Многомерная абстрактная чепуха

В. Бардаков, Т. Козловская, К. Зимирева, А. Искра, П. Соколов, М. Зонов

20 июля 2024

Скрещенные π-категории

Пусть C – категория, на которой выделен объект $\mathbf{1}$, тензорное произведение $\otimes$ и семейства изоморфизмов

$$\{a_{U,V,W} \colon (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)\}, \ \ \{l_U \colon U \to U \otimes \mathbf{1}, r_U \to \mathbf{1} \otimes U\}.$$

C называется *моноидальной категорией*, если

$$(\mathrm{Id}_U \otimes a_{V,W,X})a_{U,V\otimes W,X}(a_{U,V,W} \otimes \mathrm{Id}\, X) = a_{U,V,W\otimes X}a_{U\otimes V,W,X},$$

$$a_{U,\mathbf{1},V}(l_U \otimes \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_U \otimes r_V.$$

Скрещенные π-категории

Двойственностью на C называется сопоставление каждому объекту U некоторого U^* и морфизмов рождения и уничтожения $b_U : 1 \to U \otimes U^*$, $d_U : U \otimes U^* \to 1$ таких что

$$(l_U)^{-1}(\mathrm{Id}_U \otimes d_U) a_{U,U^*,U} (b_U \otimes \mathrm{Id}_U) r_U = \mathrm{Id}_U,$$

$$(r_{U^*})^{-1}(d_U \otimes \mathrm{Id}_U)(a_{U^*,U,U^*})^{-1}(\mathrm{Id}_{U^*} \otimes b_U) l_{U^*} = \mathrm{Id}_U .$$

Скрещенные π-категории

Пусть π – группа, K – кольцо, C – аддитивная над K моноидальная категория, $C = \bigsqcup_{\alpha\in\pi}\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ где между объектами из C_α и C_β есть только нулевые морфизмы, когда если $\alpha \neq \beta$. Пусть двойственность на C сопоставляет $U \in C_\alpha$ объект $U^* \in C_{\alpha^{-1}}$, и тензорное произведение в C сохраняет разбиение: $U \otimes V \in C_{\alpha\beta}$ при $U \in C_\alpha$, $V \in C_\beta$.

Пусть C снабжена гомоморфизмом групп $\varphi\colon C \to \operatorname{Aut} C$, таким что функтор $\varphi_\alpha = \varphi(\alpha)$ отображает подкатегорию C_β в $C_{\alpha\beta\alpha^{-1}}$. Тогда категория C называется *скрещенной π-категорией*.

π-алгебры Фробениуса

Пусть K – кольцо, π – группа.

K-алгебра L называется *π-градуированной*, если $K = \bigoplus\limits_{\alpha\in\pi} L_\alpha$, где L_α – проективный K-модуль конечного типа и $L_\alpha L_\beta \subset L_{\alpha\beta}$.

Если $\eta\colon L\otimes L \to K$ – симметрическая билинейная форма на L, удовлетворяющая некоторым аксиомам, то (L,η) называется *алгеброй Фробениуса*.

Скрещенные π-алгебры

Пусть (L, η) – π-алгебра Фробениуса, $\varphi\colon \pi \to \operatorname{Aut} L$. Тройка (L, φ, η) называется *скрещенной π-алгеброй* если:

1. Автоморфизм $\varphi_\beta = \varphi(\beta)$ сохраняет билинейную форму η.
2. $\varphi_\beta|_{L_\beta} = \operatorname{Id}$.
3. Для всяких $a \in L_\alpha$ и $b \in L_\beta$ выполнено $\varphi_\beta(a) \in L_{\beta\alpha\beta^{-1}}$ и $\varphi_\beta(a)b = ba$.
4. Для всякого $c \in L_{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}$ выполнено

$$\operatorname{Tr}(c\varphi_\beta\colon L_\alpha \to L_\alpha) = \operatorname{Tr}(\varphi_{\alpha^{-1}}c\colon L_\beta \to L_\beta).$$

[TDIM2] Turaev V. Homotopy field theory in dimension 2 and group-algebras //arXiv preprint math/9910010. – 1999.

Пример

Пусть $\{\theta_{\alpha,\beta} \in K^*\}$ – нормированный 2-коцикл группы π со значениями в мультипликативной группе K^*, т.е. $\theta_{1,1} = 1$ и

$$\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\alpha\beta,\gamma} = \theta_{\alpha,\beta\gamma}\theta_{\beta,\gamma}.$$

Пусть L_α – свободный K-модуль ранга 1 с порождающим l_α. Умножение зададим формулой $l_\alpha l_\beta = \theta(\alpha,\beta) l_{\alpha\beta}$. Положим

$$\eta(l_\alpha, l_{\alpha^{-1}}) = \theta_{\alpha,\alpha^{-1}}.$$

Тогда существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon \pi \to \operatorname{Aut} L$ такой что $\varphi_\beta(l_\alpha) l_\beta = l_\beta l_\alpha$. Пусть $L = \bigoplus L_\alpha$. Тогда (L, φ, η) – скрещенная π-алгебра.

В работе [TDIM2] показано, что полупростые скрещенные π-алгебры (т.е. такие алгебры L, в которых компонента L_1 полупроста), можно свести к алгебрам, построенным в примере на предыдущем слайде.

В работе [TDIM3] ставится вопрос о классификации π-алгебр для некоторых классов групп π (в т.ч. циклических или абелевых) и о построении примеров таких алгебр, не являющихся полупростыми.

[TDIM3] Turaev V. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories //arXiv preprint math/0005291. – 2000.

Пусть π – группа и K – коммутативное кольцо с единицей. Введём отображение $I\colon \pi \to K$, где $I(\alpha) = 1$ при $\alpha = 1$ и $I(\alpha) = 0$ иначе.

Теорема 1

Пусть A – коммутативная алгебра над коммутативным кольцом с единицей K, π – группа и $A[\pi]$ – групповая алгебра над A. Пусть

$$(\cdot,\cdot)\colon A \otimes A \to K$$

– симметрическая билинейная форма, сохраняющая умножение, и

$$\varphi\colon \pi \to \mathrm{Inn}\pi \leqslant \mathrm{Aut}\,\pi\colon \;\varphi(\alpha) = \varphi_\alpha\colon \;\beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}.$$

Введём форму

$$\eta\colon L \otimes L \to K,\; \eta(\nu\alpha,\mu\beta) = (\nu,\mu)I(\alpha\beta).$$

Тогда (L,φ,η) – скрещенная π-алгебра над K.

Предложение 2

Всякая скрещенная $\mathbb{Z}_2$-алгебра коммутативна.

Предложение 3

Пусть $L = A[\pi] = \bigoplus_{\alpha\in\pi} L_\alpha$ – групповая алгебра, π – циклическая группа и $\varphi\colon \pi \to \operatorname{Aut} L$ таково, что $\varphi_\alpha|_{L_\alpha} = \mathrm{Id}$, $\varphi_\alpha(L_\beta) \subset L_\beta$. Тогда φ – тривиальный гомоморфизм.

Если π не является циклической, то предложение 3 неверно. Например, $\pi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \langle\alpha\rangle \oplus \langle\beta\rangle$, $\varphi_\alpha\colon (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, -\beta)$, $\varphi_\beta\colon (\alpha, \beta) \mapsto (-\alpha, \beta)$.

Предложение 4

Пусть $\pi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$, $\varphi_\alpha \colon (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, -\beta)$, $\varphi_\beta \colon (\alpha, \beta) \mapsto (-\alpha, \beta)$. Ни для какой билинейной формы η тройка (L, φ, η) не является скрещенной π-алгеброй.

Проблема

Описать скрещенные π-алгебры для случаев, когда π – конечно порождённая абелева группа.

Спасибо за внимание!