6, А.7, А.8, А.9, А.10, А.11, А.12] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и [А.21] в сборнике конференции.

1. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. По теореме жесткости Мостова [1], любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Важнейшим геометрическим инвариантом является объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести задачу к вычислению объема многогранника. Задача получения формул для объемов гиперболических многогранников в важных частных случаях решалась еще Н.И. Лобачевским, который нашел объемы идеальных и биортогональных гиперболических тетраэдров [2]. В общем случае задача решена лишь для гиперболических многогранников простейшего комбинаторного типа – тетраэдров. Формулы для объема гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов независимо получены в работах Г. Сфорца [3], Ю. Чо и Х. Кима [4], Дж. Мураками и М. Яно [5], Д.А. Деревнина и А.Д. Медных [6]. В 2021 г. Н.В. Абросимовым и Б. Выонгом [7] в рамках данного проекта впервые получена явная интегральная формула, выражающая объем произвольного гиперболического тетраэдра через длины его ребер. Все указанные формулы достаточно сложны и не всегда удобны для приложений, в частности, для вычисления объемов многогранников более сложного комбинаторного типа путем разбиения их на тетраэдры. В отчетном 2022 году этот пробел удалось отчасти исправить. Н.В. Абросимовым и С.В. Степанищевым изучено трехпараметрическое семейство так называемых трехпрямоугольных тетраэдров в пространстве Лобачевского, у которых три ребра при одной из вершин попарно ортогональны. С помощью нового подхода, получена простая формула для объемов таких тетраэдров, а также формула для их объема, нормированного

по площади поверхности. Изучено асимптотическое поведение функций объема и нормированного объема.

2. Под алгебраической системой мы понимаем непустое множество с определенными на нем алгебраическими операциями. Классическими примерами алгебраических систем являются группы, кольца, поля, векторные пространства. В последние десятилетия, наряду с этими системами были введены и активно изучаются такие алгебраические системы как кванды, биквандлы, брэйсы, косые брэйсы и ряд других.

В.Г. Бардаков изучил неклассические алгебраические системы. В частности, квандлы, биквандлы, брейсы, косые брэйсы, группы Рота-Бакстера и другие. Эти алгебраические системы используются для построения теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера. Для изучения виртуальных узлов построены некоторые представления группы виртуальных кос. Кроме того, изучались так называемые гомотопические зацепления и гомотопические косы.

3. Актуальность исследования объемов прямоугольных гиперболических многогранников ярко проявилась в связи со следующей проблемой о прямоугольных узлах. В теории узлов известны примеры гиперболических зацеплений, дополнение к которым можно разбить на прямоугольные многогранники. Такие зацепления называют прямоугольными. Известно, что прямоугольными являются двухкомпонентное зацепления Уайтхеда и трехкомпонентное зацепление Борромеевы кольца. В работе [8] была высказана гипотеза о том, что не существует прямоугольных узлов. Благодаря вычислениям объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников из работы [9] удалось установить, что гипотеза верна, если число перекрестков в диаграмме узла не превосходит 11. В общем случае гипотеза о прямоугольных узлах по-прежнему остается открытой.

А.Ю. Весниним получены новые верхние оценки объемов прямоугольных многогранников в пространстве Лобачевского  $H^3$  в следующих трех случаях: для идеальных многогранников, все вершины которых лежат на абсолюте; для компактных многогранников, все вершины которых конечны; и для многогранников конечного объема с вершинами обоих типов.

4. Актуальность проблемы вычисления гиперболических объемов многогранника обусловлена теоремой жесткости Г. Д. Мостова. Исследователи К. Петронио, Д. Херд, Э. Первова классифицировали компактные ориентируемые 3-многообразия, которые можно получить, попарно склеивая грани октаэдра, а затем удаляя открытые регулярные окрестности особых точек. Из этого набора 132 многообразия являются гиперболическими. Н. Абросимов получил формулы объема для октаэдров с различными типами симметрии. В данном проекте Х.Б. Выонгом изучены антиподальные октаэдры в трехмерном



гиперболическом пространстве. Установлен критерий существования компактного антиподального гиперболического октаэдра. Получена явная интегральная формула для объема гиперболического октаэдра, имеющего антиподальную симметрию.

5. В работе И.А. Коллесникова изучается конформный модуль внутренности четырехугольника с прямолинейной границей. Конформный модуль имеет важные приложения в геометрической теории функций, в задачах математической физики, электронике и др. [10,11].

Аналитически конформный модуль известен для некоторых частных случаев, в связи с этим есть интерес к развитию численных методов и поиску аналитических подходов. В работе [12] предложен аналитический подход нахождения конформного модуля внутренности четырехугольника, основанный на формуле Кристоффеля-Шварца. В [13] аналогичный результат получен для внешности четырехугольника. В [14] с помощью однопараметрического семейства конформных отображений находится модуль двусвязной области, дополнение которой представляет собой два отрезка.

В данном исследовании с помощью однопараметрического семейства конформных отображений получена формула для нахождения конформного модуля внутренности полигонального четырехугольника. Используется идея из работы [15]. Для определения параметров семейства отображений верхней полуплоскости на семейство четырехугольников получена система дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

6. В последние десятилетия изучаются различные обобщения классической теории узлов. В частности, теория виртуальных узлов, теория сингулярных узлов и ряд других. Для решения основной проблемы – распознавания узлов и зацеплений, актуальным является построение и изучение соответствующих групп кос: виртуальных групп кос, сингулярных групп кос и т.д.

За отчетный период Т.А. Козловской доказано, что центр группы сингулярных кос выделяется прямым множителем в группе сингулярных крашенных кос. Также установлено, что при переходе к самой группе сингулярных кос это утверждение перестает быть справедливым. Построена система порождающих и определяющих соотношений для группы крашенных сингулярных кос в случае произвольного числа нитей.

7. Кольца формальных матриц над кольцами вычетов могут быть очень полезны в шифровании данных. С одной стороны, имеем некоммутативное кольцо, значит, оно может служить хорошей базой для создания «некоммутативного протокола шифрования», с другой стороны, элементами в получающихся матрицах являются вычеты из нескольких, возможно различных, колец  $\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ , а это кольца коммутативные и достаточно

просто устроенные. Также заметим, что такое кольцо не изоморфно никакому кольцу (обычных, не формальных) матриц вида  $M(n, R)$  ни над каким коммутативным кольцом  $R$ .

Ц.Д. Норрбосамбуев получил условие обратимости формальных матриц порядка  $m$  над кольцами вычетов  $\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$ , однако, пока только в случае  $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ .

8. В.А. Пчелинцевым изучены свойства слабой регулярности отображений весовых классов Соболева в рамках теоремы о слабом обратном отображении. Получены оценки на собственные значения эллиптических операторов в дивергентной форме с краевым условием Дирихле в областях евклидова пространства. Кроме того, доказано неравенство типа Фабера-Крана для некоторых таких операторов.

9. Эндоморфизмы и автоморфизмы абелевых групп значительно проще изучать, когда удастся представить их матрицами. Так, при изучении колец эндоморфизмов прямых сумм абелевых групп и модулей нередко возникают кольца формальных матриц. В этом случае группу автоморфизмов такой прямой суммы можно отождествить с группой матриц, являющихся обратимыми элементами полученного кольца формальных матриц.

Результаты из [16] позволяют решить вопрос о представлении формальными матрицами эндоморфизмов конечной  $p$ -группы ранга 2 и получении критерия обратимости таких матриц. Другой важный частный случай (когда элементы матриц принадлежат одному и тому же коммутативному кольцу) подробно рассмотрен в [17, 18].

Естественным желанием является обобщить указанные конструкции таким образом, чтобы они были применимы к случаю формальных матриц произвольного конечного порядка, элементы которых принадлежат разным кольцам классов вычетов, и, следовательно, к изучению эндо- и автоморфизмов произвольной конечной  $p$ -группы.

За отчетный период Е.А. Тимошенко получил описание автоморфизмов конечных  $p$ -групп произвольного ранга с помощью формальных матриц. Найден критерий обратимости такой формальной матрицы. Кроме того, получен критерий факторной делимости аддитивной группы  $E$ -кольца. Также построено  $E$ -кольцо ранга 3, не являющееся квазирасщепляющимся, что дает ответ на одну из проблем Боушелла и Шульца [19].

10. В 1990 г. Басс [20] поставил вопрос о возможности вложения математического объекта в собственный гомоморфный образ. За отчетный период А.Р. Чехлов в соавторстве с П.В. Данчевым и Б. Голдсмитом рассмотрели свойство, названное обобщенным свойством Басса, а именно: из существования инъективного гомоморфизма  $A \rightarrow A/I$  для абелевой группы  $A$  с подгруппой  $I$  следует выделение  $I$  прямым слагаемым в  $A$ . Ранее эти авторы полностью охарактеризовали абелевы группы со свойством Басса, т.е. из существования инъективного гомоморфизма  $A \rightarrow A/I$  для группы  $A$  с подгруппой  $I \leq A$  следует  $I = 0$  [21]. Интересным свойством является такое утверждение: если  $G$  является ко-

хопфовой группой, то  $G$  обладает обобщенным свойством Басса тогда и только тогда, когда  $G$  является группой Басса.

В соавторстве с П.В. Данчевым. Доказывается, что периодически полные группы являются характерно инертными цокольно-регулярными, что полностью решает, опубликованную ранее проблему в [22].

В соавторстве с П.В. Данчевым и П. Кифом исследуются взаимосвязи между транзитивными, вполне транзитивными и транзитивными по Крылову абелевых групп без кручения. В частности, построена транзитивная по Крылову группа без кручения, которая не является ни вполне транзитивной, ни транзитивной [23, проблема 44].

В области прикладной математики и механики основным направлением исследований являются актуальные задачи теоретической механики и математической физики, сосредоточенные, в частности, на задачах молекулярной физики и методов молекулярной динамики, а также задачах по конвективному тепломассопереносу и методов сложного теплообмена, исследованием характеристик сгорания жидкого топлива. Результаты работы по этому направлению опубликованы в статьях [A.13, A.14, A.15, A.16, A.17] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и [A.22, A.23] в журналах, индексируемых в РИНЦ.

1. В работах группы под руководством А.М. Бубенчикова рассмотрены решения задач волновой динамики и классической молекулярной динамики. Проанализировано движение классического фуллерена  $C_{60}$  в углеродном наноконтейнере. Рассмотрена задача о низкотемпературном разделении изотопов легких газов с помощью составной мембраны из графидина. В продолжение работ по изучению распространения волн получено точное аналитическое решение о распространении неперидической волны давления с осесимметричным начальным возмущением. Также была рассмотрена новая для коллектива задача определения размеров и формы воронок выброса в зависимости от свойств грунта, энергетической характеристики заряда, а также его формы и расположения.

2. Процесс сжигания различных углеводородных топлив является самым распространенным и применяемым в промышленности. Остается открытым вопрос оптимизации режимов горения в энергетических установках. Существующие методы, основанные на различных внешних воздействиях на факел пламени, могут быть одним из решений оптимизации режимов горения за счет возможности вносить некие изменения в протекающий процесс. Исследования, которые проводятся в области физического и математического моделирования различных режимов горения, позволяют дать более глубокое понимание о процессах, протекающих в факеле пламени.

Исследование, проводимое в рамках выполнения проекта М.В. Агафонцевым, направлено на изучении процессов, происходящих при диффузионном горении метана, при наличии внешних источников возмущений в виде пульсаций давления. На данном этапе исследования была разработана двумерная математическая модель нестационарного диффузионного горения метановоздушной смеси при наличии внешнего источника пульсации давления. Проведен анализ спектров изменения температуры при различных начальных условиях. Установлено, что при увеличении частоты внешнего воздействия наблюдается уменьшение амплитуды пульсации пламени, за счет чего на спектре остается ярко выражена лишь несущая частота внешнего воздействия и первая гармоника.

3. Изучение процессов конвективно-радиационного теплопереноса в объектах различной геометрии при наличии перегородок имеет исключительно важное значение в строительной теплофизике и при охлаждении микроэлектроники. Влияние перегородок на структуру течения и теплообмен в пустотелом строительном элементе исследовано в работе [24]. Автор показал возможность увеличения термического сопротивления на 53% путем добавления двух теплопроводных перегородок.

По направлению прикладной математики и механики И.В. Мирошниченко проводятся исследования в области математического моделирования процессов конвективного теплопереноса. За отчетный период проведено численное моделирование конвективно-радиационного теплообмена в замкнутых областях при наличии перегородок. Установлено, что при построении математической модели необходимо учитывать вклад теплового излучения в общий теплообмен в области решения. Исследовано влияние перегородок на структуру течения, а также показана возможность существенного снижения интенсивности конвективного теплообмена при их наличии

По направлению математического моделирования и анализа данных группой под руководством А.В. Старченко совместно с Е.А. Динилкиным и Д.В. Лицинским проводятся исследования в области математического моделирования и вычислительной математики, сосредоточенные, в частности, на задачах, связанных с исследованием процессов распространения выбросов автотранспорта и экстремальных погодных условий и решения обратных задач электроимпедансной томографии. Полученные в рамках выполнения работы результаты опубликованы в статьях [А.18, А.19, А.20] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и [А.24, А.25, А.26] в сборниках конференций.

Одна из главных проблем экологии – проблема загрязненности атмосферного воздуха в городах. Она представляет собой значительную опасность для здоровья человека в повседневной жизни. Неблагоприятные метеорологические условия способствуют

накапливанию выбросов предприятий и автотранспорта в приземном слое атмосферы. Необходимо прогнозировать содержание загрязняющих веществ в воздухе с учетом неблагоприятных метеорологических условий, дабы избежать повышения уровня загрязнения атмосферного воздуха. В данной работе для решения этой задачи применены искусственные нейронные сети и результаты численных расчетов неизотермического турбулентного течения воздуха и переноса примеси в идеализированном уличном каньоне на основе разработанных авторами RANS-модели, численного алгоритма и пакета прикладных программ, которые были усовершенствованы для учета влияния силы плавучести на аэродинамику и перенос примеси. Математическая модель включает осредненные по Рейнольдсу стационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса, уравнения теплообмена и переноса примеси.

Также в отчете рассматривается решение обратных задач ЭИТ. Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволяет реконструировать внутреннюю структуру объектов живой природы по сечениям на основе измерения напряжения электрического тока, проходящего через сетку электродов, с последующим считыванием напряжения на границе объекта. Математически ЭИТ описывается с помощью коэффициентной обратной задачи. В данной работе обратная задача ЭИТ рассматривается в полной электродной модели, особенностью которой является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегрально-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов. После сеточной дискретизации обратная задача ЭИТ представляет собой систему линейных уравнений с неизвестной матрицей, коэффициенты которой можно найти, зная наборы правых частей и решений такой СЛАУ.

Все запланированные на 2022 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены. Все полученные результаты являются новыми, они прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

## 1 Научная составляющая

### 1.1 Оценки объемов гиперболических прямоугольных многогранников

**Введение.** Изучение объемов гиперболических многогранников и гиперболических многообразий. Мы рассматриваем многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского  $\mathbb{H}^n$  размерности  $n$ , все двугранные углы которых равны  $\pi/2$ . Такие многогранники будем называть прямоугольными. Известно, что в  $\mathbb{H}^n$  не существует компактных прямоугольных многогранников при  $n > 4$ , а прямоугольных многогранников конечного объема – при  $n > 12$  [25].

В данной работе рассматриваются прямоугольные гиперболические многогранники в  $\mathbb{H}^3$ . В 1970 году Е.М. Андреев [26] получил описание трехмерных гиперболических остроугольных многогранников конечного объема. Для прямоугольных многогранников теоремы Андреева дают простые необходимые и достаточные условия того, что заданный комбинаторный многогранник может быть реализован как многогранник в  $\mathbb{H}^3$ , который является компактным, идеальным, или имеет конечный объем. Такая реализация единственна с точностью до изометрии пространства  $\mathbb{H}^3$ . Таким образом, естественно ожидать, что геометрические инварианты таких многогранников могут быть оценены через комбинаторные. Нижние и верхние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников, использующие число его вершин, были получены К. Аткинсоном [27]. Нами получены новые верхние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников (теорема 1), компактных прямоугольных многогранников (теорема 2) и прямоугольных многогранников конечного объема, которые содержат как конечные вершины, так и идеальные (теорема 3).

**Методы.** Для получения верхних оценок объемов используются триангуляции многогранников на тетраэдры (рисунок 1).

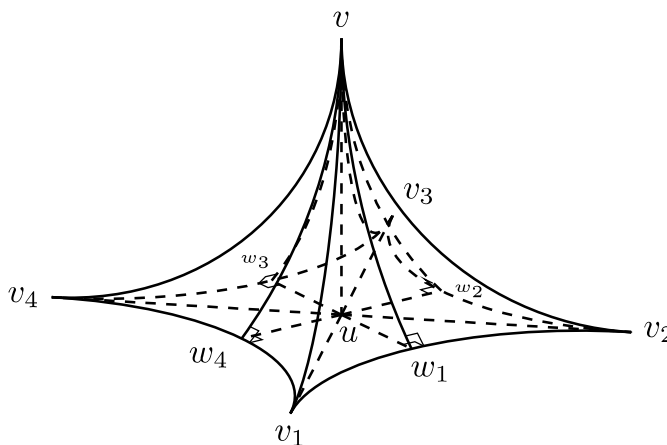


Рисунок 1 – Триангуляции многогранников на тетраэдры

При этом, можно добиться, чтобы все тетраэдра были бипрямоугольными (рисунок 2).

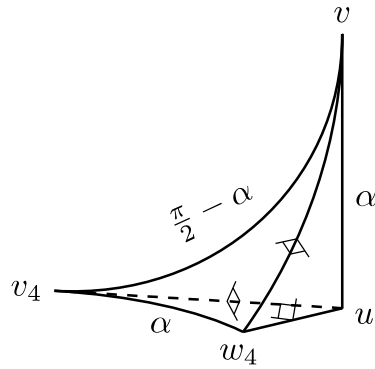


Рисунок 2 – Случай с тремя прямыми двугранными углами

Объемы бипрямоугольных тетраэдров выражаются через функцию Лобачевского

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \log |2 \sin t| dt .$$

Затем, оценивая число вершин различных типов в разбиениях и пользуясь тем, что для функции Лобачевского имеет место неравенство Йенсена, получаем искомые верхние оценки. Улучшение ранее известных оценок Аткинсона достигается за счет более тонкого исследования комбинаторных свойств многогранников.

Результаты и обсуждения. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1.1. Пусть  $P$  – идеальный прямоугольный трехмерный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Тогда имеют место следующие неравенства.

(1) Если  $V > 24$ , то  $Vol(P) \leq \frac{v_8}{2}V - 3v_8$ .

(2) Если  $P$  имеет  $k$ -угольную грань, где  $k > 3$ , то  $Vol(P) \leq \frac{v_8}{2}V - \frac{k+5}{4}v_8$ .

(3) Если  $P$  имеет только треугольные и четырехугольные грани, причем  $V > 73$ , то

$$Vol(P) \leq \frac{v_8}{2}V - (9v_8 - 20v_3) .$$

Теорема 1.2. Пусть  $P$  – компактный прямоугольный многогранник с  $V$  вершинами. Тогда имеют место следующие неравенства.

(1) Если  $V > 80$ , то  $Vol(P) \leq \frac{5v_3}{8}V - 10v_3$ .

(2) Если  $P$  имеет  $k$ -угольную грань, где  $k > 4$ , то  $Vol(P) \leq \frac{5v_3}{8}V - \frac{5k+35}{8}v_3$ .

**Теорема 1.3.** Пусть  $P$  – прямоугольный трехмерный гиперболический многогранник конечного объема с  $V_\infty > 0$  идеальными и  $V_F$  конечными вершинами.

$$\text{Если } V_\infty + V_F > 17, \text{ то } vol(P) \leq \frac{v_8}{2} V_\infty + \frac{5v_3}{8} V_F - \left( v_8 + \frac{5v_3}{2} \right).$$

**Заключение.** Таким образом, получены новые верхние оценки для объемов прямоугольных гиперболических многогранников в пространстве Лобачевского, которые улучшают оценки Аткинсона. Полученные результаты могут быть использованы для оценки объемов трехмерных гиперболических многообразий, в частности, являющихся дополнениями к узлам и зацеплениям.

Полученные результаты приняты в печать и будут опубликованы в 2023 г. в статье [С.А. Александров, Н.В. Богачев, А.Ю. Веснин, А.А. Егоров. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Математический сборник. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=9740&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=9740&option_lang=rus)].

## **1.2 Неклассические алгебраические системы и их приложения**

**Введение.** Под алгебраической системой мы понимаем непустое множество с определенными на нем алгебраическими операциями. Классическими примерами алгебраических систем являются группы, кольца, поля, векторные пространства. В последние десятилетия, наряду с этими системами были введены и активно изучаются такие алгебраические системы как кванды, биквандлы, брэйсы, косые брэйсы и ряд других.

Необходимость для введения новых алгебраических систем возникла в разных разделах математики. Например, квандлы возникли в теории узлов. С. Матвеев и независимо Д. Джойс доказали, что квандл является почти полным инвариантом узла в 3-мерном евклидовом пространстве и обобщает понятие группы узла. Позже, для изучения виртуальных узлов и зацеплений, были введены биквандлы, которые, в отличие от квандлов, обладают уже двумя бинарными алгебраическими операциями, удовлетворяющие аксиомам, кодирующим обобщенные преобразования Рейдемейстера.

Другим источником возникновения новых алгебраических систем является уравнение Янга-Бакстера. Уравнение Янга-Бакстера появилось в работе Ч. Н. Янга 1968 г. и Р. Д. Бакстера 1971 г. Оно используется в статистической физике для точного решения некоторых моделей. В частности, в модели льда, модели Изинга и ряда других.

Уравнение Янга-Бакстера равносильно так называемому косовому уравнению, которое является определяющим соотношением группы кос. Это наблюдение позволяет связать решения уравнения Янга-Бакстера с построением инвариантов узлов.



Целью настоящего исследования является изучение неклассических алгебраических систем. В частности, квандлов, биквандлов, брейсов, косых брейсов, групп Рота-Бакстера и других. Эти алгебраические системы используются для построения теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера.

Другое направление исследований связано с теорией узлов и различными ее обобщениями. В частности, с теорией виртуальных узлов. Для изучения виртуальных узлов построены некоторые представления группы виртуальных кос. Кроме того, изучались так называемые гомотопические зацепления и гомотопические косы. Эти зацепления были введены Милнором, а затем изучались Хадебергом, Лином. Беллинджери. Дай и другие математики изучали различные обобщения гомотопических кос: виртуальные гомотопические косы, гомотопические косы со спайками.

Методы. Понятие брейса было введено сравнительно недавно Румпом для построения теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера. Стоит отметить, что аксиомы брейса были написаны Курошем в середине 70-х в его лекциях по Общей алгебре. Фактически брейс возникает из кольца при замене операции умножения некоторой новой операцией. При этом операция сложения является коммутативной.

Как заметил Румп, каждый брейс дает теоретико-множественное инволютивное решение уравнения Янга-Бакстера. Для изучения более общих решений (неинволютивных) Вендрамин и Лебедь ввели понятие косого брейса, отказавшись от коммутативности операции сложения. Таким образом, косой брейс – это алгебраическая система с двумя бинарными алгебраическими операциями, относительно каждой из которых исходное множество является группой, и эти операции связаны аксиомой, похожей на аксиому дистрибутивности. Главная проблема в этой тематике: «Дана некоторая группа, как на базисном множестве определить вторую группу, чтобы получился косой брейс?».

В работе [28] разработан метод, позволяющий строить косые брейсы, принадлежащие некоторому классу, при заданной аддитивной группе. По построенным косым брейсам строятся решения уравнения Янг-Бакстера.

В работе [29] разработан метод линеаризации квандлов и изучены некоторые свойства построенных объектов. Более точно, для каждого квандла  $X$  и каждого кольца  $R$  определена квандловая алгебра  $R[X]$ , элементами которой являются конечные формальные комбинации элементов из  $X$  с коэффициентами из  $R$ . Определенная таким образом алгебра, является аналогом групповой алгебры. Для квандловых алгебр можно сформулировать аналог проблемы Капланского о делителях нуля.

В теории групповых алгебр известна проблема описания обратимых элементов. В теории квантовых алгебр аналогом этой проблемы является проблема описания всех

идемпотентов. Отметим, что всякий элемент квандла является идемпотентом. В работе [28] разработан метод упорядоченных квандлов, позволивший доказать отсутствие делителей нуля в ряде квандловых колец.

Работы [30, 35] посвящены изучению некоторых аналогов теории узлов и зацеплений. Например, в [30] строится теория гомотопических групп кос, являющейся фактор-теорией классической группы кос. Ранее Коэн и Ву ввели понятие гомотопической группы кос для изучения гомотопических зацеплений. В частности, они определили гомотопическую группу крашенных кос и доказали, что эта группа является полупрямым произведением нескольких приведенных свободных групп. Кроме того, они построили аналог представления Артина группы гомотопических кос в группу автоморфизмов приведенной свободной группы и доказали, что это представление является точным.

Интерес к гомотопическим косам связан с вопросом Артина: Верно ли, что множество классов гомотопных кос совпадает с множеством классов изотопных кос? Голдсмит построил пример, приведенный на следующем рисунке 3, показывающий существование нетривиальной косы, гомотопной тривиальной косе.

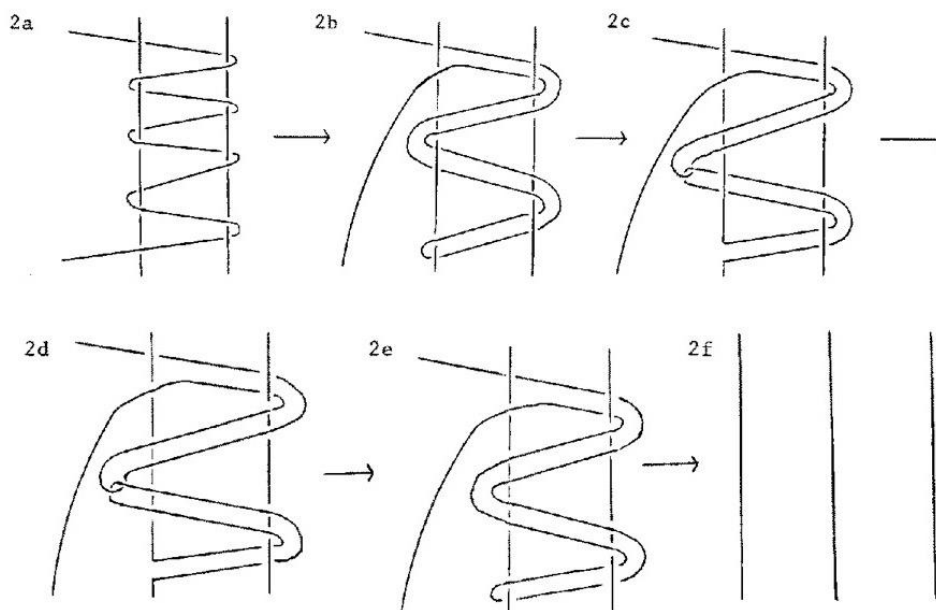


Рисунок 3 – Нетривиальная коса, гомотопная тривиальной

Теорема [30]. Группа гомотопических кос является линейной. Более того, существует точное целочисленное линейное представление.

Напомним, что уравнение Янга-Бакстера имеет вид

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (1)$$

Решением уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  называется отображение  $R$ , переводящее  $X \times X$  в  $X \times X$  и удовлетворяющее уравнению (1). Здесь каждое отображение  $R_{ij}$  действует из  $X \times X \times X$  в  $X \times X \times X$ , при этом оно действует как  $R$  на  $i$ -й и  $j$ -й компонентах и тривиально на оставшейся компоненте.

За отчетный период в работах [28, 31, 33] изучались общие методы построения теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера. В частности, для описания решений на группах используются методы теории групп и, в частности, комбинаторной теории групп.

Наряду с классическим уравнением Янга-Бакстера изучаются уравнения Янга-Бакстера, зависящие от параметров. Используя методы представления группы кос и группы виртуальных кос, разработанные в [32, 34], предложен метод построения решений параметрического уравнения Янга-Бакстера.

Каждому решению уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  можно сопоставить две бинарные алгебраические операции, превратив, тем самым,  $X$  в алгебраическую систему, называемую би-группоидом. Это открывает возможности использовать такие алгебраические системы как квандл, рэк, брэйс и другие для изучения решений уравнения Янга-Бакстера. Указанные алгебраические системы изучались в работах [28, 31, 34]. С другой стороны, можно сформулировать и обратную задачу. На заданной алгебраической системе построить все возможные решения уравнения Янга-Бакстер.

**Результаты и обсуждения.** Разработаны общие методы, позволяющие строить теоретико-множественные решения уравнения Янга-Бакстера на различных множествах: группах, квандлах, биквандлах, косых брэйсах. Изучались свойства этих алгебраических систем. Также изучались различные инварианты виртуальных узлов. В частности, группы виртуальных узлов. На этом пути была доказана

**Т е о р е м а** [28]. Всякая группа виртуального узла имеет дефицит 1 или 2 и ее вторая группа гомологий - циклическая.

Напомним, что на произвольной группе существуют несколько классов элементарных вербальных, невырожденных решений уравнения Янга-Бакстера. При этом, хорошо известно, что всякое решение уравнения Янга-Бакстера на множестве  $X$  дает представление группы кос  $B_n$  в группу подстановок множества  $X^n$ . Если есть пара согласованных решений  $(R, S)$  на множестве  $X$ , где  $S$  – инволютивное решение, то это позволяет построить представление группы виртуальных кос  $VB_n$  в группу подстановок множества  $X^n$ . В работе [32] этот подход использован для построения представлений некоторых фактор-групп группы виртуальных кос.

Ранее в работах Бардакова, Михальчишиной и Нецадима были построены представления группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения абсолютно свободной группы и свободной абелевой группы. Наиболее общее из этих представлений обобщает известные ранее представления. В работе [28] эти представления используются для построения инвариантов виртуальных узлов.

Можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в работах [А.1, А.2, А.3, А.4, А.5, А.6].

### **1.3 Математические модели волновой и молекулярной динамики**

Сотрудники НОМЦ, работающие под руководством профессора А.М. Бубенчикова, за 2022 год опубликовали цикл работ, в которых продолжили исследования по математическому моделированию динамики ковалентных молекулярных тел. В частности в работе [А.16] проанализировано движение классического фуллерена  $C_{60}$  в углеродном наноконтейнере в виде широкой нанотрубки, закрытой с обеих концов графеновыми пластинами. Расчеты показали, что движение фуллерена является стохастическим и преимущественно реализуется у плоских крышек, а также в цилиндрической потенциальной яме у внутренней поверхности нанотрубки. При этом фуллерен совершает многочисленные удары о поверхность углеродной камеры. Этих ударов достаточно, чтобы на сравнительно большом промежутке времени установилось равновесие, в котором энергия флуктуационного движения фуллерена отвечала бы некоторой постоянной поступательной температуре. Более того, рассмотренный пример позволяет проверить известную теорему статистической физики о равномерном распределении энергии по поступательным степеням свободы молекулярного тела и позволяет также определить кинетическую энергию вращения фуллерена. Скрытая энергия ковалентных связей обычно существенно больше энергии ван-дер-ваальсовских взаимодействий и менее подвержена изменениям, связанным с перемещением молекулы, как целого объекта. Поэтому колебания атомов углерода не должны участвовать в определении температуры в обычном ее понимании, а их движение должно описываться квантово-механическими моделями. Представленные расчеты проведены в рамках классического описания и выполнены с высокой точностью, которая оценивалась по выполнению баланса сохранения полной энергии в системе.

Для того, чтобы избежать потерь точности при сложных поворотах фуллерена внутри углеродной капсулы, был разработан новый способ определения поворотов молекулярных тел, основанный на определении координат средних положений всех атомов, составляющих молекулярное тело. Способ может быть обобщен на случай так называемых

сплошных тел за счет выбора трех реперных точек, принадлежащих телу и не лежащих на одной прямой. В последнем случае способ с успехом может быть использован в решении задач управления движением различных макрообъектов.

В работе [A.17] математическое моделирование проведено в рамках квантово-механической модели взаимодействия частиц газа с углеродной структурой графидина. Селективные свойства составной мембраны обеспечивались резонансным расстоянием между монослоями мембраны при прохождении волн материи через составной барьер заданной конфигурации. По мнению многих исследователей гелион, как основная компонента исходной смеси, обеспечивает прохождение экологически чистой реакции термоядерного синтеза. Однако для этого необходимо его выделить из смеси гелион-гелиевых компонент, содержащихся в природном газе. В современных условиях лишь регулируемые резонансные мембраны позволяют надеяться на получение реального результата по разделению изотопов гелия.

В работе [A.17] описана техника получения резонансного решения с помощью разложения волновой функции по пятидесяти функциям Эрмита, определенным на всей действительной оси. Это снимает проблему сшивки решения, полученного на конечном интервале распространения волн с асимптотическими значениями искомой функции на бесконечности. Такой подход вполне можно назвать аналитическим, а построенное решение могло бы претендовать на достаточно точное описание процесса, если бы не ошибки, возникающие при задании барьерной энергии. Однако, как показывают расчеты, основной результат в виде резонансной дистанции между монослоями является слабочувствительным к небольшим изменениям формы и величины монобарьера. Кроме этого в представленной работе рассмотрены особенности выделения водорода и дейтерия из исходной смеси легких газов с помощью мембранной технологии при криогенных температурах.

Продолжая работу по изучению распространения волн, в работе [A.15] получено точное аналитическое решение о распространении непериодической волны давления с осесимметричным начальным возмущением. Такие задачи являются актуальными в отношении определения локальных всплесков давления внутри газопровода по форме акустической волны, распространяющейся в водной среде на большие расстояния. Поскольку имеющиеся в этом случае отраженные волны имеют существенно меньшую интенсивность и немного разделены во времени, то осесимметричная непериодическая волна определяет основной акустический сигнал.

Решение основного уравнения акустики, записанного в цилиндрических координатах, изначально ищется в форме интегрального преобразования Фурье по

аксиальной координате с ядром в виде начального всплеска давления. Тогда для радиального множителя решения получается гиперболическое уравнение двух переменных. Применяя к последнему уравнению преобразование Лапласа относительно времени, получаем для изображения радиального множителя решения обыкновенное дифференциальное уравнение. Решением последнего уравнения является функция Макдональда. Дальнейший успех в применении операционного исчисления, зависит возможности найти оригинал изображения, имеющий вид функции Макдональда. Оказалось, что можно найти оригинал даже для более общего операционного соответствия. Это позволило найти решение для радиального множителя в элементарных функциях и проанализировать характер распространения осесимметричной аperiодической звуковой волны в пространстве.

В работах [А.22, А.23] рассмотрена задача определения размеров и форм воронок выброса при взрыве в зависимости от свойств грунта, энергетической характеристики заряда, а также его формы и расположения. Взрывы применяются при разработке полезных ископаемых, проходке траншей, сооружении плотин, строительстве подземных хранилищ, а также для прокладки подземных нефте и газопроводов в твердых породах.

В свое время М.А. Лаврентьев построил теорию кумулятивной струи, возникающей при взрыве заряда внутри или на поверхности металлического тела. Потом эта теория была распространена на грунтовые среды и скальные породы. Суть этой теории заключается в применении модели идеальной жидкости для перемещающейся под действием взрыва части материала и допущений о малости сил реакции среды на импульсное воздействие заряда. В этом случае можно считать, что часть среды, неподверженная существенной деформации, отделена от перемещающейся части свободной поверхностью, и для ее нахождения можно применить методы теории струй идеальной жидкости и, в частности, аппарат теории аналитических функций.

В рамках предложенной схемы рассмотрения переноса выброса решены две задачи об образовании воронки от взрыва шнурового заглубленного горизонтального заряда и вертикально залегающего плоского заряда во втором случае. Для получения точного решения в рамках предложенной М.А. Лаврентьевым модели переноса вводится в рассмотрение комплексный потенциал:

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

и соответствующая ему плоскость ( $W$ ).

Тогда, как известно из теории аналитических функций, производная от потенциала по независимой переменной  $z$  будет скоростью движения жидкой частицы:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$$

Плоскость скоростей удобно обозначить через  $(\mathbf{V})$ . Области, отвечающие конкретной задаче в плоскостях  $(\mathbf{W})$  и  $(\mathbf{V})$  обычно простые. Однако построить конформные отображения этих областей друг на друга как правило не удастся. Поэтому вводят в рассмотрение промежуточную область  $(\mathbf{t})$ , обычно это верхняя полуплоскость, и на нее последовательно отображаются область комплексного потенциала и область скоростей. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dz},$$

и сомножители в правой части будут известны, поскольку уже найдены конформные отображения соответствующих областей на верхнюю полуплоскость.

По такой простой схеме решается первая задача о выбросе грунта в случае горизонтального расположения заглубленного шнурного заряда. Во второй задаче для вертикально залегающего плоского заряда вместо  $dw/dz$  удобнее использовать функцию Жуковского:

$$\Phi = \ln \left( c_0 \frac{dz}{dw} \right)$$

Область в плоскости Жуковского  $(\Phi)$  тоже достаточно проста, поскольку не содержит заранее не известной свободной границы. Далее нужно отобразить конформно области в плоскостях  $(\mathbf{W})$  и  $(\Phi)$  на общую для них плоскость  $(\mathbf{t})$ . Однако из-за наличия заряда в плоскости  $(\Phi)$  в этом случае необходимо ввести в рассмотрение еще одну промежуточную область  $(\mathbf{U})$ . Это увеличивает количество отображений, однако все равно удается указать их достаточно простой вид.

Ценность постороенных решений заключается в том, что в рамках используемого приближения физической модели они являются точными. Более того, решение удается записать в элементарных функциях.

## 1.4 Математическое моделирование некоторых задач экологии и медицины

1.4.1 Численный метод прогнозирования временных рядов по историческим данным с использованием искусственных нейронных сетей и графических процессоров применительно к задачам локального качества воздуха

Введение. Методы машинного обучения и нейросетевого прогнозирования имеют большой потенциал в трудоемких, плохо формализованных задачах.

Целью данной работы является реализация и применение модели многослойного персептрона для прогноза осадков (их наличия или отсутствия) на ближайшее время (от часа до суток) и модели рекуррентной нейронной сети типа LSTM для прогноза концентрации частиц размером до 2,5 мкм (PM2.5) на ближайшее время.

**Методы.** Для выбора оптимальных архитектур нейронных сетей был проведен вычислительный эксперимент подбора размера входных данных, размера тестовой выборки и оптимизационного алгоритма.

Разработанная модель искусственной нейронной сети (ИНС) для прогнозирования осадков основана на одной из архитектур нейронных сетей, называемой многослойным персептроном [36, 37, 38]. Была выбрана трехуровневая структура (один входной слой (7 нейронов), один скрытый слой (5 нейронов) и один выходной слой (2 нейрона)) с функцией активации ReLU ( $\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$ ) на скрытом слое и Softmax на выходном слое. Функция ReLU возвращает 0, если принимает отрицательный аргумент, в случае же положительного аргумента, функция возвращает само число. Функция Softmax принимает в качестве входных данных вектор  $z$  из  $K$  действительных чисел и нормализует его в распределение вероятностей, состоящее из  $K$  вероятностей, пропорциональных

экспонентам входных чисел. Функция Softmax имеет следующий вид [38]: 
$$\sigma = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^K e^{z_j}},$$

где  $i = 1, \dots, K$  и  $z = (z_1, \dots, z_K) \in \mathbb{R}^K$ . В этой ИНС расчет весовых коэффициентов осуществляется с помощью оптимизационного метода адаптивной инерции Adam (вариант стохастического градиентного спуска) [39]. За функцию потерь принята категориальная перекрестная энтропия (categorical crossentropy: CCE), поскольку она используется как функция потерь для модели классификации с несколькими классами [36]:

$$CCE = - \sum_{i=1}^n (d_i \cdot \log(y_i)),$$
 где  $d_i$  – истинное значение,  $y_i$  – распределение вероятностей

прогнозов модели. Также в данной работе метрикой для рассматриваемой задачи была выбрана величина ассигасу - доля правильных ответов алгоритма.

Разработанная модель ИНС для прогноза концентрации PM2.5 основана на одной из архитектур, называемой рекуррентной нейронной сетью типа LSTM. Рекуррентные нейронные сети – ИНС с обратной связью между различными слоями нейронов. Long short-term memory (LSTM) – тип рекуррентных нейронных сетей с долгой кратковременной памятью [40]. В данном случае сеть состоит из последовательных 4 слоев: входного, двух скрытых LSTM-слоев и выходного полносвязного слоя. Формой ввода является 12 временных шагов с 12 параметрами. Первый скрытый слой содержит 20 нейронов, второй



– 12 нейронов. Выходной слой содержит 1 нейрон (прогнозируемая концентрация PM2.5 на следующий час). В этой нейронной сети осуществляется оптимизация целевой функции с подбором весовых коэффициентов ускоренным по Нестерову методом адаптивной оценки моментов инерции Nadam (Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation) (вариант стохастического градиентного спуска) [41]. За функцию потерь принята средняя абсолютная ошибка MAE:  $MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|$ , где  $y_i$  – предсказанное выходное значение, а  $d_i$  – реальное выходное значение. Цель – минимизировать эту ошибку.

**Результаты и обсуждения.** По результатам многочисленных запусков python-программы для прогноза осадков установлена оценка точности модели: 0.86. Это означает, что 86 % предсказаний выпадения или отсутствия осадков предсказаны верно, но модель не всегда справляется с предсказанием – ошибка составляет 14 %. Тестовая выборка содержит в себе 7013 ежечасных наблюдений. Из них 82 % без осадков и 18 % с осадками. Количество предсказанных наблюдений без осадков с вероятностью больше 0.5: 98 %, количество предсказанных наблюдений с осадками с вероятностью больше 0.5: 35 %. Отсюда следует, что нейронная сеть с вероятностью больше 0.5 не смогла угадать 2 % наблюдений без осадков 65 % наблюдений с осадками.

Общее значение MAE по всему прогнозу концентрации частиц PM2.5 составила  $\approx 0.94$  мкг/м<sup>3</sup>, общее значение RMSE  $\approx 1.697$  мкг/м<sup>3</sup>. Коэффициент детерминации  $R^2 \approx 0.79$ . Результаты говорят об удовлетворительной аппроксимации. Также приведем значение коэффициента корреляции между прогнозируемой концентрацией и историческими наблюдениями PM2.5:  $R = 0.89$  – высокая корреляция между прогнозируемыми и историческими наблюдениями.

**Заключение.** Таким образом, построены и применены две модели: модель многослойного персептрона для предсказания по измеренным метеопараметрам за предыдущий час выпадения или отсутствия осадков через 6 часов и модель рекуррентной нейронной сети типа LSTM для прогноза концентрации PM2.5 на час. Оценка точности модели для прогнозирования осадков составила 86 %. Разработанная модель лучше справляется с задачей прогнозирования отсутствия осадков, чем их выпадения. Средняя абсолютная ошибка модели ИНС для прогнозирования концентрации PM2.5 составила 0.94 мкг/м<sup>3</sup>, среднеквадратичная ошибка – 1.697 мкг/м<sup>3</sup>, а коэффициент детерминации  $R^2 \approx 0.79$ . Сравнительный анализ реальных данных и результатов, полученных при помощи ИНС, свидетельствует об удовлетворительной настройке сети.

Часть полученных результатов уже опубликована [А.20, А.25], другая часть готовится к публикации.

#### 1.4.2 Новая математическая постановка и численный метод решения обратных задач электроимпедансной томографии методами машинного обучения

**Введение.** Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволяет восстановить внутреннюю структуру объектов живой природы, используя электрические измерения только на границе объекта [42]. Существует два типа задач ЭИТ [43]: прямая и обратная. Цель прямой задачи – найти значения электрических потенциалов на поверхности объекта при заданном распределении удельной проводимости  $\sigma$  и подаваемого тока  $I$ . Цель обратной задачи – восстановить неизвестное распределение проводимости  $\sigma$  при заданном токе и значениях потенциалов на поверхности объекта.

**Методы.** Обратная задача ЭИТ является некорректно поставленной задачей, поэтому для восстановления необходимого количества неизвестных коэффициентов электрической проводимости  $\sigma$  нужно использовать информацию из большого количества независимых измерений, собранных при решении большого количества прямых задач.

Обратная задача ЭИТ рассматривается в полной электродной модели, особенностью которой является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов.

Уравнение для электрического потенциала  $u$  в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, (x, y) \in D \cup \Gamma,$$

где  $D$  – область внутри объекта,  $\Gamma$  – граница объекта.

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю (отсутствие тока):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, (x, y) \in \Gamma \setminus \bigcup_{l=1}^L E_l.$$

На электродах  $E_l \in \Gamma$  рассматриваются граничные условия, учитывающие сопротивление электродов, так называемая полная электродная модель [42]:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = I_l, l = 1, \dots, L.$$

где  $u$  – электрический потенциал,  $\sigma$  – электропроводимость,  $z_l$  – сопротивление электрода,  $E_l$  – поверхность электрода,  $I_l$  – известная сила тока на электроде,  $L$  – количество электродов.

Для существования и единственности решения требуется выполнение условий [42]:

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0, \sum_{l=1}^L U_l = 0.$$

Для решения обратной задачи использовался стохастический метод – дифференциальная эволюция [44, 45]. Параметр электрической проводимости  $\sigma$  оценивается путём перебора различных вариантов решений прямой задачи. Дифференциальная эволюция работает с популяцией постоянного размера, состоящей из векторов, представляющих возможные решения задачи. Поиск «оптимального» решения осуществляется путем циклического изменения текущей популяции в соответствии с эволюционными правилами, такими как мутация, скрещивание и селекция. Внутренний цикл метода анализирует все векторы из текущей популяции, принадлежащие поколению  $G$  ( $G$  – индекс поколения, к которому принадлежит популяция), они поочередно выбираются целевым вектором. На каждой итерации из целевого вектора и произвольно выбранных векторов рассматриваемого поколения формируется новый вектор, который в дальнейшем служит моделью для оценки целевого вектора. Путем сравнения целевого вектора с вектором выборки по значению целевой функции определяют, какой из них перейдет в новую популяцию (поколение  $G + 1$ ). Итерационный процесс метода завершается по одному из двух возможных исходов: будет найдена особь популяции, для которой целевая функция принимает значение меньше некоторого фиксированного уровня, либо число поколений достигнет заданного максимального числа. В последнем случае из полученной популяции выбирается вектор, соответствующий наименьшему значению целевой функции и учитывается как приближенное решение задачи.

Результаты и обсуждения. Для численного решения прямой задачи разработан эффективный численный метод [А.18], опирающийся на использование неструктурированных сеток, сгущающихся к границе области исследования, метод конечных объемов для барицентрических ячеек и метод исключения Гаусса с частичным выбором главного элемента для решения сеточных уравнений. Проведенные численные расчеты для тестовой задачи – неоднородного по электрической проводимости круглого диска с двумя электродами – сравнивались с приближенным аналитическим решением. Для различных отношений коэффициентов электрической проводимости (круглой вставки и кольца) получено хорошее согласование, причем при кратном по площади уменьшении размеров конечных объемов неструктурированной сетки расхождение между численным и приближенным аналитическим решениями уменьшалось, что свидетельствует о сходимости построенной конечно-разностной схемы.

После сеточной дискретизации обратная задача ЭИТ представляет собой систему линейных уравнений с неизвестной матрицей, коэффициенты которой можно найти, зная

наборы правых частей и решений такой СЛАУ. Для решения такой задачи рассмотрен метод – дифференциальная эволюция. Для тестирования использовались 2 типа матриц: матрица Гильберта и разреженная трехдиагональная матрица. Матрица Гильберта является плохообусловленной и плотно заполненной. А преимущество разреженной матрицы в преобладании нулевых элементов. Тестирование проводилось с матрицами размерностью  $6 \times 6$  и  $25 \times 25$ . Цель состояла в том, чтобы определить оптимальный размер входных данных и размер популяции для рассматриваемых размеров матриц. В ходе тестирования был сделан вывод, что размер набора входных параметров должен быть больше  $n^2$ , а размер популяции больше  $4 * n$ , где  $n \times n$  – размер матрицы.

**З а к л ю ч е н и е.** Была написана программа для решения прямой задачи ЭИТ, которая будет использоваться для генерации искусственных данных для решения обратных задач. Определены оптимальные параметры входных данных и размер популяции для дальнейшего решения обратной задачи методом дифференциальная эволюция. Таким образом, все запланированные на 2022 год результаты достигнуты. Часть полученных результатов уже опубликована [А.18], другая часть готовится к публикации.

1.4.3 Новый гибридный параллельный алгоритм решения микромасштабной модели турбулентного течения, построенный с использованием комбинации наиболее перспективных технологий параллельного программирования (MPI, OpenMP, OpenACC и CUDA)

**В в е д е н и е.** В настоящее время для исследования процессов распространения вредных выбросов в городской застройке активно применяются микромасштабные математические модели, описывающие движение воздуха и перенос примеси. В настоящее время такие модели активно развиваются и используются как в России, так и за рубежом.

Моделирование состава атмосферы и ее динамики в городском подслое, представляет собой сложнейшую задачу математического моделирования. Развиваемую математическую модель планируется использовать для проведения параметрических расчетов и оперативного прогноза, поэтому требуется разработка параллельных вычислительных алгоритмов адаптированных на использование современной вычислительной техники. Разнообразие в архитектуре и компоновке высокопроизводительных вычислительных систем порождает разнообразие инструментов для построения параллельных программ. На сегодняшний день в области научных вычислений самыми популярными и узнаваемыми для написания параллельных программ являются технологии MPI, OpenMP и OpenACC/CUDA. Это подталкивает исследователей

к оценке перспективности использования разных подходов и их комбинации для решения своих задач.

Одной из целей работы в 2022 году было проведение вычислительных экспериментов и выбор оптимального с точки зрения быстродействия способа распараллеливания (MPI, OpenMP, CUDA) численного метода решения уравнения построенной модели на вычислительной системе с общей памятью и графическим ускорителем.

**Методы.** Математическая модель включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, уравнения Навье-Стокса, переноса примеси и теплообмена. Замыкание описанной системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска. Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая  $k$ - $\epsilon$  – модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавучести. При расчете течений вокруг зданий использовался метод фиктивных областей, суть которого заключается в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемах нет потоков диффузии [46]. Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира [47]. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE [46]. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательного решения систем сеточных уравнений на основе метода Зейделя с красно-черным упорядочиванием.

Распараллеливание выполнено с использованием следующих технологий параллельного программирования: OpenMP, MPI, OpenACC и CUDA). Предварительные результаты по исследованию ускорения были получены на примере решения одного уравнения переноса.

**Результаты и обсуждения.** Расчеты проводились на вычислительной системе со следующими характеристиками: два процессора Intel(R) Xeon(R) Silver 4214 CPU @ 2.20GHz, с 192 Гб оперативной памяти и двумя графическими ускорителями NVidia RTX2080 Ti.

Библиотека OpenMP – это средство для разработки параллельных программ ориентированных на вычислительные системы с общей памятью. Для исполнения

разработанного последовательного алгоритма в многопоточном режиме достаточно добавить перед вычислительными циклами директиву, указывающую на параллельное исполнение следующего за ней блока.

При расчетах получено, что распараллеливание вложенных циклов дает такие же результаты, как и распараллеливание только одного внешнего цикла. Использование ключа SCHEDULE с параметрами STATIC, DYNAMIC, GUIDED не дает ускорения по сравнению с распараллеливанием по умолчанию. Параллельное программирование с использованием библиотеки OpenMP, можно без преувеличения считать простым с точки зрения сложности применения. Результаты показывают, что задействование всех вычислительных потоков, доступных на сервере позволяет ускорить процесс получения решения в 17,3 раза.

На рисунке 4 представлен график ускорения параллельных программ. Видно, что отклонение от линейного ускорения начинает проявляться при переходе от 16 к 24 потокам. Замедление прироста ускорения объясняется увеличением нагрузки на память, а точнее уменьшением пропускной способности памяти в расчете на одно активное ядро при задействовании всех доступных физических ядер. Вычислительная система имеет 24 вычислительных ядра, использование гипетрейдинга дает возможность запускать программу на 48 процессах, однако это не дает значительного прироста ускорения. Что в целом характерно для программ, активно взаимодействующих с оперативной памятью.

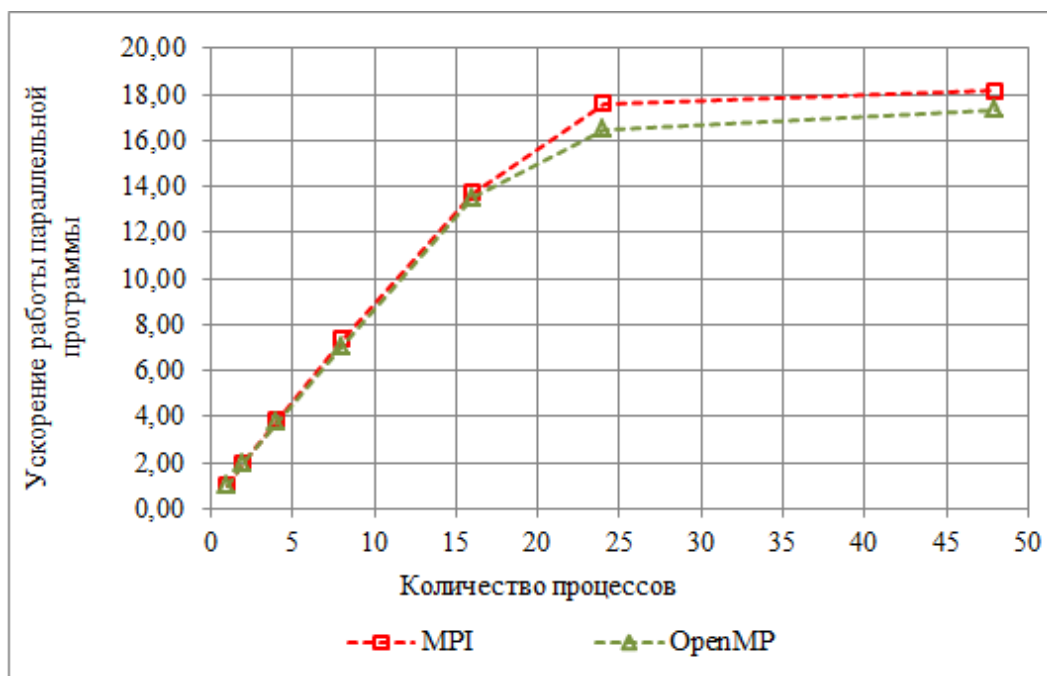


Рисунок 4 – График ускорения работы параллельных MPI и OpenMP программ

Библиотека MPI – это средство передачи сообщений между параллельными процессами на системах с распределенной памятью. Использование MPI подразумевает

самостоятельное распределение вычислительной работы по процессам и организацию обмена данными средствами библиотеки передачи сообщений MPI. В качестве основного подхода распараллеливания выбрана двумерная (2D) декомпозиция сеточной области на подобласти. При разработке параллельной программы используется ряд функций MPI для создания двумерной декартовой логической топологии, создания пользовательских типов данных для обеспечения эффективной пересылки между процессами, а также функции MPI\_Isend() и MPI\_Irecv() для проведения парных неблокирующих пересылок значений сеточной функции в соседние подобласти двумерной XY-декомпозиции сеточной области.

Ускорение полученного алгоритма в зависимости от числа используемых процессов представлено на рисунке 4. Сравнение показывает, что, в целом, на рассматриваемом вычислительном сервере с общей памятью MPI- и OpenMP-программы показывают одинаковое ускорение при использовании от 1 до 16 ядер. При дальнейшем увеличении количества задействованных процессов/потоков использование MPI позволяет получить большее ускорение работы программы. Важно отметить, что MPI-распараллеливание требует значительно больше времени на разработку параллельной программы.

Для проверки масштабируемости построенного параллельного алгоритма дополнительно были проведены расчеты на кластере ТГУ, один вычислительный узел кластера имеет следующие характеристики: 48Gb RAM, 2xIntel® Xeon® X5670 (2.93GHz). При проведении параллельных расчетов с помощью этой же программы на 128 процессах было получено ускорение в 100 раз, а на 512 – в 340 раз.

При использовании гибридных параллельных технологий CPU+GPU появляется возможность использования вычислительной мощности графических карт. Технология OpenACC, как и технология OpenMP, с помощью директив компилятора позволяет отмечать участки программы, которые следует выполнять параллельно на графическом процессоре. Результаты расчетов по параллельной программе, созданной с помощью технологии OpenACC, показали ускорение в 31 раз по сравнению с последовательной программой.

CUDA – технология параллельного программирования, разработанная компанией NVidia, позволяющая проводить вычисления на графических процессорах. Распараллеливание работы алгоритма основывалось на принципе двумерной (2D) декомпозиции данных. Использование технологии параллельного программирования CUDA для реализации рассматриваемого алгоритма позволяет ускорить получение решения в 38 раз по сравнению с последовательной программой.

На основе разрабатываемой микромасштабной математической проведено исследование как геометрия уличного каньона и нагрев стен и дороги влияют на структуру

течения и изменение максимальной концентрации выбросов в каньоне. Для этого рассмотрен набор различных сценариев проветривания уличного каньона. Было установлено, что наименее проветриваемыми при небольшой ( $\sim 1$  м/с) скорости ветра являются узкие и высокие уличные каньоны, причем, чем выше уличный каньон при неизменной ширине, тем выше средняя концентрация в зоне дыхания. При исследовании влияния степени нагрева поверхностей образующих уличного каньона, высота и ширина которого совпадают, наименее проветриваемым является случай, когда температура поверхности наветренной вертикальной стороны каньона выше температуры окружающей среды на величину от 15 до 20 °С. Основной причиной является образование вторичного вихря над поверхностью дороги, из-за которого примесь плохо выносится из каньона [А.19].

**З а к л ю ч е н и е .** Результаты расчетов решения поставленной задачи показали, что ускорение и эффективность OpenMP-программы практически не уступает аналогичным параметрам MPI-программы. Однако использование технологии MPI позволяет задействовать вычислительные мощности систем с распределенной памятью и на порядки сократить время вычислений. Использование технологий параллельного программирования CUDA или OpenACC и графической карты NVidia RTX2080Ti обеспечивает получение ускорения в 31 и 38 раз соответственно.

Тем самым получены все результаты, запланированные на 2022 год.

### **1.5 Изучение автоморфизмов абелевых групп**

**Введение.** Кольца обобщенных, или формальных, матриц берут начало в исследованиях Мориты [48]. За последние десятилетия появилось много работ, посвященных кольцам формальных матриц, а также модулям над ними; в первую очередь можно выделить монографию Крылова и Туганбаева [17]. Модули над кольцами формальных матриц порядка 2 и 3 рассматривались, в частности, в работах [49, 50]. В некоторых кольцах формальных матриц удается ввести понятие определителя матрицы [16, 18].

Кольца формальных матриц часто возникают при изучении колец эндоморфизмов прямых сумм абелевых групп и модулей. В этом случае группу автоморфизмов такой прямой суммы можно отождествить с группой матриц, являющихся обратимыми элементами полученного кольца формальных матриц.

**Методы.** Вопрос о представлении формальными матрицами эндоморфизмов конечной  $p$ -группы ранга 2 и нахождении необходимых и достаточных условий обратимости таких матриц решен, в частности, в [16]; для конечных  $p$ -групп больших



рангов аналогичный вопрос сложнее. В [17, 18] построена общая теория определителей для колец формальных матриц, но только для случая, когда элементы матриц принадлежат одному и тому же (коммутативному) кольцу. Эти методы были усовершенствованы таким образом, чтобы можно было применить их к случаю формальных матриц произвольного конечного порядка, элементы которых принадлежат разным кольцам классов вычетов, вводя понятия определителя, союзной матрицы, алгебраического дополнения и т.п.

**Результаты и обсуждения.** Нас интересует вопрос о том, как представить эндоморфизмы и автоморфизмы конечной  $p$ -группы с помощью формальных матриц.

Пусть  $p$  – простое число,  $n_1 \geq \dots \geq n_l > 0$  и  $H_i = \mathbf{Z} / p^{n_i} \mathbf{Z}$ . Элементы абелевой группы  $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_l$  будем записывать в виде вектор-столбцов

$$\begin{pmatrix} z_1 + p^{n_1} \mathbf{Z} \\ z_2 + p^{n_2} \mathbf{Z} \\ \dots \\ z_l + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Каждому эндоморфизму  $\varphi$  группы  $H$  поставим в соответствие ту единственную матрицу

$$N_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} + p^{n_1} \mathbf{Z} & a_{12} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & a_{1l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ a_{21} + p^{n_2} \mathbf{Z} & a_{22} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & a_{2l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} + p^{n_l} \mathbf{Z} & a_{l2} + p^{n_l} \mathbf{Z} & \dots & a_{ll} + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij} \in \mathbf{Z}$ , для которой при любых  $z_i \in \mathbf{Z}$  вектор-столбец указанного выше вида переводится эндоморфизмом  $\varphi$  в вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} S_{111} a_{11} z_1 + S_{121} a_{12} z_2 + \dots + S_{1l1} a_{1l} z_l + p^{n_1} \mathbf{Z} \\ S_{211} a_{21} z_1 + S_{221} a_{22} z_2 + \dots + S_{2l1} a_{2l} z_l + p^{n_2} \mathbf{Z} \\ \dots \\ S_{l11} a_{l1} z_1 + S_{l21} a_{l2} z_2 + \dots + S_{ll1} a_{ll} z_l + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где для произвольных  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, l\}$  коэффициент  $S_{ijk}$  определен следующим образом:

$$S_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq j \leq i \text{ или } i \leq j \leq k; \\ p^{n_j - n_k}, & \text{если } j \leq k \leq i; \\ p^{n_j - n_i}, & \text{если } j \leq i \leq k; \\ p^{n_i - n_j}, & \text{если } k \leq i \leq j; \\ p^{n_k - n_j}, & \text{если } i \leq k \leq j. \end{cases}$$

Пусть в дополнение к  $\varphi$  имеется эндоморфизм  $\psi$  группы  $H$  такой, что в матрице  $N_\psi$  в позиции  $(i, j)$  находится элемент  $b_{ij} + p^{\min(n_i, n_j)} \mathbf{Z}$ , где  $b_{ij} \in \mathbf{Z}$ . Договоримся считать, что произведение  $N_\varphi N_\psi$  есть матрица

$$\begin{pmatrix} t_{11} + p^{n_1} \mathbf{Z} & t_{12} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & t_{1l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ t_{21} + p^{n_2} \mathbf{Z} & t_{22} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & t_{2l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{l1} + p^{n_l} \mathbf{Z} & t_{l2} + p^{n_l} \mathbf{Z} & \dots & t_{ll} + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где  $t_{ik} = S_{i1k} a_{i1} b_{1k} + S_{i2k} a_{i2} b_{2k} + \dots + S_{ilk} a_{il} b_{lk}$ .

**Теорема 5.1.** Множество матриц

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} / p^{n_1} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} / p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z} / p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} / p^{n_2} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} / p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z} / p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Z} / p^{n_l} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} / p^{n_l} \mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z} / p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

с поэлементным сложением и указанной выше операцией умножения образует кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов группы  $H$  (изоморфизм задается сопоставлением  $\varphi \rightarrow N_\varphi$ ). Единичный элемент кольца  $R$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + p^{n_1} \mathbf{Z} & 0 + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & 0 + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ 0 + p^{n_2} \mathbf{Z} & 1 + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & 0 + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + p^{n_l} \mathbf{Z} & 0 + p^{n_l} \mathbf{Z} & \dots & 1 + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Пусть среди чисел  $n_1, \dots, n_l$  есть  $x$  различных значений  $m_1, \dots, m_x$ , т.е. для любых  $r \in \{1, 2, \dots, x\}$  и  $i \in \{y_{r-1} + 1, y_{r-1} + 2, \dots, y_r\}$  выполнено  $n_i = m_r$ ; здесь  $y_0 = 0$  и  $y_x = l$ . Разобьем матрицу  $N_\varphi$  на прямоугольные блоки  $A_{rs}$ , где  $r, s \in \{1, 2, \dots, x\}$ , имеющие размер  $(y_r - y_{r-1}) \times (y_s - y_{s-1})$ . Имеет место следующий критерий обратимости матрицы  $N_\varphi$  в кольце  $R$  (т.е. критерий того, чтобы эндоморфизм  $\varphi$  был автоморфизмом):

**Теорема 5.2.** Матрица  $N_\varphi$  обратима в  $R$  тогда и только тогда, когда все блоки  $A_{rr}$ , где  $r \in \{1, 2, \dots, x\}$ , являются обратимыми (в обычном смысле) элементами полного кольца матриц порядка  $y_r - y_{r-1}$  над кольцом классов вычетов  $\mathbf{Z} / p^{m_r} \mathbf{Z}$ .

Можно также указать способ нахождения матрицы  $N_\psi$ , обратной к  $N_\varphi$ . Следуя приведенным выше обозначениям, запишем  $N_\varphi = \begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{21} & A_{xx} \end{pmatrix}$  и  $N_\psi = \begin{pmatrix} Y & Y_{12} \\ Y_{21} & B_{xx} \end{pmatrix}$ , где блоки  $A_{xx}$  и  $B_{xx}$  имеют размеры  $(y_x - y_{x-1}) \times (y_x - y_{x-1})$ . Если  $\max(i, j) > y_{x-1}$ , т.е. позиция  $(i, j)$  находится за пределами блока  $Y$ , то элемент  $b_{ij} + p^{\min(n_i, n_j)} \mathbf{Z}$  матрицы  $N_\psi$ , стоящий в

позиции  $(i, j)$ , находится из условия  $D_{ji} = S_{ij} b_{ij}$ , где  $D_{ji}$  есть алгебраическое дополнение (в обычном смысле) к элементу целочисленной матрицы

$$\begin{pmatrix} S_{111} a_{11} & S_{121} a_{12} & \dots & S_{1l1} a_{1l} \\ S_{211} a_{21} & S_{221} a_{22} & \dots & S_{2l1} a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{l11} a_{l1} & S_{l21} a_{l2} & \dots & S_{ll1} a_{ll} \end{pmatrix},$$

стоящему в позиции  $(j, i)$ . Наконец, элементы матрицы  $N_\Psi$ , попадающие в блок  $Y$ , находятся из условия  $Y = X^{-1}(E - X_{12} Y_{21})$ , где  $X^{-1}$  – матрица, обратная к  $X$  в кольце формальных матриц порядка  $u_{x-1}$ , устроенному аналогично кольцу  $R$  (а  $E$  – единичный элемент этого кольца формальных матриц). Таким образом, мы можем свести нахождение обратной матрицы в кольце формальных матриц порядка  $l$  к аналогичной задаче для кольца формальных матриц меньшего порядка, что дает нам конкретный алгоритм для нахождения  $N_\Psi$ .

**Определение 5.1.** Кольцо  $R$  называется  $E$ -кольцом, если отображение, сопоставляющее всякому элементу  $r \in R$  умножение слева на  $r$ , является изоморфизмом между  $R$  и кольцом эндоморфизмов аддитивной группы кольца  $R$ .

$E$ -кольца тесно связаны с факторно делимыми группами:

**Определение 5.2.** Пусть  $n$  – неотрицательное целое число. Группу  $G$  называют факторно делимой группой ранга  $n$ , если ее периодическая часть  $T(G)$  редуцирована и существует свободная подгруппа  $F \subset G$  ранга  $n$ , для которой  $G/F$  – делимая периодическая группа.

Рангом кольца называем ранг без кручения его аддитивной группы. Через  $N(R)$  обозначается множество всех нильпотентных элементов кольца  $R$  (для всякого коммутативного кольца и, в частности, для всякого  $E$ -кольца это множество является идеалом).

Получен следующий критерий, показывающий, при каких условиях аддитивная группа  $E$ -кольца будет факторно делимой:

**Теорема 5.3.** Для всякого  $E$ -кольца  $R$  конечного ранга  $\geq 1$  эквивалентны следующие условия:

- 1)  $R$  – факторно делимая группа.
- 2)  $R/T(R)$  – факторно делимая группа.
- 3)  $N(R/T(R))$  – факторно делимая группа.

Аддитивные группы идеалов вида  $N(R/T(R))$  из теоремы 5.3 можно точно описать:

Теорема 5.4. Для произвольной группы без кручения  $G$  конечного ранга следующие условия эквивалентны:

1) Существует  $E$ -кольцо  $R$  конечного ранга с тем свойством, что  $N(R/T(R))$  и  $G$  изоморфны (как группы).

2) Множество всех простых чисел  $p$  таких, что  $pG = G$ , бесконечно.

Следствие 5.1. Существует смешанное  $E$ -кольцо ранга 2, аддитивная группа которого не является факторно делимой.

Для всякого  $E$ -кольца  $R$  можно естественным образом построить гомоморфизм из  $R$  в прямое произведение всех  $p$ -компонент кольца  $R$ . Авторы работы [19] сформулировали в виде проблемы следующий вопрос: верно ли, что ядро указанного гомоморфизма всегда выделяется в  $R$  прямым слагаемым (т.е. что  $R$  квазирасщепляется)? Удалось решить эту проблему, показав, что ответ отрицателен уже для  $E$ -колец ранга 3.

З а к л ю ч е н и е . Таким образом, дано описание автоморфизмов конечных  $p$ -групп с помощью формальных матриц. Найден критерий обратимости такой формальной матрицы. Кроме того, получен критерий факторной делимости аддитивной группы  $E$ -кольца. Также построено  $E$ -кольцо ранга 3, не являющееся квазирасщепляющимся, что дает ответ на одну из проблем Боушелла и Шульца [19]. Тем самым получены все результаты, запланированные на 2022 год. По итогам исследований подготовлена и отправлена на рассмотрение в «Сибирский математический журнал» совместная с М.Н. Зоновым статья « $E$ -кольца и факторно делимые абелевы группы», оставшаяся часть результатов готовится к публикации.

## 1.6 Обобщенные группы Басса

Введение. В 1990 г. Басс [20] поставил вопрос о возможности вложении математического объекта в собственный гомоморфный образ. В [21] рассмотрен этот тип проблемы в контексте абелевых групп: абелева группа  $G$  названа бассовой, если существование инъективного гомоморфизма  $f: G \rightarrow G/N$  для некоторой подгруппы  $N \leq G$  влечет  $N = 0$ . В данной работе получено полное описание бассовых абелевых групп. Та же группа исследователей перешла к рассмотрению обобщенного свойства Басса (обобщенных групп Басса) для абелевых групп: из существования инъективного гомоморфизма  $A \rightarrow A/I$  для группы  $A$  с подгруппой  $I$  следует выделение  $I$  прямым слагаемым в  $A$ .

В [51, 52] изучались цоколи вполне инвариантных и характеристических подгрупп, в [22, 53] цоколи вполне инертных и характеристически инертных подгрупп. Новое исследование посвящено слабо характерно инертным цокольно-регулярным группам.

Имеется весьма обширная литература, посвященная транзитивным, вполне транзитивным и транзитивным по Крылову абелевым группам. Рассматривались как группы без кручения,  $p$ -группы и смешанные группы. Транзитивным и вполне транзитивным группам без кручения посвящена часть известной книги [23].

**Методы.** Для исследования обобщенных групп Басса были использованы общие методы теории абелевых групп; а также методы и приемы, разработанные при исследовании групп Басса в [21]. Методы, примененные при изучении цоколей вполне инвариантных и характеристических подгрупп, были доработаны для исследования слабо характерно инертно цокольно-регулярных групп. Для исследования взаимосвязей между транзитивными, вполне транзитивными и транзитивными по Крылову абелевых групп без кручения были использованы методы и результаты, разработанные при изучении этих классов групп, которые были усовершенствованы для применения к случаю групп без кручения.

**Результаты и обсуждения.** Заметим, что в некоторых ситуациях понятия групп Басса и обобщенных групп Басса совпадают.

**Предложение 6.1.** Если  $G$  является ко-хопфовой группой, то  $G$  будет обобщенной группой Басса тогда и только тогда, когда  $G$  является группой Басса.

**Предложение 6.2.** Если  $G = \bigoplus_{\alpha} A$  есть обобщенная группа Басса, где кардинал  $\alpha$  бесконечен, то  $A$  есть периодическая группа, каждая  $p$ -компонента которой является элементарной  $p$ -группой.

**Предложение 6.3.** Группа  $G$  без кручения является обобщенной группой Басса тогда и только тогда, когда  $G$  является группой Басса; эквивалентно тогда и только тогда, когда  $G$  имеет конечный ранг.

**Предложение 6.4.** Расщепляющаяся смешанная группа  $G = T \oplus X$ , где  $T$  – смешанная группа, а  $X$  группа без кручения, является обобщенной бассовой тогда и только тогда, когда обе  $T, X$  являются обобщенными бассовыми группами.

Напомним, что две подгруппы  $H, K$  группы  $G$  называются **с о з м е р и м ы м и**, если пересечение  $H \cap K$  имеет конечный индекс одновременно в  $H$  и  $K$ ; далее это обозначается для удобства через  $H \sim K$ ; хорошо известно, что это отношение эквивалентности.

**Определение 6.1.** Группа  $G$  называется вполне инертно цокольно-регулярной (соответственно, характерно инертно цокольно-регулярной), если для всех бесконечных вполне инертных (соответственно, характерно инертных) подгрупп  $H$  из  $G$  существует ординальное число  $\alpha$ , зависящее от  $H$  такое, что  $H[p] \sim p^{\alpha}G[p]$ ; альтернативно  $G$  называется слабо вполне инертно цокольно-регулярной, если для всех бесконечных вполне инертных

подгрупп  $H$  из  $G$  существует ординальное число  $\alpha$ , зависящее от  $H$  такое, что  $p^\alpha G \neq 0$  и  $H \cap p^\alpha G[p]$  имеет конечный индекс в  $p^\alpha G[p]$ .

**Теорема 6.1.** Если  $G$  является сепарабельной слабо характерно инертно цокольно-регулярной  $p$ -группой, то  $G$  является характерно инертно цокольно-регулярной.

**Предложение 6.5.** Группа  $G$  является слабо вполне инертно цокольно-регулярной тогда и только тогда, когда квадрат  $G \oplus G$  является слабо характерно инертно цокольно-регулярным.

Подробно изучены свойства рассматриваемых групп и получено описание этих групп в ряде классов групп. Так, справедлива

**Теорема 6.2.** Каждая периодически полная группа является характерно инертно цокольно-регулярной.

**Определение 6.2.** Группа  $G$  называется транзитивной, если для любых двух ее элементов  $x, y$  с условием на их характеристики  $\chi_G(x) = \chi_G(y)$  существует автоморфизм группы  $G$ , отображающий  $x$  в  $y$ ; и вполне транзитивной, если для любых двух элементов  $x, y$  с условием  $\chi_G(x) \leq \chi_G(y)$ , существует эндоморфизм  $\phi$  группы  $G$  со свойством  $\phi(x) = y$ .

**Определение 6.3.** Группа  $G$  называется транзитивной по Крылову, если для любых элементов  $x, y \in G$  с условием  $\chi_G(x) = \chi_G(y)$  существует эндоморфизм  $G$ , отображающий  $x$  на  $y$ .

**Определение 6.4.** Группа  $G$  называется слабо транзитивной, если для любой пары элементов  $x, y \in G$  и эндоморфизмов  $\phi, \psi$  группы  $G$  таких, что  $\phi(x) = y, \psi(y) = x$ , существует автоморфизм  $\eta$  группы  $G$  со свойством  $\eta(x) = y$ .

**Предложение 6.6.** Если  $G = \prod_{i \in I} G_i$  - векторная группа без кручения, где все прямые множители  $G_i$  имеют ранг 1 с одинаковым типом, то  $G$  является как вполне транзитивной, так и транзитивной группой.

**Предложение 6.7.** Если  $G$  - разложимая однородная вполне транзитивная группа без кручения, то  $G$  транзитивна.

**Предложение 6.8.** Если  $G$  - однородная транзитивная группа без кручения, то произведение  $\prod_\alpha G$  является транзитивным для всех ординальных чисел  $\alpha > 1$ .

**Пример 6.1.** Существует транзитивной по Крылову группа, которая не является ни вполне транзитивной, ни транзитивной (и, следовательно, не слабо транзитивной).

Этот пример утвердительно отвечает на проблему 44 из [23].

**Заключение.** Получены все результаты, запланированные на 2022 год, и опубликованы в статьях [A.10, A.11, A.12].

## 1.7 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

**Введение.** Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. По теореме жесткости Мостова [1], любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Важнейшим геометрическим инвариантом является объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести задачу к вычислению объема многогранника. Нахождение объема гиперболического многогранника – очень старая и трудная задача. Объем биортогонального гиперболического тетраэдра (так называемой ортосхемы) был независимо найден Н.И. Лобачевским [2] и Я. Бойяи [51].

Гиперболический тетраэдр  $T$  – это выпуклая оболочка четырех точек в пространстве Лобачевского  $\mathbb{H}^3$ . Эти точки называются вершинами  $T$ . Обозначим их цифрами 1, 2, 3 и 4 (рисунок 5). Пусть  $l_{ij}$  – длина ребра, соединяющего вершины  $i$  и  $j$ , а  $\theta_{ij}$  – двугранный угол вдоль этого ребра.

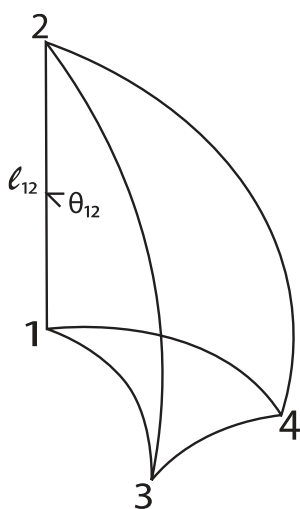


Рисунок 5 – Гиперболический тетраэдр  $T$

Матрица Грама  $G(T)$  тетраэдра  $T$  определяется как

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{14} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} & -\cos\theta_{24} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 & -\cos\theta_{34} \\ -\cos\theta_{14} & -\cos\theta_{24} & -\cos\theta_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Реберная матрица  $E(T)$  состоит из гиперболических косинусов длин ребер и определяется следующим образом:

$$E(T) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{cosh} l_{12} & \operatorname{cosh} l_{13} & \operatorname{cosh} l_{14} \\ \operatorname{cosh} l_{12} & 1 & \operatorname{cosh} l_{23} & \operatorname{cosh} l_{24} \\ \operatorname{cosh} l_{13} & \operatorname{cosh} l_{23} & 1 & \operatorname{cosh} l_{34} \\ \operatorname{cosh} l_{14} & \operatorname{cosh} l_{24} & \operatorname{cosh} l_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что гиперболический тетраэдр  $T$  однозначно с точностью до изометрии определяется либо матрицей Грама  $G(T)$ , либо реберной матрицей  $E(T)$  (например, [52]).

В общем случае формулы для объема гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов независимо получены в работах Г. Сфорца [3], Ю. Чо и Х. Кима [4], Дж. Мураками и М. Яно [5], Д.А. Деревнина и А.Д. Медных [6]. В 2021 г. Н.В. Абросимовым и Б. Выонгом [7] в рамках данного проекта впервые получена явная интегральная формула, выражающая объем произвольного гиперболического тетраэдра через длины его ребер. Все указанные формулы достаточно сложны и не всегда удобны для приложений, в частности, для вычисления объемов многогранников более сложного комбинаторного типа путем разбиения их на тетраэдры. Цель исследования в отчетном 2022 году – отчасти исправить этот пробел и найти сравнительно простую формулу для достаточно широкого множества гиперболических тетраэдров, удобную для дальнейшего использования в приложениях.

Трехпрямоугольный тетраэдр – это тетраэдр, у которого все три угла при одной вершине прямые. Эта вершина называется прямым углом трехпрямоугольного тетраэдра, а грань, противоположная ей, называется основанием. Три ребра, сходящиеся под прямым углом, называются катетами трехпрямоугольного тетраэдра.

Многогранник Коксетера – это многогранник, все двугранные углы которого имеют вид  $\pi/n$ . Ф. Ланнер [53] доказал, что в  $\mathbb{H}^3$  имеется ровно 9 компактных тетраэдров Коксетера. Один из них  $T(\pi/2, \pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/5, \pi/2)$  представляет собой трехпрямоугольный тетраэдр. Остальные 8 тетраэдров Коксетера являются ортосхемами. Для триангуляции более сложных многогранников в  $\mathbb{H}^3$  можно использовать как ортосхемы, так и трехпрямоугольные тетраэдры, не обязательно коксетеровские.

В настоящей работе мы рассматриваем треугольный тетраэдр в гиперболическом пространстве, заданном длинами катетов  $l_1, l_2, l_3$ . Удастся получить относительно простые формулы для него, выражающие объем и площадь поверхности. Это позволяет найти нормированный объем и исследовать его асимптотику.

Методы. Модель Пуанкаре  $\mathbb{H}^3$  это верхнее полупространство  $R_+^3 = \{(x, y, z) \in R^3 | z > 0\}$ , снабженное метрикой  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$ . Граница  $\partial\mathbb{H}^3 = \{(x, y, 0) \in R^3\}$  состоит из бесконечно удаленных точек и называется абсолютом. Элемент объема в этой модели имеет вид ([52], гл. 7, п. 2.3)  $dV = \frac{dx dy dz}{z^3}$ . Нахождение известных ранее



формулы для объема гиперболического тетраэдра как правило опирались на исследование точных решений дифференциального уравнения типа Шлефли, которое в случае гиперболического тетраэдра имеет вид  $-dV = \sum_{ij} l_{ij} d\theta_{ij}$ , где суммирование ведется по всем ребрам. В настоящей работе мы не исследуем решения уравнения Шлефли, а вместо этого используем интегрирование по элементу объема в  $\mathbb{H}^3$ . Затем с помощью формулы Фубини переходим от тройного интеграла к интегралу по проекции тетраэдра на плоскость абсолюта.

**Результаты и обсуждения.** Рассмотрим трехпрямоугольный тетраэдр  $T = T(l_1, l_2, l_3)$ , заданный длинами своих катетов (т. е. попарно ортогональных ребер). Пронумеруем его вершины  $1, \dots, 4$  так, чтобы  $l_{13} = l_1, l_{14} = l_2, l_{12} = l_3$ . Существует изометрия  $\mathbb{H}^3$ , которая переводит вершину 1 в точку  $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}_+^3$ , направляет ребро  $l_3$  вдоль оси  $Oz$  и помещает вершины 3 и 4 в координатные плоскости  $Oxz, Oyz$  соответственно (рисунок 6). Будем называть такую конфигурацию тетраэдра  $T$  в  $\mathbb{R}_+^3$  *стандартным положением*. Далее будем считать без ограничения общности, что  $T$  уже находится в таком положении.

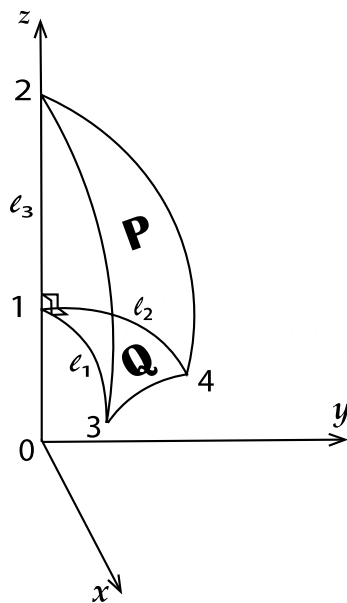


Рисунок 6 – Трехпрямоугольный гиперболический тетраэдр  $T$  в стандартном положении

Основной результат состоит в получении формулы для объемов трехпрямоугольных тетраэдров в пространстве Лобачевского.

**Теорема 7.1** Пусть  $T = T(l_1, l_2, l_3)$  – компактный гиперболический тетраэдр, заданный длинами трех своих попарно ортогональных ребер. Тогда объем  $V = V(T)$  задается формулой

$$V = \int_0^{\tanh l_1} \int_0^{\frac{\tanh l_2 (\tanh l_1 - x)}{\tanh l_1}} \left[ \frac{1}{1-x^2-y^2} + \frac{1}{x(x-2x_0) + y(y-2y_0) - e^{2l_3}} \right] dx dy$$

где  $x_0 = \frac{1-e^{2l_3}}{2 \tanh l_1}$  и  $y_0 = \frac{1-e^{2l_3}}{2 \tanh l_2}$ .

При  $l \rightarrow \infty$  объем стремится к 1/8 объема правильного идеального октаэдра, т.е.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V(T) = \frac{1}{2} G = 0,457982797 \dots,$$

где  $G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0.9159655941 \dots$  – константа Каталана.

В работе О. Немуля и Н. Мебарки [54] приведен нормированный объем компактного правильного гиперболического тетраэдра. Найдем его для рассматриваемого 3-параметрического семейства тетраэдров. Следуя [54], определим нормированный объем как  $v(T) = \frac{V}{S^{3/2}}$ , где  $V$  – объем  $T$ , и  $S$  – площадь его поверхности.

Пусть  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  — площади прямоугольных граней 1–2–3, 1–2–4, 1–3–4 соответственно, а  $\mathbf{W}$  — площадь основания 2–3–4 (рисунок 7).

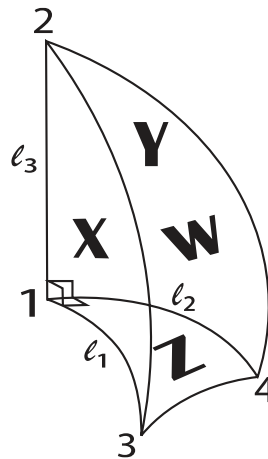


Рисунок 7 – Площади граней тетраэдра  $T$

Один из аналогов формулы Герона для площади гиперболического треугольника известен как формула Билинского [55]. С ее помощью после некоторых преобразований можно получить выражения для площадей прямоугольных граней тетраэдра  $T$ :

$$\mathbf{X} = 2 \arctan \left( \tanh \frac{l_1}{2} \tanh \frac{l_3}{2} \right),$$

$$\mathbf{Y} = 2 \arctan \left( \tanh \frac{l_2}{2} \tanh \frac{l_3}{2} \right),$$

$$\mathbf{Z} = 2 \arctan \left( \tanh \frac{l_1}{2} \tanh \frac{l_2}{2} \right).$$

Затем мы используем гиперболическую версию теоремы Де Гуа для граней тетраэдра, предложенную Б. Макконнеллом [56], чтобы получить площадь последней грани

$$W = 2 \arccos \frac{1 - \tanh^2 \frac{l_1}{2} \tanh^2 \frac{l_2}{2} \tanh^2 \frac{l_3}{2}}{\sqrt{\left(1 + \tanh^2 \frac{l_1}{2} \tanh^2 \frac{l_3}{2}\right) \left(1 + \tanh^2 \frac{l_2}{2} \tanh^2 \frac{l_3}{2}\right) \left(1 + \tanh^2 \frac{l_1}{2} \tanh^2 \frac{l_2}{2}\right)}}.$$

Таким образом, нормированный объем  $v(T) = \frac{V}{S^{3/2}}$ , где  $V$  вычисляется по теореме 7.1 и  $S = X + Y + Z + W$ .

Чтобы найти асимптотику нормированного объема, возьмем  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ . При  $l \rightarrow \infty$  площади граней  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  стремятся к  $\pi/2$  как площади прямоугольных треугольников с двумя вершинами на бесконечности. Площадь грани  $W$  стремится к  $\pi$  как площадь правильного идеального треугольника. Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S = \frac{5\pi}{2} \text{ и } \lim_{l \rightarrow \infty} v = \frac{V}{S^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}G}{(5\pi)^{3/2}} = 0,0208071557\dots,$$

где  $G = 0.9159655941 \dots$  – константа Каталана.

Рассмотрим поведение нормированного объема  $v(T) = v(l)$  для случая  $l_1 = l_2 = l_3 = l$  (рисунок 8). Он монотонно убывает при  $l \in (0, +\infty)$ .

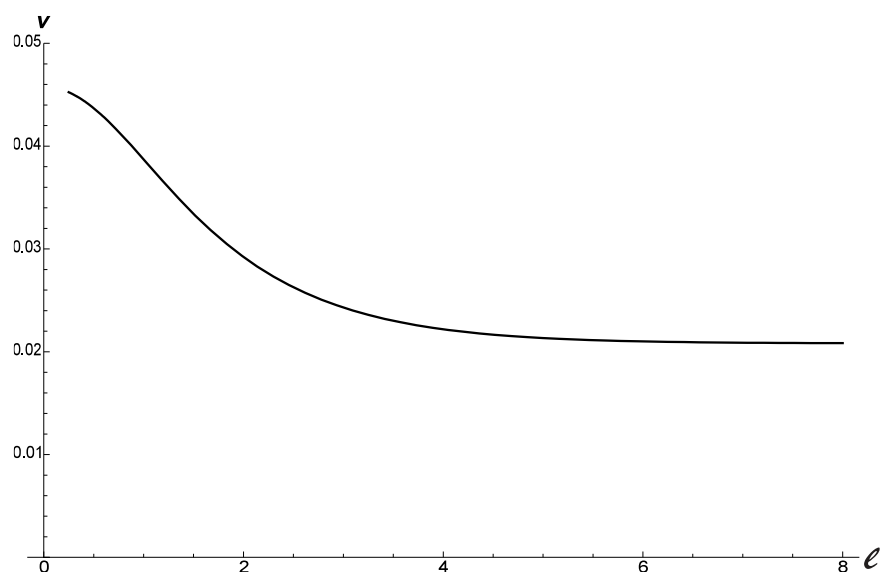


Рисунок 8 – График нормированного объема тетраэдра  $T$

**З а к л ю ч е н и е.** Изучено трехпараметрическое семейство так называемых трехпрямоугольных тетраэдров в пространстве Лобачевского, у которых три ребра при одной из вершин попарно ортогональны. С помощью нового подхода, получена простая формула для объемов таких тетраэдров, а также формула для их объема, нормированного по площади поверхности. Изучено асимптотическое поведение функций объема и нормированного объема. Таким образом, все запланированные на отчетный период работы

выполнены полностью. Участник проекта Вьонг Хыу Бао в 2022 году представил свою кандидатскую диссертацию на тему «Аналитические методы в теории многогранников и орбифолдов, моделируемых в трехмерных пространствах постоянной кривизны» (научные руководители Н. В. Абросимов и А. Д. Медных). Подготовлена и сдана в печать статья по полученным в отчетном году результатам: N. Abrosimov, S. Stepanishchev, The volume of a trirectangular hyperbolic tetrahedron // Siberian Electronic Mathematical Reports (Q2 by Scopus).

### **1.8 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных углеводородных топлив с применением оптических методов и математического моделирования**

**Введение.** В настоящее время изучение процессов, происходящих при сгорании метановоздушных смесей, представляет большой интерес для научных и практических целей. Как правило, основной интерес представляет изучение процессов горения в различных топочных устройствах, на электростанциях и других энергетических установках. Поскольку метан обладает высокой теплотой сгорания, низкой стоимостью, нетребовательностью к эксплуатационным свойствам горелок, применение метана широко распространено в различных отраслях промышленности. При моделировании процессов, происходящих при горении метановоздушных смесей, рассматриваются как детальные кинетические механизмы горения, так и упрощенные одностадийные модели [57, 58].

На практике значительный интерес представляет горение метана в воздушном потоке, которое реализуется в диффузионном режиме [59, 60]. В этом режиме скорость горения ограничивается неравномерным распределением компонентов топливной смеси на выходе из сопловой части нагревательного устройства. В связи с этим в настоящее время актуальным остается проведение расчетных и экспериментальных исследований различных способов воздействия на факел пламени, приводящих к интенсификации смешения и горения метана с воздухом. К основным видам таких воздействий можно отнести пульсации давления в виде звуковых колебаний.

Воздействие акустических колебаний на факел пламени приводит к пульсации скорости и температуры в зоне горения [61, 62, 63], что приводит к интенсификации смешения топлива с окислителем. Кроме того, влияние акустических колебаний приводит к изменению диапазонов устойчивого горения воздушно-метановой смеси. В большинстве работ, посвященных влиянию акустических колебаний на горение метана, топливная смесь рассматривается как предварительно перемешанная [64, 65]. Также одной из возможных формулировок задачи является местоположение источника акустических колебаний. Он может быть расположен в газовом канале, вызывая в нем пульсации давления определенной

частоты и амплитуды. Такое расположение источника колебаний проще всего реализовать на практике. Помимо этой модификации, можно встретить работы, в которых источник акустических колебаний расположен перпендикулярно направлению распространения пламени [66].

В связи с этим актуальным является проведение расчетно-экспериментальных исследований по определению влияния пульсаций скорости воздушного потока, вызванных акустическим воздействием, на структуру диффузионного пламени при струйном горении метана. Одним из способов численного описания процессов горения является численное решение системы уравнений Навье-Стокса для реагирующего многокомпонентного газа в нестационарной постановке. При численном решении системы уравнений Навье-Стокса важно установить связь между турбулентным потоком и процессом горения. Следует отметить, что все математические модели требуют подтверждения экспериментальными данными.

Методы. При двумерном моделировании нестационарного процесса горения метановоздушной смеси использовался программный пакет Ansys для построения геометрии расчетной области и задания сетки, а также решатель Fluent. При моделировании процесса горения в Ansys Fluent решалась полная система уравнений Навье-Стокса (уравнение неразрывности и уравнение движения), уравнение энергии, уравнение состояния газа и уравнения для скалярных величин, описывающих концентрацию химических веществ, участвующих в реакции горения [67]. Описанная система уравнений решалась методом конечных объемов. Размер расчетной области составлял  $500 \times 200$  мм, а размер горелки -  $20 \times 4$  мм. Количество ячеек расчетной сетки составило 101005 шт. Геометрия расчетной области показана на рисунке 9.

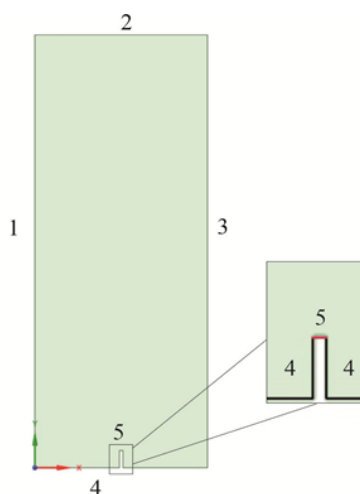
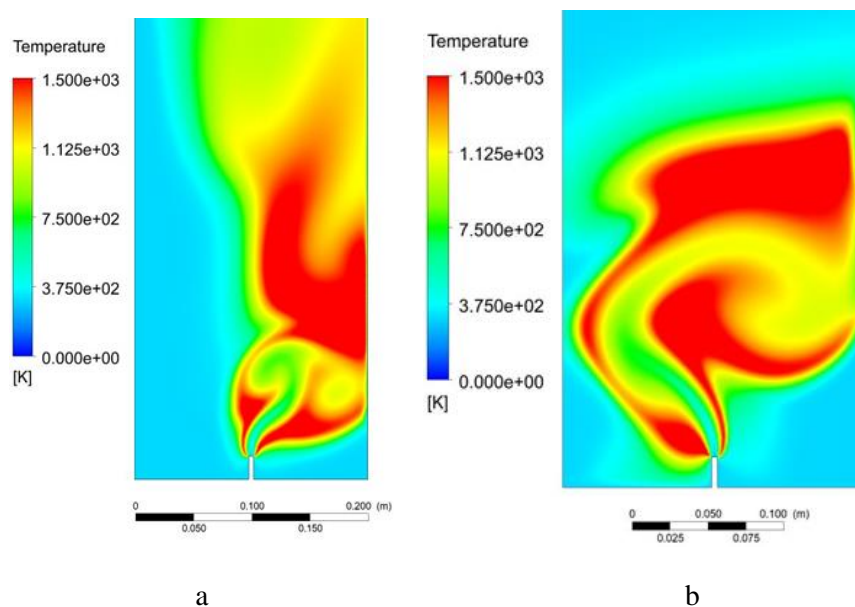


Рисунок 9 – Геометрия расчетной области. Цифрами обозначены номера границ расчетной области

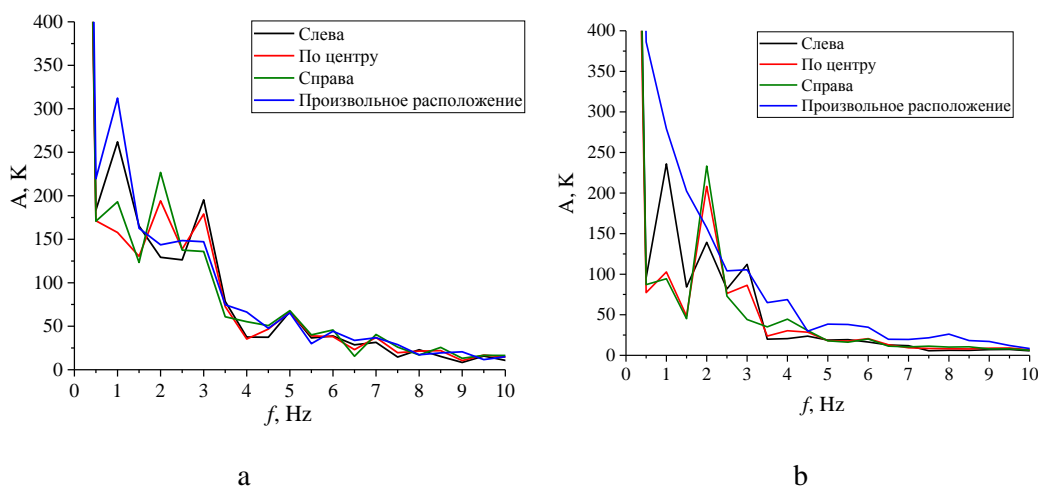
Для математического моделирования использовались следующие настройки: модель, описывающая турбулентное течение - стандартная  $k-\epsilon$  модель со стандартными пристенными функциями; модель горения – одностадийная необратимая реакция горения стехиометрической метановоздушной смеси; модель скорости химической реакции - модель вихревой диссипации (EDM). Граничные условия на стенках № 1, № 2 и № 3 задавались по типу давление-выброс со стандартными настройками и заданием притока окислителя  $O_2$  на стенку. Для реализации условия пульсации давления изменение давления на стенке № 1 задавалось в виде функции, имеющей вид  $P_0 \sin(\omega t)$ , где параметр  $\omega$  изменялся в соответствии с исследуемой частотой воздействия от 0 до 10 Гц (с шагом 1 Гц),  $P_0$  – параметр, отвечающий за величину максимальной амплитуды пульсации давления, который был равен 0.1 Па. Граничные условия на стенке № 4 были типа непроницаемой, теплоизолированной стенки - "Wall" с постоянной температурой 300 К. Граничные условия на стенке № 5 были типа "Velocity inlet", с постоянной скоростью истечения горючего газа  $CH_4$ , равной 0.5 м/с и 1 м/с.

Результаты и обсуждения. В результате двумерного математического моделирования процесса горения метановоздушной смеси были получены профили мгновенной температуры в факеле пламени (рисунок 10) при различных режимах внешних воздействий. Применяя алгоритм быстрого преобразования Фурье к этим данным, были получены соответствующие спектры пульсаций температуры в факеле пламени (рисунок 11).



a –  $v = 0.5$  м/с, b –  $v = 1.0$  м/с;

Рисунок 10 – Мгновенное поле температуры в факеле пламени метана при наличии внешних пульсаций давления с частотой 1 Гц



a –  $v = 0.5$  м/с, b –  $v = 1.0$  м/с;

Рисунок 11 – Спектры изменения температуры в факеле пламени метана при наличии внешних пульсаций давления с частотой 1 Гц, полученные для различных положений контрольных точек относительно выходной части горелки

В результате анализа полученных спектров, можно сделать вывод, что на всех них присутствует характерная частота, соответствующая частоте пульсации внешнего источника возмущения. Помимо этого, на полученных спектрах прослеживается наличие двух гармоник. Например, 4 и 6 Гц для частоты пульсации давления 2 Гц; 6 и 9 Гц для частоты пульсации давления 3 Гц для режимов течения метана со скоростью 0.5 м/с и 1.0 м/с. При увеличении частоты внешнего воздействия наблюдается уменьшение амплитуды пульсации пламени, за счет чего на спектре остается ярко выражена лишь несущая частота внешнего воздействия и первая гармоника. Проведена оценка изменения максимальной амплитуды пульсации температуры для рассмотренных в исследовании режимов.

**Заключение.** В результате математического моделирования процесса диффузного горения метана при наличии внешних пульсаций давления с определенной частотой и амплитудой показано, что наличие пульсаций давления приводит к незначительному повышению температуры, что является следствием интенсификации перемешивания топлива с окислителем. Акустическое воздействие позволяет обеспечить полноту сгорания метана. При увеличении частоты внешнего воздействия наблюдается уменьшение амплитуды пульсации пламени, за счет чего на спектре остается ярко выражена лишь несущая частота внешнего воздействия и первая гармоника.

На основании полученных результатов исследования можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.14].

### **1.9 Антиподальные октаэдры в трехмерном гиперболическом пространстве**

**Введение.** Гиперболические структуры на трехмерных многообразиях – важная тема маломерной топологии. Теория получила быстрое развитие в 70-х годах благодаря У. П. Терстону, который получил ряд важных результатов. Он показал, что многие компактные трехмерные многообразия допускают единственную гиперболическую структуру. Его гениальность и много лет плодотворных исследований привели его к предложению гипотезы геометризации в 1982 году. Отсюда следует несколько других гипотез, таких как гипотеза Пуанкаре и гипотеза Терстона об эллиптизации. Он предложил доказательство гипотезы геометризации для случая многообразий Хакена, используя в качестве основного инструмента теорему Андреева [68]. Работа Терстона произвела революцию в мире низкоразмерной топологии. В начале 2000-х Г. Перельман дал доказательство полной гипотезы геометризации Терстона. А. Пуанкаре первым получил конструкцию гиперболических многообразий путем склейки парных граней конечного набора трехмерных гиперболических конечных многогранников. Замечательным примером такой конструкции является пространство Зейферта-Вебера, полученное склейкой противоположных граней правильного додекаэдра. Гиперболическое многообразие, построенное таким образом, имеет конечный объем и объем равен сумме объемов гиперболических многогранников. Теорема Мостова-Прасада о жесткости [1, 69] утверждает, что гиперболическая структура трехмерного гиперболического многообразия конечного объема однозначно определяется его гомотопическим типом. Таким образом, геометрический инвариант, такой как объем, можно использовать для определения новых топологических инвариантов. Актуальность проблемы вычисления гиперболических объемов многогранника обусловлена теоремой жесткости Г. Д. Мостова. Исследователи К. Петронио, Д. Херд, Э. Первова классифицировали [70, 71] компактные ориентируемые 3-многообразия, которые можно получить, попарно склеивая грани октаэдра и затем удаляя открытые регулярные окрестности особых точек. Из этого набора 132 многообразия являются гиперболическими. В предыдущих работах [72, 73, 74] Н. Абросимова и др. приведены некоторые формулы объема для октаэдров с различными типами симметрии. В данном проекте Х.Б. Вьонгом изучены антиподальные октаэдры в трехмерном гиперболическом пространстве. Установлен критерий существования компактного



антиподального гиперболического октаэдра. Получена явная интегральная формула для объема гиперболического октаэдра, имеющего антиподальную симметрию.

**Методы.** Для решения вопроса о существовании гиперболического октаэдра использовались комбинаторного подхода с применения инструментов аналитической геометрии. Разделив октаэдр на соответствующие тетраэдры, мы получим явную интегральную формулу объема гиперболического антиподального октаэдра.

**Результаты и обсуждение.**

**Определение:** Антиподальным преобразованием относительно точки  $C$  в трехмерном гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  называется отображение  $A: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Отображение  $A$  определяется таким образом, что для каждой точки  $x \in \mathbb{H}^3$  точка  $C$  является серединой отрезка геодезической прямой между  $x$  и  $A(x)$ . Точка  $C$  является симметричным центром.

**Определение:** Антиподальная симметрия в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  – это симметрия относительно антиподального преобразования.

На рисунке 12 описывается антиподальный октаэдр  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$ , определяемый через длины его ребер  $a, b, c, d, e, f$ , с симметричным центром  $C$ , шестью вершинами  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ .

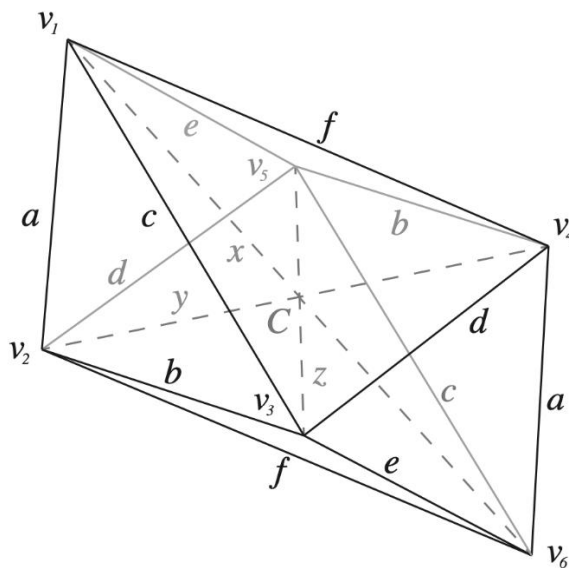


Рисунок 12 – Антиподальный октаэдр  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$

Рассмотрим гиперболический антиподальный октаэдр  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$ , определенный через длины ребер  $a, b, c, d, e, f$ , с симметричной центр  $C$ , шесть вершин  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  (см. рисунок 1). Антиподальная симметрия приводит нас к изучению

медиан в гиперболическом треугольнике, что имеет решающее значение для условий существования антиподального октаэдра  $\mathcal{O}$ . Имеем следующую лемму.

**Лемма 9.1** Пусть  $\Delta(u, v, w)$  – компактный гиперболический треугольник, определяемый длинами сторон  $u, v$  и  $w$ . Пусть  $m_u, m_v, m_w$  – длины медиан, соответствующих стороне  $u, v, w$  соответственно. Тогда в треугольнике  $\Delta$  выполняются следующие уравнения.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} m_w &= \frac{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v}{2 \operatorname{ch} \frac{w}{2}}; \\ \operatorname{ch} m_u &= \frac{\operatorname{ch} v + \operatorname{ch} w}{2 \operatorname{ch} \frac{u}{2}}; \\ \operatorname{ch} m_v &= \frac{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} w}{2 \operatorname{ch} \frac{v}{2}}.\end{aligned}$$

**Теорема 9.1** Компактный гиперболический антиподальный октаэдр  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$  с длинами ребер  $a, b, c, d, e, f$  существует в  $\mathbb{H}^3$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned}(\operatorname{ch} c + \operatorname{ch} e)(\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} d) &> 2(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} f); \\ (\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} f)(\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} d) &> 2(\operatorname{ch} c + \operatorname{ch} e); \\ (\operatorname{ch} c + \operatorname{ch} e)(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} f) &> 2(\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} d); \\ a + b > c > |a - b|; \\ d + f > e > |d - f|.\end{aligned}$$

$$C + S \geq \sqrt{\frac{(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} f)(\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} d)}{2(\operatorname{ch} c + \operatorname{ch} e)}} \geq C - S$$

где

$$\begin{aligned}C &= \operatorname{ch} b \operatorname{ch} d - \operatorname{csch}^2 c (\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)(\operatorname{ch} d \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} f) \\ S &= \operatorname{csch}^2 c \sqrt{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}(b+c))(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}(b-c))} \\ &\quad \times \sqrt{(\operatorname{ch} f - \operatorname{ch}(d+c))(\operatorname{ch} f - \operatorname{ch}(d-c))}\end{aligned}$$

**Лемма 9.2** Пусть  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$  – компактный гиперболический антиподальный октаэдр, заданный длинами ребер  $a, b, c, d, e, f$  (рисунок 12). Обозначим через  $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d, \theta_e, \theta_f$  двугранные углы тетраэдра  $T_1(v_1, v_2, v_3, v_5)$  по ребрам  $a, b, c, d, e, z$ . А через  $\theta_{b_2}, \theta_{c_2}, \theta_{d_2}, \theta_{e_2}, \theta_{f_2}, \theta_{z_2}$  обозначаются двугранные углы тетраэдра  $T_1(v_1, v_3, v_4, v_5)$  по ребрам  $b, c, d, e, f, z$  соответственно. Тогда выполняются следующие уравнения

$$\begin{aligned}\cos \theta_a &= \frac{-c_{43}}{\sqrt{c_{44} \cdot c_{33}}}, \quad \cos \theta_{c_1} = \frac{-c_{42}}{\sqrt{c_{44} \cdot c_{22}}}, \quad \cos \theta_{e_1} = \frac{-c_{41}}{\sqrt{c_{44} \cdot c_{11}}}, \\ \cos \theta_{b_1} &= \frac{-c_{32}}{\sqrt{c_{33} \cdot c_{22}}}, \quad \cos \theta_{d_1} = \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{33} \cdot c_{11}}}, \quad \cos \theta_{z_1} = \frac{-c_{21}}{\sqrt{c_{22} \cdot c_{11}}}, \\ \cos \theta_f &= \frac{-c'_{43}}{\sqrt{c'_{44} \cdot c'_{33}}}, \quad \cos \theta_{d_2} = \frac{-c'_{42}}{\sqrt{c'_{44} \cdot c'_{22}}}, \quad \cos \theta_{b_2} = \frac{-c'_{41}}{\sqrt{c'_{44} \cdot c'_{11}}}, \\ \cos \theta_{c_2} &= \frac{-c'_{32}}{\sqrt{c'_{33} \cdot c'_{22}}}, \quad \cos \theta_{e_2} = \frac{-c'_{31}}{\sqrt{c'_{33} \cdot c'_{11}}}, \quad \cos \theta_{z_2} = \frac{-c'_{21}}{\sqrt{c'_{22} \cdot c'_{11}}}.\end{aligned}$$

где сомножители  $c_{ij}, c'_{ij}$  реберных матриц  $E_1, E_2$  соответственно и

$$\begin{aligned}\text{ch } z &= \sqrt{\frac{(\text{ch } c + \text{ch } e)(\text{ch } b + \text{ch } d)}{2(\text{ch } a + \text{ch } f)}} \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & \text{ch } a & \text{ch } c & \text{ch } e \\ \text{ch } a & 1 & \text{ch } b & \text{ch } d \\ \text{ch } c & \text{ch } b & 1 & \text{ch } z \\ \text{ch } e & \text{ch } d & \text{ch } z & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & \text{ch } f & \text{ch } d & \text{ch } b \\ \text{ch } f & 1 & \text{ch } c & \text{ch } e \\ \text{ch } d & \text{ch } c & 1 & \text{ch } z \\ \text{ch } b & \text{ch } e & \text{ch } z & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Теорема 9.2** Пусть  $\mathcal{O}(a, b, c, d, e, f)$  – компактный гиперболический антиподальный октаэдр, заданный длинами ребер  $a, b, c, d, e, f$ . Тогда объем  $v = v(\mathcal{O})$  определяется следующей формулой

$$\begin{aligned}Vol(T) &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\theta_{z_1}} \log \frac{c_{34}(x) - \sqrt{-\det G_1(x)} \sin x}{c_{34}(x) + \sqrt{-\det G_1(x)} \sin x} dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{t_2}^{\theta_{z_2}} \log \frac{c'_{34}(y) - \sqrt{-\det G_2(y)} \sin y}{c'_{34}(y) + \sqrt{-\det G_2(y)} \sin y} dy,\end{aligned}$$

где  $t_1, t_2$  – подходящие корни уравнений  $\det G_1(x) = 0$  и  $\det G_2(y) = 0$ ;  $c_{34}, c'_{34}$  являются (3, 4) -минор матриц  $G_1, G_2$  соответственно,

$$\begin{aligned}G_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta_a & -\cos \theta_{c_1} & -\cos \theta_{e_1} \\ -\cos \theta_a & 1 & -\cos \theta_{b_1} & -\cos \theta_{d_1} \\ -\cos \theta_{c_1} & -\cos \theta_{b_1} & 1 & -\cos x \\ -\cos \theta_{e_1} & -\cos \theta_{d_1} & -\cos x & 1 \end{pmatrix}, \\ G_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta_f & -\cos \theta_{d_2} & -\cos \theta_{b_2} \\ -\cos \theta_f & 1 & -\cos \theta_{c_2} & -\cos \theta_{e_2} \\ -\cos \theta_{d_2} & -\cos \theta_{c_2} & 1 & -\cos y \\ -\cos \theta_{b_2} & -\cos \theta_{e_2} & -\cos y & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Кроме того, пределы интегрирования  $\theta_{z_1}$  и  $\theta_{z_2}$  и элементы матриц  $G_1, G_2$  такие же, как в Лемме 9.2.

**З а к л ю ч е н и е .** Изучен гиперболический антиподальный октаэдр: установлены необходимые и достаточные условия существования такой октаэдр в  $\mathbb{H}^3$ . Применяв соответствующую триангуляцию для данного октаэдра, получим явную интегральную формулу объема гиперболического антиподального октаэдра.

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.7].

### 1.10 Группы сингулярных крашенных кос на $n$ нитях

**В в е д е н и е .** Каноническое задание группы кос  $B_n$ ,  $n \geq 2$  на  $n$  нитях данное Э. Артином [75], хорошо известно. Оно имеет образующие  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  и определяющие соотношения:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 2,$$

где порождающему  $\sigma_i$  соответствует диаграмма косы (рисунок 13).

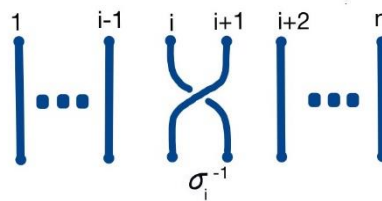


Рисунок 13 – Диаграмма порождающего  $\sigma_i$

Коса называется крашеной, если начало и конец каждой её нити расположены на одном вертикальном уровне.

Существует гомоморфизм группы  $B_n$  на группу подстановок  $S_n$ , переводящий порождающий  $\sigma_i$  в транспозицию  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Ядро этого гомоморфизма называется группой крашенных кос и обозначается символом  $P_n$ .

Дж. Баэс [76] и Дж. Бирман [77] в начале 90-х годов ввели понятие сингулярной косы. Моноид Баэса—Бирман или, как его ещё называют, сингулярный моноид  $SB_n$  определяется как моноид с порождающими  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$  и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2;$$

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \tau_i &= \sigma_i \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1; \\ \tau_i \sigma_j &= \sigma_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2; \\ \sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} &= \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Порождающий  $\tau_i$  представляется как пересечение  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й нитей, как показано на рисунке 14.

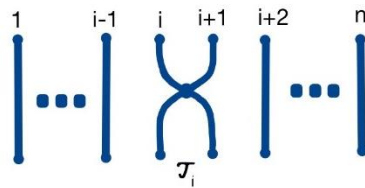


Рисунок 14 – порождающий  $\tau_i$

Р. Фенн Э. Кейман и К. Рурк доказали [78], что моноид Баеса-Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой сингулярных кос:  $SB_n \rightarrow SG_n$ .

Определим отображение  $\pi : SG_n \rightarrow S_n$  заданное на порождающих равенствами:  $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Ядро этого отображения  $ker(\pi)$  будем называть группой сингулярных крашенных кос и обозначать  $SP_n$ .

Из работы [79] следует

Лемма 10.1  $SP_2 = \langle a_{12}, b_{12} \mid a_{12} b_{12} = b_{12} a_{12} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , где  $a_{12} = \sigma_1^2, b_{12} = \sigma_1 \tau_1$ .  $SP_n$  является нормальной в  $SG_2$  и порождающие группы  $SG_2$  действуют на порождающих подгруппы  $SP_n$  по формулам:

$$a_{12}^{\sigma_1} = a_{12}, \quad b_{12}^{\sigma_1} = b_{12}, \quad a_{12}^{\tau_1} = a_{12}, \quad b_{12}^{\tau_1} = b_{12}.$$

Найдены порождающие и определяющие соотношения группы сингулярных крашенных кос на трех нитях [79]. Случай 4-х нитей кардинально отличается от изученного случая в работе [79] и рассмотрен в [80].

Изучив случай 4-х нитей, можно попытаться доказать аналогичные утверждения для произвольного числа нитей. Для группы  $SP_n$  найдена конечная система порождающих и соотношений.

Результаты и обсуждения.

Пусть группа  $G$  имеет представление  $\mathcal{P}(G) = \langle X \mid R \rangle$ .

Обозначим множество порождающих  $X$  через  $\mathcal{G}(G)$ , а множество соотношений  $R$  через  $\mathcal{R}(G)$ . Пусть  $H$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $\bar{G}$  – множество представителей смежных классов  $H$  в  $G$ .

Группа  $H$  называется подгруппой ромашкового типа с выделенным лепестком  $H_0$ , и сопрягающим множеством  $M$ , если  $H_0 \leq H$ ,  $M$  – подмножество  $\bar{G}$ , которое содержит единичный элемент  $e$  из  $G$  и

$$\mathcal{P}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{P}(H_0^m)$$

То есть

$$\mathcal{G}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{G}(H_0^m) \text{ и } \mathcal{R}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{R}(H_0^m).$$

Примеры подгрупп ромашкового типа:

Группа крашенных кос  $P_n$  в  $B_n$ ;

Группа виртуальных крашенных кос  $VP_n$  в  $VB_n$ ;

Группа крашенных кос со спайками  $WP_n$  в  $WB_n$ ;

Группа плоских крашенных виртуальных кос  $FVP_n$  в  $FVB_n$ ;

Группа неограниченных крашенных кос  $UVP_n$  в  $UVB_n$ .

Теорема 10.1 Группа сингулярных крашенных кос  $SP_n$ ,  $n \geq 2$  порождается элементами  $a_{ij}, b_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) и определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{ij} b_{ij} &= b_{ij} a_{ij}; \\ a_{ik}^{-\epsilon} a_{kj} a_{ik}^{\epsilon} &= (a_{ij} a_{kj})^{\epsilon} a_{kj} (a_{ij} a_{kj})^{-\epsilon}; \\ a_{ik}^{-\epsilon} b_{kj} a_{ik}^{\epsilon} &= (a_{ij} a_{kj})^{\epsilon} b_{kj} (a_{ij} a_{kj})^{-\epsilon}; \\ a_{km}^{-\epsilon} a_{kj} a_{km}^{\epsilon} &= (a_{kj} a_{mj})^{\epsilon} a_{kj} (a_{kj} a_{mj})^{-\epsilon}, \quad m < j; \\ a_{km}^{-\epsilon} b_{kj} a_{km}^{\epsilon} &= (a_{kj} a_{mj})^{\epsilon} b_{kj} (a_{kj} a_{mj})^{-\epsilon}, \quad m < j; \\ a_{im}^{-\epsilon} a_{kj} a_{im}^{\epsilon} &= [a_{ij}^{-\epsilon}, a_{mj}^{-\epsilon}]^{\epsilon} a_{kj} [a_{ij}^{-\epsilon}, a_{mj}^{-\epsilon}]^{-\epsilon}, \quad i < k < m; \\ a_{im}^{-\epsilon} b_{kj} a_{im}^{\epsilon} &= [a_{ij}^{-\epsilon}, a_{mj}^{-\epsilon}]^{\epsilon} b_{kj} [a_{ij}^{-\epsilon}, a_{mj}^{-\epsilon}]^{-\epsilon}, \quad i < k < m; \\ a_{im}^{-\epsilon} a_{kj} a_{im}^{\epsilon} &= a_{kj}, \quad k < i < m < j \quad \text{ИЛИ} \quad m < k; \end{aligned}$$

$$a_{im}^{-\epsilon} b_{kj}^{\epsilon} a_{im}^{\epsilon} = b_{kj}, \quad k < i < m < j \quad \text{ИЛИ} \quad m < k;$$

$$b_{im}^{-\epsilon} a_{kj}^{\epsilon} b_{im}^{\epsilon} = a_{kj}, \quad k < i < m < j \quad \text{ИЛИ} \quad m < k;$$

$$b_{im}^{-\epsilon} b_{kj}^{\epsilon} b_{im}^{\epsilon} = b_{kj}, \quad k < i < m < j \quad \text{ИЛИ} \quad m < k;$$

$$b_{ij}^{-\epsilon} (a_{ik} a_{jk}) b_{ij}^{\epsilon} = a_{ik} a_{jk}, \quad i < j < k;$$

$$b_{im}^{-\epsilon} (a_{mj}^{-1} a_{kj} a_{mj}) b_{im}^{\epsilon} = a_{mj}^{-1} a_{kj} a_{mj}, \quad i < k < m;$$

$$b_{im}^{-\epsilon} (a_{mj}^{-1} b_{kj} a_{mj}) b_{im}^{\epsilon} = a_{mj}^{-1} b_{kj} a_{mj}, \quad i < k < m.$$

Теорема 10.2 Группа сингулярных крашенных кос  $SP_n$ ,  $n \geq 5$  является подгруппой ромашкового типа группы  $SG_n$  с выделенным лепестком  $SP_4$ .

В качестве примера, на рисунке 15 представлено строение группы  $SP_5$ .

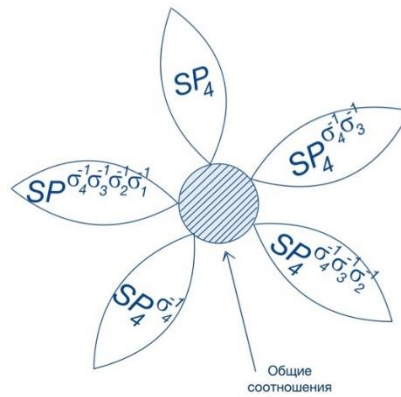


Рисунок 15 – Строение  $SP_5$

Методы. Для нахождения представления группы сингулярных крашенных кос использованы методы комбинаторной теории групп, в частности, метод Рейдемейстера-Шрайера [81], а для исследования структуры этой группы - методы теории групп. Для доказательства теоремы 10.1 использовались идеи из [79], [80]. Также для доказательства теоремы 10.1 и теоремы 10.2 введено понятие подгруппы ромашкового типа, которое представляет и самостоятельный интерес.

З а к л ю ч е н и е. За отчетный период построено конечное представление группы сингулярных крашенных кос  $SP_n$  на  $n$  - нитях. Исследована алгебраическая структура этой группы.

Запланированные на 2022 год результаты получены. Построена система порождающих и определяющих соотношений для группы крашенных сингулярных кос в случае произвольного числа нитей. Полученные результаты выложены в архив и готовятся к публикации [82].

### 1.11 Внутренний модуль полигонального четырехугольника

**Введение.** Пусть  $\Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$  – четырехугольник с границей из отрезков прямых, не содержащий бесконечно удаленную точку. Пусть  $f$  – конформное отображение прямоугольника  $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < M, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$  на четырехугольник  $\Delta$ , причем вершинам четырехугольника  $\Delta$  соответствуют вершины прямоугольника  $P$  (такое отображение  $f$  существует и единственно). Отображение  $f$  называется каноническим для  $\Delta$ . Число  $M$  называется конформным модулем четырехугольника  $\Delta$ .

Конформный модуль четырехугольника также можно определить через модуль семейства кривых или через интеграл Дирихле. Понятие конформного модуля обобщается для односвязной области с четырьмя фиксированными точками на границе, для внешности четырехугольника, для двусвязных и многосвязных областей, и др.

Конформный модуль имеет важные приложения в геометрической теории функций, в задачах математической физики, электронике и др. [83, 84].

Аналитически конформный модуль известен для некоторых частных случаев, в связи с этим есть интерес к развитию численных методов и поиску аналитических подходов. В работе [85] предложен аналитический подход нахождения конформного модуля внутренности четырехугольника, основанный на формуле Кристоффеля-Шварца. В [86] аналогичный результат получен для внешности четырехугольника. В [87] с помощью однопараметрического семейства конформных отображений находится модуль двусвязной области, дополнение которой представляет собой два отрезка.

В данном исследовании получена формула для нахождения конформного модуля внутренности полигонального четырехугольника. Используется однопараметрический метод нахождения конформных отображений, предложенный в работе [88]. Для определения параметров семейства отображений верхней полуплоскости на семейство четырехугольников получена система дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

**Методы.** Рассмотрим семейство четырехугольников  $\Delta(t) = \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$  с вершинами в точках  $A_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Пусть вершины  $A_1(t)$  и  $A_4(t)$  двигаются линейно:  $A_1(t) = A_0 + B_1 t$ ,  $A_4(t) = A_0 + B_4 t$ ; вершины  $A_2$  и  $A_3$  неподвижны. При  $t = 0$  четырехугольник  $\Delta(0)$  вырождается в треугольник. Угол при вершине  $A_k(t)$  равен  $\alpha_k \pi$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , и не зависит от  $t$ .



С помощью метода, предложенного в работе [88], можно определить параметры семейства отображений  $f$  верхней полуплоскости на семейство четырехугольников  $\Delta(t)$ . Таким образом, можно найти каноническое отображение  $f$  для заданного четырехугольника  $\Delta$  и выразить модуль  $\Delta$  через параметры отображения  $f$ .

Результаты и обсуждения.

С помощью однопараметрического метода [88] получен следующий результат.

**Теорема 11.1 Семейство конформных отображений**

$$f(z, x) = c(x) \int_1^z (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} (\zeta + 1)^{\alpha_3 - 1} (\zeta - r(x))^{\alpha_1 - 1} (\zeta + r(x))^{\alpha_4 - 1} d\zeta + A_2$$

отображает верхнюю полуплоскость  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  на семейство многоугольников  $\Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$  с углами  $\alpha_k \pi$  при вершинах  $A_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $A_1(x) = A_0 + B_1 t(x)$ ,  $A_4(x) = A_0 + B_4 t(x)$ ,  $A_2(x) = A_2$ ,  $A_3(x) = A_3$ ,  $x \in [0, X)$ , где  $r(x)$  и  $c(x)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{r}(x) + \dot{r}(x) \left( 2 \frac{\dot{c}(x)}{c(x)} - \frac{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}{x} \right) + \frac{\dot{r}^2(x)}{r(x)} \left( \alpha_1 + \alpha_4 - 2 + \frac{2r^2(x)}{1 - r^2(x)} \right) = 0,$$

$$\frac{\ddot{c}(x)}{c(x)} - \frac{\dot{c}(x)}{c(x)} \frac{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}{x} = \frac{\dot{r}^2(x)}{r(x)(1 - r^2(x))^2} (r(x)(1 - r^2(x))(\alpha_1 + \alpha_4 - 1) - (r(x)(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2 + r(x)(\alpha_4 - \alpha_1))),$$

с начальными условиями  $c(0) = c_0$ ,  $r(0) = 0$ ,

$$\dot{r}(0) = \frac{1}{4} \left( \frac{|A_1 A_4| \sin((\alpha_1 + \alpha_4 - 1)\pi) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_4) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_4 - 1)}{|A_2 A_3| \sin(\alpha_3 \pi) \Gamma(\alpha_4) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_3)} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}}.$$

Функции  $r(x)$  и  $c(x)$  аналитические относительно  $x$ ,  $t(x) = x^{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}$ .

Функции  $r(x)$  и  $c(x)$  можно найти из системы дифференциальных уравнений, приведенных в теореме 2, с помощью рядов или каким-либо численным методом.

С помощью теоремы 11.1 и свойства инвариантности модуля области относительно линейного преобразования области получен следующий результат.

Теорема 11.2 Конформный модуль  $m$  четырехугольника  $\Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$  с углами  $\alpha_k \pi$  при вершинах  $A_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , находится по формуле

$$M(\Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)) = \frac{K(\sqrt{1-r^2})}{2K(r)}, \text{ где}$$

$$r^{\alpha_1 + \alpha_4 - 1} {}_2F_1 \left[ 1, \frac{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_4 + 1}{2}; r^2 \right] = \\ = 4^{1-\alpha_1-\alpha_4} \frac{|A_1 A_4| \sin((\alpha_1 + \alpha_4 - 1)\pi)}{|A_2 A_3| \sin(\alpha_3 \pi)} \frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_4) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_4 - 1)}{\Gamma(\alpha_4) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_3)},$$

${}_2F_1$  – гипергеометрическая функция Гаусса,  $K$  – полный эллиптический интеграл первого рода,  $\Gamma$  – гамма функция.

В перспективе можно развивать используемый здесь однопараметрический метод построения конформных отображений для различных классов областей (двусвязных, круговых многоугольников, отображений из прямоугольника на многоугольник), а также приложение этого метода для нахождения конформного модуля.

**З а к л ю ч е н и е .**

С помощью метода, предложенного в работе [88], найден конформный модуль внутренности прямолинейного четырехугольника. Для параметров семейства отображений полуплоскости на семейство четырехугольников получена система дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

Результаты получены в рамках заявленной тематики развития методов построения конформных отображений. Нахождение конформного модуля относится к приложениям теории конформных отображений.

## **1.12 Численное исследование конвективно-радиационного теплопереноса в полости с перегородкой**

**В в е д е н и е .** Исследование процессов сложного теплообмена в частично перегороданной полости обусловлено рядом важных технических приложений в атомной энергетике, строительной теплофизике, охлаждении микроэлектроники. Исследование особенностей теплопереноса в таких системах на основе методов математического моделирования является актуальным, в связи с необходимостью разработки моделей, отражающих взаимное влияние всех механизмов переноса энергии (конвекции, теплопроводности и излучения) на структуру течения и теплообмен в области решения.

Некоторые из ведущих исследований по оценке влияния перегородок на общий теплообмен представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исследования конвекции в частично перегородженных областях

| Авторы  | Число перегородок | Режим течения | Соотношение сторон | Среда         |
|---|-------------------|---------------|--------------------|---------------|
| Amrofo [89]<br><b>Ошибка! сточник ссылки не найден.</b> | 5                 | Турбулентный  | 2                  | Воздух        |
| Priam et al. [90]                                       | 1                 | Ламинарный    | 1                  | Воздух и вода |
| Saha and Gu [91]  | 1                 | Ламинарный    | 0.2, 0.5, 1        | Воздух        |
| Kandaswamy et al. [92]                                  | 2                 | Ламинарный    | 1                  | Воздух        |
| Khatamifar et al. [93]                                  | 1                 | Ламинарный    | 1                  | Воздух        |
| Wu and Ching [94]                                       | 2                 | Ламинарный    | 0.6 – 0.1          | Воздух        |
| Costa [95]  | 2                 | Ламинарный    | 1                  | Воздух        |

В рамках настоящего проекта проведено численное моделирование конвективно-радиационного теплопереноса в полости с теплопроводной перегородкой. Рассматриваемая область представлена на рисунке 16.

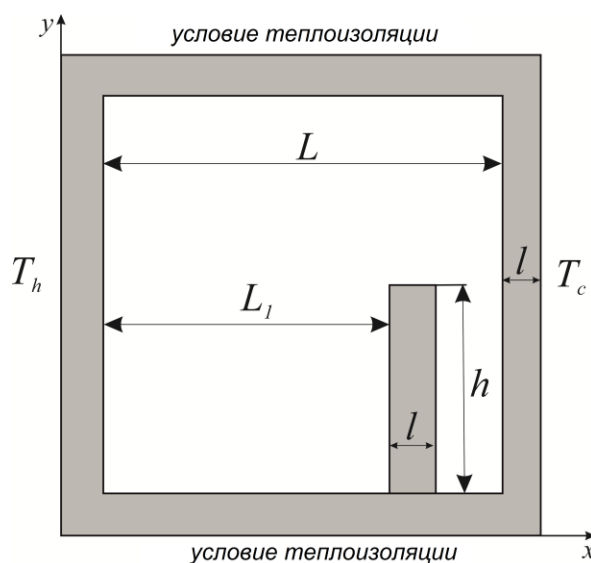


Рисунок 16 – Область решения рассматриваемой задачи

Она представляет собой замкнутую полость с твердыми теплопроводными стенками конечной толщины при наличии твердой теплопроводной перегородки. Внутри полости находится воздух, который считается вязкой ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Теплопроводящая перегородка размещена вертикально на разной высоте внутри полости ( $h/L=0,2, 0,5$  и  $0,7$ ). На внешних вертикальных границах

задаются изотермические граничные условия, на внешних горизонтальных границах задаются условия теплоизоляции. В качестве допущений, используемых при моделировании лучистого теплообмена, можно отметить следующие: внутренние поверхности стенок серые, излучение диффузное.

**Методы.** Для данной постановки система уравнений, описывающих процессы переноса массы, импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + g\beta\Delta T \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( a_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( a_{air} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (c_{1\varepsilon} (P_k + c_{3\varepsilon} G_k) - c_{2\varepsilon} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_w \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

где  $P_k = v_t \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$ ,  $G_k = -\frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y}$ ,  $v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ .

Здесь  $x, y$  – физические координаты;  $u, v$  – составляющие скорости в проекции на оси  $x, y$ , соответственно;  $T$  – температура;  $\Delta T$  – температурный напор;  $t$  – время;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности;  $a_w$  – коэффициент теплопроводности материала твердой стенки;  $\nu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости;  $\beta$  – температурный коэффициент объемного расширения;  $g$  – ускорение свободного падения;  $Pr_t = \nu_t/a_t$  – турбулентное число Прандтля.

Уравнения (2)–(8) с соответствующими граничными и начальными условиями решаются методом конечных разностей. Перед этим систему уравнений приводят к переменным «функция тока-завихренность». В настоящей работе численное исследование процессов тепломассопереноса проводилось в безразмерных переменных. Для

аппроксимации конвективных слагаемых в рассматриваемых уравнениях использовалась схема с донорными ячейками, для диффузионных – центральные разности. Уравнения параболического типа решались с использованием локально-одномерной схемы А. А. Самарского, путем перехода на промежуточный временной слой. Далее с помощью метода прогонки разрешалась полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений. Для дискретизации уравнения Пуассона применялся пятиточечный шаблон “крест” на основе формул симметричной аппроксимации вторых и первых производных. Полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решалась методом последовательной верхней релаксации. Разработанный метод решения был также детально протестирован на множестве модельных задач.

Результаты и обсуждения. Для установления основных закономерностей процессов тепломассопереноса в рассматриваемой области (рисунок 16) проведена серия численных экспериментов. Численные исследования краевой задачи проводилось при следующих значениях безразмерных комплексов: высота перегородки ( $h/L = 0.2, 0.5$  и  $0.7$ ), степень черноты внутренних поверхностей ( $\tilde{\varepsilon} = 0.3, 0.6$  и  $0.9$ ), число Рэлея ( $Ra = 10^9, 1.5 \cdot 10^9$  and  $10^{10}$ ), относительный коэффициент теплопроводности ( $\lambda_{w,air} = 10, 100, 1000$  и  $10000$ ). Предполагается, что теплофизические свойства воздуха не зависят от температуры.

На рисунке 17 представлены распределения изотерм и изолиний функции тока. Увеличение коэффициента теплопроводности в 10 раз за счет увеличения теплопроводности материала стенки приводит к более интенсивному охлаждению (нагреву) полости. В области решения формируется одна глобальная конвективная структура. Ее появление обусловлено несколькими причинами, главным образом воздействием внешней среды и геометрией области решения.

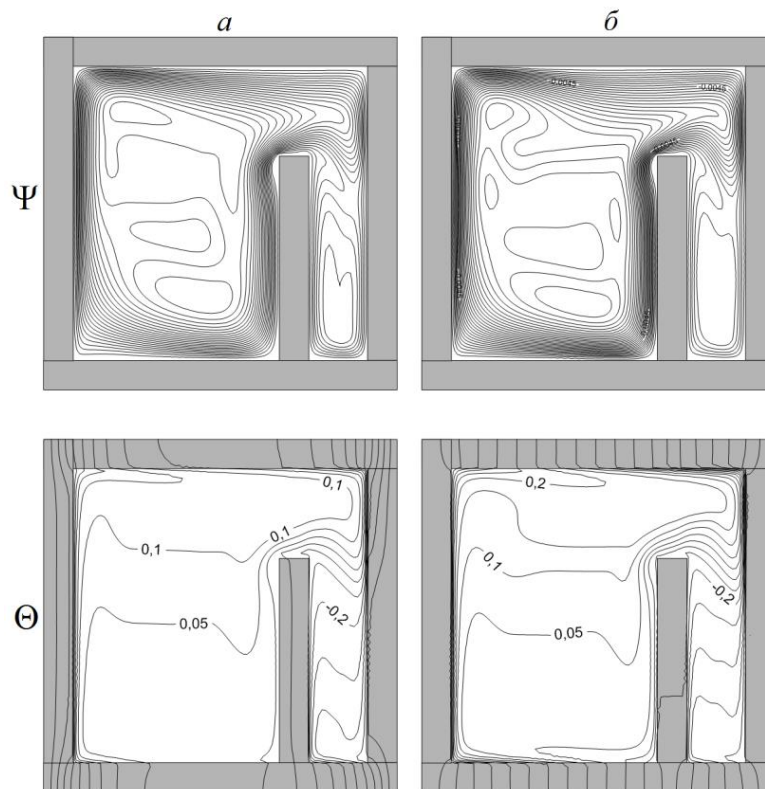


Рисунок 17 – Распределения изотерм и изолиний функции тока при  $\tilde{\varepsilon} = 0.9$ ,  $Ra = 10^9$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $h/L=0.7$ :  $\lambda_{w,air} = 100$  (а),  $\lambda_{w,air} = 1000$  (б)

Наибольший интерес при решении краевых задач такого рода представляет определение интегральных коэффициентов теплообмена. На рисунке 18 представлены зависимости средних конвективного и радиационного чисел Нуссельта в зависимости от времени, числа Рэлея и высоты перегородки. С ростом числа Рэлея увеличивается время, необходимое для достижения стационарного решения. Наличие теплопроводной перегородки приводит к снижению интенсивности конвективного теплообмена в полости. Видно, что изменение высоты перегородки от  $h/L=0,2$  до  $h/L=0,7$  приводит к уменьшению интегральных коэффициентов теплоотдачи. Результаты показывают, что при изменении высоты перегородки от  $h/L=0,2$  до  $h/L=0,7$  среднее конвективное число Нуссельта уменьшается на 14,8 % при  $Ra=10^{10}$  и уменьшается на 12,2 % при  $Ra=10^9$ . Среднее радиационное число Нуссельта также снижается до 13,6 % и 11,2 % соответственно.

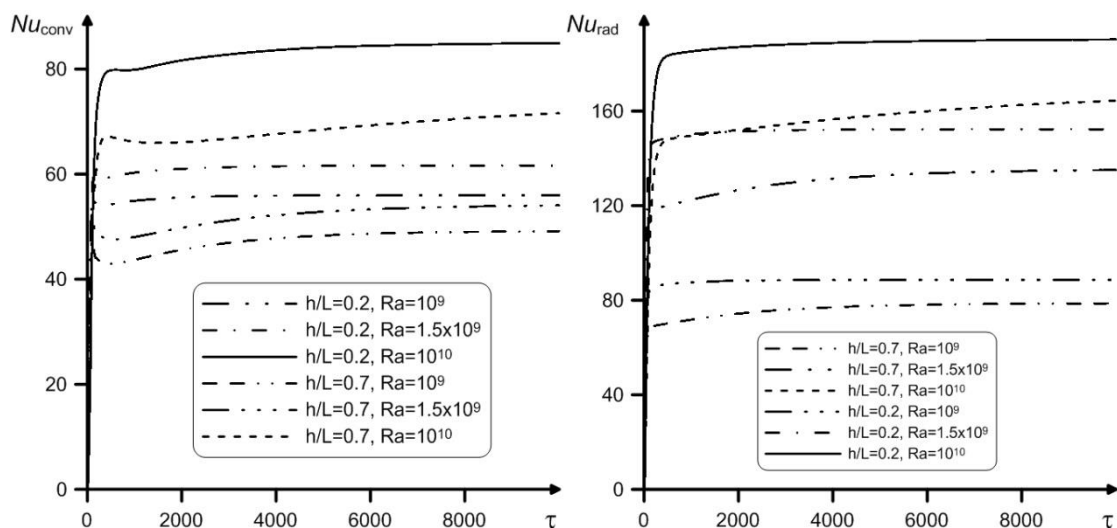


Рисунок 18 – Зависимости среднего конвективного и радиационного чисел Нуссельта на левой стенке от времени, числа Рэлея и высоты перегородки.

**З а к л ю ч е н и е.** Проведено численное исследование конвективно-радиационного теплопереноса в полости с перегородкой. В качестве метода решения использовался метод конечных разностей. Проведена верификация разработанных математических моделей и разработанных численных алгоритмов на известных экспериментальных данных и модельных задачах. В результате проведенных численных экспериментов исследовано влияние высоты перегородки, числа Рэлея, степеней черноты внутренних поверхностей и относительного коэффициента теплопроводности на структуру течения и теплообмен в области решения. Показано, что наличие теплопроводной перегородки приводит к снижению интенсивности конвективного теплообмена в полости. Изменение высоты перегородки может приводить к уменьшению интегральных коэффициентов теплоотдачи на величину от 10 до 15 %.

### 1.13 Формальные матрицы над кольцами вычетов и некоторые их приложения

**В в е д е н и е.** Далее все кольца – ассоциативные с единицей,  $\mathbb{Z}$  – кольцо (и группа) целых чисел,  $\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$  – кольцо (и группа) вычетов по модулю  $n$ .

Классический объект в математике –  $M(n, R)$  – кольцо всех матриц порядка  $n$  над некоторым кольцом  $R$ . В последнее время внимание специалистов привлекают кольца формальных матрицы или как еще говорят – кольца обобщенных матрицы или кольца контекста Мориты. Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц проистекают из работ японского математика К. Мориты [89]. Детальный обзор истории изучения контекста Мориты можно найти в статье [90].

Напомним, кольцом контекста Мориты или кольцом формальных (обобщенных) матриц второго порядка мы называем кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\},$$

где  $R$  и  $S$  – кольца,  ${}_R M_S$  –  $R$ - $S$ -бимодуль,  ${}_S N_R$  –  $S$ - $R$ -бимодуль,  $\varphi : M \otimes_S N \rightarrow R$  и  $\psi : N \otimes_R M \rightarrow S$  – бимодульные гомоморфизмы, с поэлементным сложением и умножением вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix},$$

причем должны выполняться равенства ассоциативности  $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$  и  $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$  для

всех  $m, m' \in M, n, n' \in N$ . Часто кольцо  $K$  обозначают как  $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ .

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц естественным образом можно расширить на случай произвольного порядка  $n \geq 2$  следующим образом. Пусть  $R_1, \dots, R_n$  – кольца,  $M_{ij}$  –  $R_i$ - $R_j$ -бимодули,  $i, j = 1, \dots, n$ , причем  $M_{ii} = R_i$ . Пусть еще для любых  $i, j, k = 1, \dots, n$ , таких, что  $i \neq j, k \neq j$ , задан бимодульный гомоморфизм  $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ .

Для  $i=j, k=j$  считаем, что  $\varphi_{iik}$  и  $\varphi_{ikk}$  – это канонические изоморфизмы  $R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}$  и  $M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \rightarrow M_{ij}$ . Далее  $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$  обозначаем через  $ab$ , для  $a \in M_{ij}, b \in M_{jk}$ . Также как для

колец формальных матриц второго порядка требуем выполнения равенств ассоциативности  $(ab)c = a(bc)$  для всех  $a \in M_{ij}, b \in M_{jk}, c \in M_{kl}$ . Множество

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & r_n \end{pmatrix} \middle| r_i \in R_i, m_{ij} \in M_{ij}, i, j = 1, \dots, n \right\}$$

всех матриц со значениями в бимодулях  $M_{ij}$  относительно привычного сложения и умножения, определяемого с помощью гомоморфизмов  $\varphi_{ijk}$ , образует кольцо, кольцо формальных матриц порядка  $n \geq 2$ . Изучению произвольных колец формальных матриц посвящено множество работ, например [17, 18, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97].

Пусть  $p$  – простое число,  $\bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z})$ , где  $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  и  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$  –

абелева группа порядка  $p^{n_1+n_2+\dots+n_m}$ . Известно, что всякая конечная  $p$ -группа  $H$  ранга  $m$

может быть отождествлена с подходящей группой вида  $\bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z})$ ,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ .

Как устроено ее кольцо эндоморфизмов?



Крылов и Туганбаев [17, 18] показали, что на кольцо  $\text{End}(\mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^m))$  можно посмотреть как на кольцо формальных (или как еще говорят «обобщенных») матриц

$$\begin{pmatrix} \text{End}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) & \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) & \text{End}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \quad \text{Вообще,}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, n < m - \text{наглядная иллюстрация к понятию кольца формальных матриц.}$$

В недавней статье Е.А. Тимошенко и А.Ю. Степановой [98] изучаются кольца эндоморфизмов конечных примарных абелевых групп ранга 2 и 3. Как отмечено выше, всякая конечная  $p$ -группа  $H_2$  ранга 2 может быть отождествлена с подходящей группой вида  $\mathbb{Z}(p^m) \times \mathbb{Z}(p^n)$ , а группа  $H_3$  ранга 3 – с группой  $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  где  $m \geq n \geq k > 0$ . Тогда их кольца эндоморфизмов изоморфны соответственно кольцам обобщенных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \text{ Они нашли необходимые и достаточные}$$

условия обратимости таких матриц, а также формулы для построения обратной матрицы.

Мы обобщаем их результат в некоторой степени. Именно, мы рассматриваем кольцо

$$\text{формальных матриц } \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z}/p^{n_m}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z}/p^{n_m}\mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Z}/p^{n_m}\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^{n_m}\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z}/p^{n_m}\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \text{ где } n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N} \text{ и } n_1 \geq n_2 \geq$$

$\dots \geq n_m$ . Оно изоморфно кольцу эндоморфизмов  $\text{End} \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z})$ ,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ .

Несложно видеть, что мощность кольца  $\text{End} \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z})$  равна  $p^{n_1+3n_2+\dots+(2m-1)n_m}$ .

Удалось получить условие обратимости таких матриц в случае  $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ .

Методы. В работе были использованы всевозможные методы теории колец, теории абелевых групп, теории модулей. Именно, методы связанные с произвольными формальными матрицами и кольцами таких матриц были разработаны японским математиком Киити Моритой в его статье «Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition» [89] и дальше развивались во множестве работ, см. обзорную статью [90]. Методы, касающиеся непосредственно колец формальных матриц над кольцами вычетов, разрабатывались в статьях [91, 92, 93, 99, 100, 101].

Результаты и обсуждения.

Теорема 13.1 Кольцо  $\text{End} \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z})$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  и  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$

изоморфно кольцу формальных матриц  $K = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} / p^{n_1} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ .

Теорема 13.2 Пусть в кольце  $K$   $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ . Тогда формальная матрица

$A = \begin{pmatrix} a_{11} + p^{n_1} \mathbb{Z} & a_{12} + p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & a_{1m} + p^{n_m} \mathbb{Z} \\ a_{21} + p^{n_2} \mathbb{Z} & a_{21} + p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & a_{2m} + p^{n_m} \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + p^{n_m} \mathbb{Z} & a_{m2} + p^{n_m} \mathbb{Z} & \dots & a_{mm} + p^{n_m} \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ , из кольца  $K$  будет обратимой, если

элементы  $a_{ii}$  с ее главной диагонали обратимы каждый в своем кольце  $\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z}$ ,  $i=1, \dots, m$ .

С л е д с т в и е 13.1 Другими словами, формальная матрица  $A$  из кольца  $K$  обратима, если каждый элемент  $a_{ii}$  не делится  $p$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Проблема 13.1 Что будет с обратимостью в случае, когда некоторые  $n_i$  совпадают, то есть  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ ?

Проблема 13.2 Предлагаем рассмотреть протоколы, разработанные авторами в [91, 99, 100, 101], над кольцами  $\text{End}(\mathbb{Z} / p^{n_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z})$  и  $\text{End} \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z})$ ,  $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ .

Улучшит ли это их устойчивость?

З а к л ю ч е н и е. Было показано, что кольцо эндоморфизмов конечной  $p$ -группы

ранга  $m$  изоморфно кольцу формальных матриц вида  $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} / p^{n_1} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} / p^{n_m} \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ , где

$n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  и  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ . Найдены условия обратимости таких формальных матриц при  $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ . Предложены варианты модификации криптосистем, разработанных авторами в [91, 99, 100, 101], которые основаны на арифметике колец  $E_p$  и  $E_p^{(m)}$ . Суть модификаций – вместо  $E_p$  и  $E_p^{(m)}$  рассмотреть протоколы над кольцами  $\text{End}(\mathbb{Z} / p^{n_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / p^{n_2} \mathbb{Z})$  и  $\text{End} \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z} / p^{n_i} \mathbb{Z})$ ,  $n_1 > n_2 > \dots > n_m$ . В статьях [94, 95] было показано,

исходные криптосистемы не являются устойчивыми.

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью. Полученные результаты готовятся к печати в журнале «Вестник ТГУ. Математика и механика».

#### 1.14 Регулярность отображений весовых классов Соболева и спектральные свойства эллиптических операторов в дивергентной форме

Введение. В отчетный период изучалась слабая регулярность отображений  $\varphi^{-1}$ , которые являются обратными к весовым отображениям Соболева  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ , где  $\Omega, \Omega'$  - области (открытые и связные области) в  $\mathbb{R}^n$ , порождающие по правилу композиции  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$  ограниченные операторы композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega, w), \quad 1 < q \leq p < \infty.$$

Предполагается, что вес  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  таков, что функция  $w^q$  удовлетворяет условию Макенхаупта ( $w^q \in A_q$ ),  $1 < q < \infty$ . В геометрической теории операторов композиции в пространствах Соболева существенную роль играют свойства обратных отображений [102]. Они возникают из-за свойств обратимости квазиконформных отображений [103] и имеют приложения в нелинейной теории упругости [104]. Также, исследовалась спектральная задача Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме (т.е. операторов вида  $\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$ , где  $A(z)$  – симметричная матричная функция с измеримыми компонентами) в евклидовых областях.

Методы. Для изучения отображений, порождающих вложения весовых пространств Соболева использовался подход, основанный на геометрической теории операторов композиции в пространствах Соболева. Операторы композиции в весовых пространствах Соболева были введены в [105] в рамках обобщенной проблемы Решетняка [106]. При исследовании краевой задачи Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме использовался метод, основанный на операторах композиции, порожденных квазиконформными отображениями и их приложениях к оценкам постоянной в соответствующих неравенствах Соболева-Пуанкаре.

Результаты и обсуждения. В отчетный период были получены следующие результаты.

**Теорема 14.1** Пусть гомеоморфизм  $\varphi$  принадлежит весовому пространству Соболева  $L_q^1(\Omega, w; \Omega')$ ,  $n-1 < q < \infty$ ,  $w^q \in A_q$  и  $w^{(1-n)\tilde{q}} \in A_{\tilde{q}}$ ,  $\tilde{q} = q/(q-n+1)$ , обладает  $N$ -

свойством Лузина и имеет конечное искажение. Тогда обратное отображение  $\varphi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$  принадлежит пространству Соболева  $W_{1,loc}^1(\Omega'; \Omega)$ .

Условия  $w^q \in A_q$  и  $w^{(1-n)\tilde{q}} \in A_{\tilde{q}}$  справедливы, например, в случае степенных весов

$$w = |x|^\alpha, \quad -\frac{n}{q} < \alpha < \frac{n}{\tilde{q}(n-1)}.$$

Этот результат о слабой регулярности обобщает предыдущие работы по регулярности невесовых соболевских гомеоморфизмов [102, 107, 108]. Отметим, что в случае  $n = 2$  условие  $w^{(1-n)\tilde{q}} \in A_{\tilde{q}}$  может быть опущено.

Используя этот результат слабой регулярности, доказано свойство двойственности весовой композиции.

**Теорема 14.2** Пусть гомеоморфизм  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  имеет  $N$ -свойство Лузина и порождает ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega, w), \quad n-1 < q \leq p < \infty,$$

где  $w^q \in A_q$  и  $w^{(1-n)\tilde{q}} \in A_{\tilde{q}}$ . Тогда обратное отображение  $\varphi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$  порождает оператор композиции

$$(\varphi^{-1})^* : L_{\tilde{q}}^1(\Omega, v) \rightarrow L_p^1(\Omega'), \quad \frac{n-1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1, \quad \frac{n-1}{p} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1,$$

где вес  $v(x) = w(x)^{1-n}$  таков, что  $v^{\tilde{q}} \in A_{\tilde{q}}$ .

Кроме того, были получены спектральные оценки для эллиптических операторов в дивергентной форме, т.е. операторов вида  $\operatorname{div}[A(z)\operatorname{grad}f(z)]$ , с краевыми условиями Дирихле в областях евклидова пространства. Предполагается, что  $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$ , где  $M^{2 \times 2}(\Omega)$  – класс всех  $2 \times 2$  симметричных матричных функций  $A(z) = \{a_{kl}(z)\}$ ,  $\det A = 1$  п.в. в  $\Omega$ , с измеримыми компонентами, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности.

Односвязная плоская область  $\Omega$  называется  $A$ -квазиконформной  $\beta$ -регулярной областью относительно односвязной области  $\Omega'$ , если

$$\left\| J_{\varphi^{-1}} \Big| L^\beta(\Omega) \right\| < \infty, \quad \beta > 1,$$

где  $J_{\varphi^{-1}}(z) = J(z, \varphi^{-1})$  – якобиан квазиконформного отображения  $\varphi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ .

**Теорема 14.3** Пусть  $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$  и  $\Omega$  –  $A$ -квазиконформная  $\infty$ -регулярная область относительно области  $\Omega'$ . Тогда

$$\frac{1}{\lambda_1(A, \Omega)} \leq \frac{\|J_{\varphi^{-1}}|L^\infty(\Omega')\|}{\lambda_1(\Omega')},$$

где  $\lambda_1(\Omega')$  – первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $\Omega'$ , и  $J_{\varphi^{-1}}$  – якобиан квазиконформного отображения  $\varphi^{-1}: D \rightarrow \Omega$ .

Принимая во внимание предыдущую теорему и свойство монотонности по области для собственных значений задачи Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме, получим следующий результат для специального случая  $\|J_{\varphi^{-1}}|L^\infty(\Omega')\| < 1$ .

**Теорема 14.4** Пусть  $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$  и  $\Omega$  –  $A$ -квазиконформная  $\infty$ -регулярная область относительно области  $\Omega'$ . Предположим, что  $\Omega' \supset \Omega$ , тогда

$$\lambda_1(A, \Omega) - \lambda_1(\Omega') \geq \frac{1 - \|J_{\varphi^{-1}}|L^\infty(\Omega')\|}{\|J_{\varphi^{-1}}|L^\infty(\Omega')\|} \lambda_1(\Omega').$$

В случае  $A$ -квазиконформных отображений  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  ( $D$  – единичный круг), сохраняющих меру доказано неравенство типа Фабера-Крана для некоторых эллиптических операторов в дивергентной форме.

**Теорема 14.5** Пусть  $\Omega$  – односвязная ограниченная плоская область такая, что существует  $A$ -квазиконформное отображение  $\varphi: \Omega \rightarrow D$ , сохраняющее меру. Тогда

$$\lambda_1(A, \Omega) \geq \lambda_1(A, D).$$

**Заключение.** Таким образом, изучены свойства слабой регулярности отображений весовых классов Соболева в рамках теоремы о слабом обратном отображении. Получены оценки на собственные значения эллиптических операторов в дивергентной форме с краевым условием Дирихле в областях евклидова пространства. Кроме того, доказано неравенство типа Фабера-Крана для некоторых таких операторов. Тем самым получены все результаты, запланированные на 2022 год, и готовятся публикации в двух работах [109, 110].

## **2 Образовательная составляющая**

### **2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные центром**

Все запланированные на 2022 г. научные конференции и семинары проведены в срок. НОМЦ являлся организатором четырех научных конференций, которые прошли в Томске, Улан-Удэ и Сочи: Международная конференция «Knot Theory and Applications»; 5-я Всероссийская научная конференция «Декабрьские чтения в Томске»; «Математика и математическое образование в условиях цифровизации» (совместно с Бурятским государственным университетом); «Геометрия и топология трехмерных многообразий» (совместно с Математическим центром «Сириус»). Кроме того, центр участвовал в организации и проведении секции «Геометрия и топология» в рамках Второй конференции математических центров России в МГУ.

Совместно с Международным математическим центром в Академгородке и Тюменским государственным университетом на трех площадках была организована «Большая математическая мастерская». На площадке НОМЦ были реализованы четыре научно-исследовательских проекта по фундаментальной и прикладной математике.

Весной 2022 г. были проведены две традиционных студенческих и одна школьная конференции. Продолжили свою работу два еженедельных научных семинара.

Перечень научных конференций, семинаров, мастер-классов, съездов, конгрессов и других аналогичных мероприятий, организованных центром:

1. Научный семинар для студентов, аспирантов и преподавателей «Математический коллоквиум», март-декабрь 2022 г. (очно-дистанционный формат, еженедельно, участники – студенты, аспиранты, преподаватели).

2. Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» 23–27 мая 2022 г. (очно-дистанционный формат, 79 участников – студенты вузов Сибири, <http://conf.math.tsu.ru>).

3. XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 26–29 апреля 2022 г. (очно-дистанционный формат, 555 участников – студенты, аспиранты, молодые ученые вузов Сибирского региона, <http://conf-prfn.org>).

4. Международная конференция «Knot Theory and Applications», 29 июня – 5 июля 2022 г. (дистанционный формат, 64 участника, <http://knots2022.rmc.math.tsu.ru>).

5. Научная конференция с международным участием «Математика и математическое образование в условиях цифровизации», 30 июня – 3 июля 2022 г. (очно-дистанционный формат, 51 участник, <http://mmo.bsu.ru>)

6. Большая математическая мастерская, площадка Томского государственного университета, 24 июля – 13 августа 2022 г. (очный формат, 19 участников: из них 14 студентов и аспирантов, <https://bmm2022.mca.nsu.ru/>)

7. Городской математический семинар им. Г. Г. Пестова, сентябрь-декабрь 2022 г. (очно-дистанционный формат, еженедельно, участники – студенты, аспиранты, преподаватели)

8. Цикл лекций чл.-корр. РАН В. В. Пухначева, 5–8 сентября 2022 г. (очно-дистанционный формат, 20 участников – студенты, аспиранты, преподаватели)

9. Конференция «Геометрия и топология трехмерных многообразий», 17–21 сентября 2022 г. (проводится совместно с Математическим центром «Сириус», очно-дистанционный формат, 58 участников, <https://siriusmathcenter.ru/program/023w>).

10. Курсы повышения квалификации «Современные методы и приемы преподавания математики и развития математических способностей обучающихся», 31 октября – 2 декабря 2022 г. (144 час., проводятся в дистанционном формате, 16 участников – учителей математики и информатики).

11. Всероссийская научная конференция «Декабрьские чтения в Томске – 2022», 5–10 декабря 2022 г. (очный формат, 48 участников: из них 13 студентов и аспирантов, <http://dr.rmc.math.tsu.ru>).

Всего в научных мероприятиях центра приняло участие 252 российских и зарубежных ученых, 669 студентов и 32 аспирантов.

## **2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и образовательными организациями**

Научные мероприятия центра способствуют развитию научных связей между российскими и зарубежными специалистами в области фундаментальной и прикладной математики, обеспечивая единое научное пространство для обсуждения и решения актуальных проблем. За отчетный период 208 российских и зарубежных ученых приняли участие в мероприятиях НОМЦ. В том числе, сотрудники институтов РАН, математических центров мирового уровня и региональных научно-образовательных математических центров, таких как:

- Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
- Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

- Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
- Международный математический центр в Академгородке (г. Новосибирск)
- Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
- Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
- Национальный исследовательский Томский политехнический университет
- Красноярский математических центр

Многолетнее сотрудничество ведется с учеными из Юго-Восточной Азии: Китая, Японии, Южной Кореи и Индии.

Особое внимание при этом уделено повышению вовлеченности молодых математиков, аспирантов и студентов в проводимые центром исследования.

В рамках программы развития для работы в центре привлекаются ведущие ученые. В 2022 г. в НОМЦ на должность ведущего научного сотрудника принят д.ф.-м.н., доцент Чехлов Андрей Ростиславович.

В работе в центре привлекаются молодые иностранные ученые. С 2022 г. в должности старшего научного сотрудника центре продолжает работу гражданин Вьетнама Выонг Хыу Бао (защита кандидаткой диссертации состоялась в 2022 г.). В должности младшего научного сотрудника с 2020 г. работает гражданин Казахстана Д.В. Лещинский.

### **2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром**

С 2018 г. сотрудниками центра были разработаны и модернизированы 15 учебных курсов и модулей основных образовательных программ (ООП) бакалавриата и магистратуры механико-математического факультета (ММФ) ТГУ с учетом ФГОС 3++. Все курсы реализуются в рамках учебных планов сотрудниками ММФ ТГУ, из них 6 – в отчетный период ведутся непосредственно сотрудниками центра.

### **2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра**

В 2022 г. проведены две студенческие конференции: Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» и Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Участники — студенты, магистранты и аспиранты вузов Сибирского региона.

НОМЦ ТГУ с привлечением студентов ТГУ выступил одной из трех площадок в мероприятии «Большая математическая мастерская» в период с 24 июля по 13 августа 2022 г. В рамках мастерской, на площадке НОМЦ ТГУ велась работа по четырем проектам, объединивших 19 участников. По каждому проекту проведены два недельных интенсива,



когда команды студентов под руководством ведущих ученых решали исследовательские задачи. По результатам работы по проектам сданы в печать или готовятся научные статьи.

Традиционным стало участие студентов в качестве слушателей еженедельного научного семинара «Математический коллоквиум», Городского математического семинара им. Г. Г. Пестова и научных конференций, проводимых центром. Число проведенных мероприятий и принявших в них участие студентов полностью соответствуют запланированным показателям.

## **2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре**

Под научным руководством ведущих научных сотрудников НОМЦ ведется научно-исследовательская работа аспирантов, магистрантов и бакалавров ММФ ТГУ. В 2022 г. состоялись защиты 5 выпускных квалификационных работ бакалавра, 6 магистерских диссертаций.

В марте 2022 г. в НГУ состоялась защита кандидатской диссертации младшего научного сотрудника центра Вьонга Хью Бао на тему «Аналитические методы в теории многогранников и орбиформов, моделируемых в трехмерных пространствах постоянной кривизны».

В отчетный период под руководством сотрудника НОМЦ профессора А.М. Бубенчикова младший научный сотрудник А.С. Челноковой подготовила кандидатскую диссертацию по теме «Математические модели прохождения некоторых газовых компонент через нанопористые структуры». Диссертация была заслушана на расширенном заседании научного семинара «Математический коллоквиум» НОМЦ ТГУ 26 сентября 2022 г. и рекомендована к защите. В связи с изменением номенклатуры научных специальностей ВАК и реорганизацией диссертационных советов защита в 2022 г. не состоялась. Защита диссертации планируется в 2023 г. во вновь открытом диссертационном совете НИ ТГУ.1.1.01.

## **2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром**

В 2022 г. на базе НОМЦ был реализован курс повышения квалификации «Современные методы и приемы преподавания математики и развития математических способностей обучающихся». Курс предназначен для педагогического состава общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий) и учреждений дополнительного образования по математике и информатике. По результатам курса 16

преподавателей и учителей математики получили удостоверения о повышении квалификации.

## **2.7 Вовлечение школьников в мероприятия центра**

В 2022 г. в соответствии с программой развития центром были проведены 9 мероприятий с привлечением школьников и учителей:

1. XV Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск, 28–30 января 2022 г. (турнир проходил в очном формате в несколько этапов, участники: 306 школьников, 50 учителей, 10 преподавателей вузов Томска).

2. Цикл лекций по подготовке к региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по математике, 15 января – 2 февраля 2022 г. (лекции проходили в дистанционном формате, 35 участников – школьников Томской области).

3. Международный день числа Пи, 14 марта 2022 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 140 участников – школьников 5-11 классов России и Монголии).

4. XXXIII региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 8 апреля 2022 г. (конференция прошла в дистанционном формате, 47 участников – 31 школьник, 16 учителей)

5. Интернет форум круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», май 2022 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 50 участников – школьников Томской области).

6. Школьная командная олимпиада «Математическая абака», 13 мая 2022 г. (олимпиада проводилась в дистанционном формате, 460 участников: 368 школьников 5–7 классов, 92 учителя).

7. Школа-тренинг НОМЦ ТГУ «Решение олимпиадных задач по информатике, февраль-декабрь 2022 г. (занятия проводятся в очно-дистанционном формате для 2 групп, 15 участников – школьники 7–11 классов г. Томска).

8. Олимпиадный тренинг по математике, июнь–декабрь 2022 г. (занятия проводятся в дистанционном формате для 2 групп, 12 участников – школьники 8–11 классов г. Томска).

9. Второй (очный) тур XXVI Олимпиады Юношеской математической школы для учащихся 7–11 классов, площадка Томского государственного университета, 18 декабря 2022 г. (очный формат, 3 участника – школьника 7–11 классов г. Томска, Новосибирска и Барнаула, <http://yumsh.ru/cms/yumsh-olymp/2022-23>).

Цель указанных мероприятий – поднять интерес к изучению математики и информатики у школьников, предоставить им площадку для обсуждения задач и

расширения познаний в этих областях, повысить уровень олимпиадной подготовки и подготовки к ЕГЭ.

Перечень школьников, принявших участие в мероприятиях центра и ставших победителями и призерами Всероссийской олимпиады школьников по математике и информатике или олимпиад РСОШ по математике или информатике 1 и 2 уровня:

1. Лисок Артём Александрович, 7 класс, МАОУ "Лицей № 1 г. Томска им. А.С. Пушкина"
2. Лисок Никита Александрович, 7 класс, МАОУ "Лицей № 1 г. Томска им. А.С. Пушкина"
3. Дробот Нина Павловна, 8 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»
4. Куцанов Тимофей Максимович, 9 класс, НОУ "Католическая гимназия"
5. Шандриков Виктор Максимович, 9 класс, МБОУ "Академический лицей г.Томска им. Г.А. Псахье"
6. Мельник Ульяна Владимировна, 9 класс, МАОУ «Средняя общеобразовательная школа № 34 г. Томска"
7. Маресов Арсений Александрович, 9 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»
8. Агафонов Артём Александрович, 10 класс, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей"
9. Русанова Маргарита Игоревна, 10 класс, ОГБОУ "Томский физико-технический лицей"
- 10.Зюбин Константин Сергеевич, 10 класс, МАОУ «Средняя общеобразовательная школа № 32 г. Томска"
- 11.Лучкин Вячеслав Александрович, 11 класс, МАОУ "Лицей № 8 г. Томска им. Н.Н. Рукавишникова"
- 12.Гынгазов Владислав Николаевич, 11 класс, МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 84 г. Северска"
- 13.Завьялов Сергей Дмитриевич, 11 класс, МБОУ "Лицей при ТПУ г. Томска"
- 14.Рачеев Павел Олегович, 11 класс, МАОУ «Средняя общеобразовательная школа № 41 г. Томска"
- 15.Слободянюк Михаил Юрьевич, 11 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»
- 16.Карташов Даниил Олегович, 11 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»
- 17.Шаманаев Александр Сергеевич, 11 класс, МБОУ "Лицей при ТПУ г. Томска"

18.Забейворота Кирилл Владимирович, 11 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»

19.Сушков Артём Александрович, 11 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»

20.Агафонов Павел Андреевич, 11 класс, ОГБОУ «Томский физико-технический лицей»

21.Игольников Егор Игоревич, 11 класс, МБОУ "Лицей при ТПУ г. Томска"

22.Волжин Никита Вячеславович, 11 класс, МБОУ "Лицей при ТПУ г. Томска"

### **2.8 Дополнительная информация о деятельности центра**

В период, включающий 2020 г. ТГУ не входил в мировой предметный рейтинг QS по математике. Благодаря работе НОМЦ, по этому рейтингу ТГУ в 2021 г. вошел в группу 401 – 500, а в 2022 г. в – группу 351 – 400.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все работы, запланированные на отчетный период проекта, успешно выполнены. Все ожидаемые к концу 2022 года результаты получены.

Результаты прошли апробацию на международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Результаты работы по проекту опубликованы сотрудниками НОМЦ в 26 статьях. В том числе: 13 статей опубликованы в журналах, входящих в первый и второй квартиль (Q1, Q2) базы данных Web of Science, Scopus (работы [А.1, А.3, А.4, А.5, А.7, А.8, А.10, А.11, А.12, А.15, А.16, А.17, А.18]), 9 статей подготовлены с участием молодых исследователей НОМЦ (работы [А.7, А.8, А.9, А.13, А.14, А.16, А.17, А.19, А.21]).

Под руководством научных сотрудников НОМЦ подготовлены и защищены в 2022 году 6 магистерских диссертаций и 5 выпускных квалификационных работ бакалавра студентов ММФ ТГУ. В марте 2022 г. в НГУ состоялась защита кандидатской диссертации младшего научного сотрудника центра Выонга Хью Бао на тему «Аналитические методы в теории многогранников и орбифолдов, моделируемых в трехмерных пространствах постоянной кривизны».

На базе или при сотрудничестве НОМЦ в отчетный период было организовано более 30 научных семинаров. Лекции проходили в рамках, организованного НОМЦ «Математического коллоквиума». Кроме того, в форме открытых лекций проходили пленарные доклады на научных конференциях, организованных НОМЦ. Были проведены 11 научных мероприятий и 9 школьных. Из них 3 с международным участием, 1 всероссийская, 2 студенческие и 1 школьная конференции. В мероприятиях центра приняло участие 964 школьника, 669 студентов, 32 аспиранта, 252 российских и зарубежных ученых, 174 преподавателя и учителя математики и информатики.

Реализован курс повышения квалификации: «Современные методы и приемы преподавания математики и развития математических способностей обучающихся».

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://nomc.math.tsu.ru> Все мероприятия НОМЦ проводятся в соответствии с планом мероприятий ТГУ.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Mostow G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces / G. D. Mostow – *Annals of mathematics studies*, 78, Princeton University Press, 1973.
- 2 Lobachevsky N. I. *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale* / N. I. Lobachevsky – German translation by H. Liebmann, Teubner, Leipzig, 1904.
- 3 Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // *Memorie Reale Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena*, III, VIII (Appendice). – 1907. – P. 21–66.
- 4 Cho Yu. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra / Yu. Cho, H. Kim // *Discrete and Computational Geometry*. – 1999. – Vol. 22. – P. 347–366.
- 5 Murakami J. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron / J. Murakami, M. Yano // *Communications in Analysis and Geometry*. – 2005. – Vol. 13. – P. 379–400.
- 6 Derevnin D. A. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // *Russian Mathematical Surveys*. – 2005. – Vol. 60, Is. 2. – P. 346–348.
- 7 Abrosimov N. V. Explicit volume formula for a hyperbolic tetrahedron in terms of edge lengths / N. V. Abrosimov, B. Vuong // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. – 2021. – Vol. 30, Iis. 10. – Article number 2140007.2
- 8 Champanerkar A. Right-angled polyhedra and alternating links / A. Champanerkar, I. Kofman, J. Purcell // *Algebraic and Geometric Topology*. – 2022. – Vol. 22. – P. 739–784.
- 9 Egorov A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedral / A. Egorov, A. Vesnin // *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*. – 2020. – Vol. 52. – P. 565–576.
- 10 Ahlfors L. V. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory* // *American Mathematical Society*. – 2010. – Vol. 371.
- 11 Kühnau R. The conformal module of quadrilaterals and of rings // *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*. – Amsterdam, Elsevier., 2005. – Vol. 2. – С. 99–129.
- 12 Heikkala V. Generalized elliptic integrals / V. Heikkala, M. K. Vamanamurthy, M. Vuorinen // *Computational Methods and Function Theory*. – 2009. – Vol. 9, № 1. – P. 75–109.
- 13 Nasyrov S. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection / S. Nasyrov, T. Sugawa, M. Vuorinen. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.08304> (дата обращения 20.12.2022).

- 14 Dautova D. Conformal Modulus of the Exterior of Two Rectilinear Slits / D. Dautova, S. Nasyrov, M. Vuorinen // *Computational Methods and Function Theory*. – 2021. – Vol. 21, № 1. – P. 109–130.
- 15 Kolesnikov I. A. A one-parametric method for determining parameters in the Schwarz-Christoffel integral // *Siberian Mathematical Journal*. – 2021. – Vol. 62, № 4. – P. 638–653.
- 16 Крылов П. А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 95–112.
- 17 Крылов П. А. Кольца формальных матриц и модули над ними / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2017. – 192 с.
- 18 Крылов П. А. Формальные матрицы и их определители / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 65–119.
- 19 Bowshell R. A. Unital rings whose additive endomorphisms commute / R. A. Bowshell, P. Schultz // *Mathematische Annalen*. – 1977. – Vol. 228, № 3. – P. 197–214.
- 20 Bass H. A finiteness property of affine algebras // *Proceedings of the AMS*. – 1990. – Vol. 110. – P. 315–318.
- 21 Chekhlov A. R. On the Bassian property for Abelian groups. / A. R. Chekhlov, P. V. Danchev, B. Goldsmith // *Archiv der Mathematik*. – 2021. – Vol. 117. – P. 593–600.
- 22 Chekhlov A. R. On the socles of characteristically inert subgroups of Abelian p-groups / A. R. Chekhlov, P. V. Danchev, B. Goldsmith // *Forum Mathematicum*. – 2021. – Vol. 33(4). – P. 889–898.
- 23 Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. – Dordrecht : Kluwer Academic, 2003.
- 24 Alhazmy M. M. Internal baffles to reduce the natural convection in the voids of hollow blocks // *Building Simulation*. – 2010. – Vol. 3. – P. 125–137.
- 25 Dufour G. Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces // *Geometriae Dedicata*. – 2010. – Vol. 147. – P. 277–282.
- 26 Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // *Математический сборник*. – 1970. – Т. 83(123), № 3. – С. 445–478.
- 27 Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedral // *Algebraic and Geometric Topology*. – 2009. – Vol. 9. – P. 1225–1254.
- 28 Bardakov V. G. On  $\lambda$ -homomorphic skew braces / V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, M. Yadav // *The Journal of Pure and Applied Algebra*. – 2022. – Vol. 206. – 106961.
- 29 Bardakov V. G. Zero divisors in quandle rings / V. G. Bardakov, M. Singh, B. Passi // *Osaka Journal of Mathematics*. – 2022. – Vol. 59. – P. 611–637.

- 30 Bardakov V. G. On homotopy braids / V. G. Bardakov, V. V. Vershinin, J. Wu // Forum Mathematicum. – 2022. – Vol. 34, № 2. – P. 447–454.
- 31 Bardakov V. G. Rota-Baxter groups, skew left braces, and the Yang-Baxter equation / V. G. Bardakov, V. Yu. Gubarev // The Journal of Algebra. – 2022. – Vol. 596. – P. 328–351.
- 32 Bardakov V. Virtual and universal braid groups, their quotients and representations / V. Bardakov, I. Emel'yanenkov, M. Ivanov, T. Kozlovskaya, T. Nasybullov, A. Vesnin // Journal of Group Theory. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 679–712.
- 33 Bardakov V. G. A Wells type exact sequence for non-degenerate unitary solutions of the Yang-Baxter equation / V. G. Bardakov, M. Singh // Homology, Homotopy and Applications. – 2022. – Vol. 24, № 2. – P. 31–51.
- 34 Bardakov V. G. General constructions of biquandles and their symmetries / V. G. Bardakov, T. R. Nasybullov, M. Singh // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2022. – Vol. 226. – 106936.
- 35 Bardakov V. G. Manpreet Singh, Virtually symmetric representations and marked Gauss diagram / V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim // Topology Application. – 2022. – Vol. 306. – 107936.
- 36 Шолле Ф. Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – СПб.: Питер, 2020. – 400 с.
- 37 Goodfellow Y. Deep Learning / Y. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville – Cambridge : The MIT Press, 2016. – 800 p.
- 38 Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс / С. Хайкин. – М: Вильямс, 2008. – 1104 с.
- 39 Kingma D. P. Adam: A Method for Stochastic Optimization / D. P. Kingma, J. Ba, ICLR(Poster), 2015. – URL: <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/iclr/iclr2015.html#KingmaB14> (дата обращения 10.11.2022)
- 40 Hochreiter S. Long Short-Term Memory / S. Hochreiter, J. Schmidhuber // Neural Computation. – 1997. – Vol. 9, № 8. – P. 1735–1780.
- 41 Пантелеев А.В. Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем / А. В. Пантелеев, А. В. Лобанов // Моделирование и анализ данных. – 2019. – Т. 9, № 4. – С. 88–99.
- 42 Cheney M. Electrical Impedance Tomography / M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell // Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1999. – Vol. 41, № 1. – P. 85–101.
- 43 Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18. – P. 99–136.



- 44 Storn R. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces / R. Storn, K. Price // *The Journal of Global Optimization*. – 1997. – № 11. – P. 341–356.
- 45 Шерина Е. С. Численный метод реконструкции распределения электрического импеданса внутри биологических объектов по измерениям тока на границе / Е. С. Шерина, А. В. Старченко // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2012. – № 4(20). – С. 36–49.
- 46 Старченко А. В. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах / А. В. Старченко, Р. Б. Нутерман, Е. А. Данилкин. – Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та, 2015. – 252 с.
- 47 Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme: II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *Journal of Computational Physics*. – 1974. – Vol. 14. – P. 361–370.
- 48 Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. – 1958. – Vol. 6. – P. 83–142.
- 49 Green E. L. On the representation theory of rings in matrix form // *Pacific Journal of Mathematics*. – 1982. – Vol. 100, № 1. – P. 123–138.
- 50 Haghany A. Study of modules over formal triangular matrix rings / A. Haghany, K. Varadarajan // *Journal of Pure and Applied Algebra*. – 2000. – Vol. 147, № 1. – P. 41–58.
- 51 Stäckel P. Geometrische Untersuchungen von Wolfgang Bolyai und Johann Bolyai, I.–II. / P. Stäckel – Leipzig : B.G. Teubner, 1913.
- 52 Alekseevskii D. V. Geometry of spaces of constant curvature / D. V. Alekseevskii, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov – Springer : *Geometry II: Spaces of Constant Curvature, Encyclopedia of Mathematical Sciences Vol. 29*, 1993.
- 53 Lannér F. On complexes with transitive groups of automorphisms / F. Lannér – *Comm. Sem. Math. Univ. Lund*, 1950.
- 54 Nemoul O. Volume and boundary face area of a regular tetrahedron in a constant curvature space / O. Nemoul, N. Mebarki – URL: <https://arxiv.org/abs/1803.10809> (дата обращения 18.11.2023)
- 55 Bilinski S. Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene / S. Bilinski // *Mathematische Annalen*. – 1969. – Vol. 180. – P. 256–268.
- 56 McConnell B. The laws of cosines for non-Euclidean tetrahedra / B. McConnell – URL: <http://daylateanddollarshort.com/mathdocs/The-Laws-of-Cosines-for-Non-Euclidean-Tetrahedra.pdf>

- 57 Peters N. *Turbulent Combustion* / Cambridge University Press, 2000. – 324 p.
- 58 Warnatz J. *Combustion: Physical and Chemical Fundamentals, Modeling and Simulation, Experiments, Pollutant Formation* / J. Warnatz, U. Maas, R. W. W. Dibble – Springer, 2006. – 390 p.
- 59 Annushkin Yu.M. Basic rules governing the burning of turbulent jets of hydrogen in air channels // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. – 1981. – Vol. 17, Is. 4. – P. 400–411.
- 60 Degtyar V. G. *Hypersonic Aircraft* / V. G. Degtyar, E. E. Son. – Moscow: Janus-K, 2018. – 812 p.
- 61 Trevisan B. P. Experimental investigation of the acoustic flame in-teractions in a Bunsen burner / B. P. Trevisan, W. M. C. Dourado // *Workshop em Engenharia e Tecnologia Espaciais*, 2013. – P. 1–3.
- 62 IR thermography study of flow structure and parameters in diffusion flames / E. L. Loboda, O. V. Matvienko, M. V. Agafontsev [et al] // *Infrared Physics and Technology*. – 2021. – Vol. 117. – P. 1–11.
- 63 Bourebla A. Appearance and stability of a laminar conical premixed flame subjected to an acoustic perturbation / A. Bourebla, F. Baillot // *Combustion and Flame*. – 1998. – Vol. 114, Is. 3–4. – P. 303–318.
- 64 Luciano E. Analysis of the dynamic response of premixed flames through chemiluminescence cross-correlation maps / E. Luciano, J. Ballester // *Combustion and Flame*. – 2018. – Vol. 194. – P. 296–308.
- 65 Effect of pressure on the transfer functions of premixed methane and propane swirl flames / F. Di Sabatino, Th. F. Guiberti, W. R. Boyette [et al.] // *Combustion and Flame*. – 2018. – Vol. 193. – P. 272–282.
- 66 Krivokorytov M. S. Effect of acoustic vibrations on diffusion combustion of methane / M. S. Krivokorytov, V. V. Golub, V. V. Volodin // *Pis'ma v ZhTF*. – 2012. – Vol. 38, Is. 10. – P. 57–63.
- 67 ANSYS Fluent User's Guide, Release 15.0 / Canonsburg, 2013. – URL:<http://www.pmt.usp.br/academic/martoran/notasmodelosgrad/ANSYS%20Fluent%20Users%20Guide.pdf>. (дата обращения 11.01.2023).
- 68 Andreev E. M. On convex polyhedra in Lobachevskii spaces // *Mathematics of the USSR-Sbornik*. – 1970. – Vol. 10, Is. 3. – P. 413–440.
- 69 Mostow G. D. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of the hyperbolic space forms // *Publications Mathématiques de l'IHÉS*. – 1968. – Vol. 34. – P. 53–104.
- 70 Petronio C. Combinatorial and geometric methods in topology / C. Petronio, D. Heard, E. Pervova // *Milan Journal of Mathematics*. – 2008. – Vol. 76. – P. 69–92.

- 71 Heard D. The 191 orientable octahedral manifolds / D. Heard, E. Pervova, C. Petronio // *Experimental Mathematics*. – 2008. – Vol. 17, Is. 4. – P. 473–486.
- 72 Abrosimov N. V. On the volume of a hyperbolic octahedron with 3-symmetry / N. V. Abrosimov, E. S. Kudina, A. D. Mednykh // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. – 2015. – Vol. 288. – P. 1–9.
- 73 Abrosimov N. V. Hyperbolic octahedron with mmm-symmetry / N. V. Abrosimov, G. A. Baigonakova // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2013. – Vol. 10. – P. 123–140.
- 74 Abrosimov N. V. On the volume of a spherical octahedron with symmetries / N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – Vol. 161, Is. 1. – P. 1–10.
- 75 Artin E. Theory of braids. // *Annals of Mathematics*. – 1947. – Vol. 48, №1. – P. 101–126.
- 76 Baez J. Link invariants of finite type and perturbation theory // *Letters in Mathematical Physics*. – 1992. – Vol. 26(1). – 43.
- 77 Birman J. S. New points of view in knot theory // *Bulletin of the AMS*. – 1993. – Vol. 28(2). – P. 253–287.
- 77 Fenn R. The singular Braid Monoid Embeds in a Group. Preprint / R. Fenn, E. Keyman, C. Rourke. – Brighton : Univ. Of Sussex, 1996.
- 79 Bardakov V. G. On 3-strand singular pure braid group / V. G. Bardakov, T. A. Kozlovskaya // *Journal of knot theory and Its Ramifications*. – 2020. – Vol. 29, № 10. – 2042001.
- 80 Kozlovskaya T. A. Structure of 4-strand singular pure braid group // *Siberian electronic mathematical reports*. – 2022. – Vol. 19, № 1. – P. 18–33.
- 81 Magnus W. Combinatorial group theory, presentations of groups in terms of generators and relations / W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar // New York-London-Sydney : Interscience publishers, 1966. – 444 p.
- 82 Bardakov V. G. Singular braids, singular links and subgroups of camomile type / V. G. Bardakov, T. A. Kozlovskaya. – URL: <https://arxiv.org/abs/2212.08267> (дата обращения 16.12.2022)
- 83 Ahlfors L. V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory / American Mathematical Society. – 2010. – Vol. 371.
- 84 Kühnau R. The conformal module of quadrilaterals and of rings / *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*. – Vol. 2. – C. 99–129.
- 85 Heikkala V., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M. Generalized elliptic integrals // *Computational Methods and Function Theory*. – 2009. – Vol. 9, № 1. – P. 75–109.

- 86 Nasyrov S. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection / S. Nasyrov, T. Sugawa, M. Vuorinen – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.08304> (дата обращения 03.10.2022).
- 87 Dautova D. Conformal Modulus of the Exterior of Two Rectilinear Slits / D. Dautova, S. Nasyrov, M. Vuorinen // *Computational Methods and Function Theory*. – 2021. – Vol. 21, № 1. – С. 109–130.
- 88 Kolesnikov I. A. A one-parametric method for determining parameters in the Schwarz-Christoffel integral // *Siberian Mathematical Journal*. – 2021. – Vol. 62, № 4. – С. 638–653.
- 89 Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. – 1958. – Vol. 6. – P. 83–142.
- 90 Shapiro J. Morita contexts / J. Shapiro, P. Loustaunau // *Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics*. – 1990. – Vol. 1448. – P. 80–92.
- 91 Climent J. J. Public key protocol over the ring  $E_p^{(m)}$  / J. J. Climent, J. A. L. Ramos // *Advances in Mathematics of Communications*. – 2016. – Vol. 10. – P. 861–870.
- 92 Степанова А. Ю. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов / А. Ю. Степанова, Е. А. Тимошенко // *Вестник ТГУ. Математика и механика*. – 2021. – №6(74). – С. 30–43.
- 93 Норбосамбуев Ц. Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // *Вестник ТГУ. Математика и механика (в печати)*.
- 94 Kamal A. A. Cryptanalysis of a key exchange protocol based on the endomorphisms ring  $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$  / A. A. Kamal, A. M. Youssef // *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. – 2012. – Vol. 23. – P. 143–149.
- 95 Khathuria K. On the algebraic structure of  $E_p^{(m)}$  and applications to cryptography / K. Khathuria, G. Micheli, V. Weger // *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. – 2021. – Vol. 32. – P. 495–505.
- 96 Крылов П. А. Автоморфизмы алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // *Сибирский математический журнал*. – 2018. – № 5(59). – С. 1116–1127.
- 97 Крылов П. А. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2018. – № 3(53). – С. 16–22.
- 98 Крылов П. А.  $k$ -хорошие кольца формальных матриц бесконечного порядка / П. А. Крылов, Ц. Д. Норбосамбуев // *Известия ВУЗов. Математика*. – 2021. – № 6. – С. 35–42.

- 99 Climent J. J. On arithmetic of endomorphism ring  $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$  / J. J. Climent, P. R. Navarro, L. Tortosa // *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. – 2011. – Vol. 22. – P. 91–108.
- 100 Climent J. J. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of  $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$  / J. J. Climent, P. R. Navarro, L. Tortosa // *International Journal of Computer Mathematics*. – 2012. – Vol. 89. – P. 1753–1763.
- 101 Climent J. J. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements / J. J. Climent, P. R. Navarro, L. Tortosa // *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. – 2014. – Vol. 25. – P. 347–361.
- 102 Ukhlov A. On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces // *Siberian Mathematical Journal*. – 1993. – Vol. 34. – P. 185–192.
- 103 Väisälä J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings / Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- 104 Ball G. M. Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*. – 1981. – Vol. 88. – P. 315–328.
- 105 Vodop'yanov S. K. Mappings associated with weighted Sobolev spaces / S. K. Vodop'yanov, A. Ukhlov // *Contemporary Mathematics Series*. – 2008. – Vol. 455. – P. 369–382.
- 106 Vodop'yanov S. K. On geometric properties of functions with generalized first derivatives / S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dstein, Yu. G. Reshetnyak // *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. – 1979. – Vol. 34. – P. 17–65.
- 107 Csörnyei M. Homeomorphisms in the Sobolev space  $W^{1,n-1}$  / M. Csörnyei, S. Hencl, J. Malý // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 2010. – Vol. 644. – P. 221–235.
- 108 Gol'dstein V. About homeomorphisms that induce composition operators on Sobolev spaces / V. Gol'dshtein, A. Ukhlov // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2010. – Vol. 55. – P. 833–845.
- 109 Pchelintsev V. On regularity of weighted Sobolev homeomorphisms / V. Pchelintsev, A. Ukhlov // *Pure and Applied Functional Analysis* (in the press).
- 110 Gol'dshtein V. On the principal frequency of non-homogeneous membranes / V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev. – URL: <https://arxiv.org/pdf/2301.03197.pdf> (дата обращения 10.01.2023).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

### Публикации

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

A.1 Bardakov V., Singh M. A Wells type exact sequence for non-degenerate unitary solutions of the Yang–Baxter equation // *Homology, Homotopy and Applications*. – 2022. – Vol. 24., Is. 2. – P. 31–51. – DOI: 10.4310/HNA.2022.v24.n2.a2 (журнал входит в Scopus Q2).

A.2 Bardakov V. G., Passy I. B. S., Singh M. Zero-divisors and idempotents in quandle rings // *Osaka Journal of Mathematics*. – 2022. – Vol. 59. – P. 611–637 (журнал входит в Scopus Q3).

A.3 Bardakov V. G., Gubarev V. Rota–Baxter groups, skew left braces, and the Yang–Baxter equation // *Journal of Algebra*. – 2022. – Vol. 596. – P. 328–351. – DOI: 10.1016/j.jalgebra.2021.12.036 (журнал входит в Scopus Q1).

A.4 Bardakov V. G., Vershinin V. V., Wu J. On homotopy braids // *Forum Mathematicum*. – 2022. – Vol. 34, Is. 2. – DOI: 10.1515/forum-2021-0069 (журнал входит в Scopus Q1).

A.5 Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadave M. K. On  $\lambda$ -homomorphic skew braces // *Journal of Pure and Applied Algebra*. – 2022. – Vol. 226. – P. 106961. – DOI: 10.1016/j.jpaa.2021.106961 (журнал входит в Scopus Q1).

A.6 Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Singh M. Virtually symmetric representations and marked Gauss diagrams // *Topology and its Applications*. – 2022. – P. 306. – P. 107936. – DOI: 10.1016/j.topol.2021.107936 (журнал входит в Scopus Q3).

A.7 Vuong B. The volume of a hyperbolic antipodal octahedron // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2022. – Vol. 19, № 2. – P. 949–958. – DOI: 10.33048/semi.2022.19.079 (журнал входит в Scopus Q2).

A.8 Колесников И.А. Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 77. – С. 5–16. – DOI: 10.17223/19988621/77/1 (журнал входит в Scopus Q2).

A.9 Pchelintsev V. A. Estimates for variation of the first dirichlet eigenvalue of the Laplace operator // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2022. – Vol. 261. – P. 444–454. – DOI: 10.1007/s10958-022-05761-8 (журнал входит в Scopus Q3).

A.10 Chekhlov A. R., Danchev P. V. Weakly fully and characteristically inert socle-regular Abelian p-groups // *Communications in Algebra*. – 2022. – Vol. 50(11). – P. 4975–4987. – DOI: 10.1080/00927872.2022.2079131 (журнал входит в Scopus Q2).

A.11 Chekhlov A. R., Danchev P. V., Keef P. W. On transitivity-like properties for torsion-free Abelian groups // *Forum Mathematicum*. – 2022. – Vol. 34(4). – P. 1081–1094. – DOI: 10.1515/forum-2021-0295 (журнал входит в Scopus Q1).

A.12 Chekhlov A. R., Danchev P. V., Goldsmith B. On the generalized bassian property for abelian groups // *Acta Mathematica Hungarica*. – 2022. – Vol. 168(1). – P. 186–201. – DOI: 10.1007/s10474-022-01262-x (журнал входит в Scopus Q2).

A.13 Agafontsev M. V., Reyno V. V. Effect of low-frequency vibrations on the characteristics of the diffusion flame // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2022. – Vol. 2389. – P. 012004. – DOI: 10.1088/1742-6596/2389/1/012004.

A.14 Agafontsev M. V., Loboda E. L., Reyno V. V., Study of the effect of external pressure pulsations on the flame // *Proceedings of SPIE - 28<sup>th</sup> International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. – 2022. – Vol. 12341. – P. 123413K. – DOI: 10.1117/12.2644954.

A.15 Borodin V. I., Lun-Fu A. V., Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M., Mamontov D. V. Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. – 2022. – № 79. – P. 5–13. – DOI: 10.17223/19988621/79/1 (журнал входит в Scopus Q2).

A.16 Bubenchikov M. A., Chelnokova A. S., Mamontov D. V., Lun-Fu A. V. Fullerene movement in a carbon nanocontainer // *Crystals*. – 2022. – Vol. 12. – P. 1179. – DOI: 10.3390/cryst12081179 (журнал входит в Scopus Q2).

A.17 Poteryaeva V. A., Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M. Light isotope separation through the compound membrane of graphdiyne // *Membranes*. – 2022. – Vol. 12. – P. 612. – DOI: 10.3390/membranes12060612 (журнал входит в Scopus Q2).

A.18 Афанасьева А. А., Старченко А. В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 78. – С. 5–21. – DOI: 10.17223/19988621/78/1 (журнал входит в Scopus Q2).

A.19 Старченко А. В., Данилкин Е. А., Лещинский Д. В. Численное моделирование распространения выбросов автотранспорта в уличном каньоне // *Математическое моделирование (Matematicheskoe Modelirovanie)*. – 2022. – Т. 34, № 10. – С. 81–94. – DOI: 10.20948/mm-2022-10-05

A.20 Del I. V., Starchenko A. V. Forecast of meteorological values based on the model of a multilayer perceptron // Proceedings of SPIE - 28<sup>th</sup> International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. – 2022. – Vol. 12341. – 1234166. – DOI: 10.1117/12.2644805.

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых РИНЦ и/или сборниках материалов конференций:

A.21 Kolesnikov I. A. A One-parametric method of constructing conformal mapping // Proceedings of the Mathematical Center named after N.I. Lobachevsky. V.63 International Conference "Complex Analysis and Related Topics". Abstracts. – Kazan: KFU, 2022. – Vol. 63. – P. 33.

A.22 Бубенчиков А. М., Бразовский Е. Б. Гидродинамическая модель воронки от взрыва вертикально расположенным заглублённым зарядом // Сборник «ВЗРЫВНОЕ ДЕЛО». – 2022. – Выпуск № 135/92. – С. 94–107.

A.23 Бубенчиков А. М., Бразовский Е. Б. Гидродинамическая модель воронки от взрыва заглубленным зарядом // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2022. – Т. 8., № 2 (30). – С. 115–128. – DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-2-115-128.

A.24 Афанасьева А. А., Старченко А. В. К выбору численного метода для решения обратных задач ЭИТ // Марчуковские научные чтения – 2022 : тезисы Международной конференции, 3–7 октября 2022 г., Новосибирск, 2022. – С. 101–102. – DOI: 10.24412/cl-35065-2022-1-01-38.

A.25 Дель И. В., Старченко А. В. Использование методов нейросетевого моделирования для прогнозирования качества атмосферного воздуха // Аэрозоли Сибири. XXIX Конференция : тезисы докладов. Томск: Изд-во ИОА СО РАН. – 2022. – С. 43.

A.26 Афанасьева А. А., Старченко А. В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии // Перспективы развития фундаментальных наук : сборник трудов XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 26–29 апреля 2022 г.) : в 7 томах. Том 3. Математика / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – С. 9–11.