

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГУ)

УДК 514.1

Рег. № НИОКТР АААА-А19-119120690010-8

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ

И.о. проректора по научной и
инновационной деятельности ТГУ
д-р физ.-мат. наук, профессор

_____ А.Б. Ворожцов
« _____ » _____ 2024 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ


по теме:
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
(промежуточный, этап 5)

Соглашение № 075-02-2023-943

Начальник научного управления
канд. геол.-минерал. наук

Руководитель НИР,
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН


_____ Т.С. Краснова
подпись, дата

 _____ А.Ю. Веснин
подпись, дата

Томск 2024

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ


Руководитель НИР,
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук,
чл.-корр. РАН


31.01.2024
подпись, дата

А.Ю. Веснин
(введение, раздел 2,
заключение)


Исполнители:

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


В.Г. Бардаков
(подраздел 1.1)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата

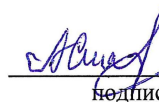
А.М. Бубенчиков
(подраздел 1.2)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


М.А. Бубенчиков
(подраздел 1.2)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


А.В. Старченко
(подраздел 1.3)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


Е.А. Тимошенко
(подраздел 1.4)

Вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


А.Р. Чехлов
(подраздел 1.5)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


Н.В. Абросимов
(подраздел 1.6)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата

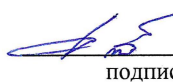
М.В. Агафонцев
(подраздел 1.7)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


Х.Б. Выонг
(подраздел 1.8)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


Е.А. Данилкин
(подраздел 1.3)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук


31.01.2024
подпись, дата


Т.А. Козловская
(подраздел 1.9)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

 31.01.2024
подпись, дата


И.А. Колесников
(подраздел 1.10)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

 31.01.2024
подпись, дата


И.В. Мирошниченко
(подраздел 1.11)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

 31.01.2024
подпись, дата


Ц.Д. Норбосамбуев
(подраздел 1.12)

Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук

 31.01.2024
подпись, дата


В.А. Пчелинцев
(подраздел 1.13)

Мл. науч. сотр.

 31.01.2024
подпись, дата


Д.В. Лещинский
(подраздел 1.3)

Мл. науч. сотр.

 31.01.2024
подпись, дата


В.А. Потеряева
(подраздел 1.2)

Мл. науч. сотр.

 31.01.2024
подпись, дата

А.С. Челнокова
(подраздел 1.2,
раздел 2)

Нормоконтролер

 31.01.2024
подпись, дата

Е.Н. Соколенко

РЕФЕРАТ

Отчет 98 с., 1 кн., 22 рис., 3 табл., 86 источн., 1 прил.

АБЕЛЕВА ГРУППА, ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Объектами исследования являются свойства абелевых групп, алгебраические системы, уравнения Янга-Бакстера, группы кос и их обобщения, геометрические структуры на трехмерных многообразиях и орбифолдах, конформные отображения, спектральные свойства эллиптических операторов, конвекция, теплопроводность и излучение в элементах строительных сооружений и в системах охлаждения, процессы горения, молекулярные кристаллы, свойства ультратонких наномембран, качество атмосферного воздуха в уличных каньонах городов, прогнозирование временных рядов, задачи электроимпедансной томографии.

Цель работы – получение новых научных результатов, направленных на развитие теорий, описывающих свойства исследуемых объектов, организация и проведение научно-образовательных мероприятий, направленных на развитие математики и математического образования в регионе.

В процессе работы получены новые научные результаты по 13 отдельным задачам в направлениях фундаментальной математики, математических методов в механике, математическом моделировании и анализе данных.

В рамках научно-образовательной деятельности Центра в 2023 году были опубликованы 28 статей, проведено 9 научных и 11 образовательных мероприятий, 2 курса повышения квалификации.

Таким образом, все запланированные результаты в соответствии с Программой развития Центра на 2023 год получены.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1 Научная составляющая	15
1.1 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	15
1.2 Математическое моделирование динамики крупных макромолекул.....	21
1.3 Математическое моделирование некоторых задач экологии и медицины	24
1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп.....	36
1.5 Обобщенные группы Басса	39
1.6 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	42
1.7 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных углеводородных топлив с применением оптических методов и математического моделирования	47
1.8 Узлы и зацепления в трехмерном торе	52
1.9 Мульти-группы	59
1.10 Конформное отображение прямоугольника на многоугольник. Конформное отображение полосы на круговой счетноугольник типа полосы.....	63
1.11 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	68
1.12 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов.....	71
1.13 Спектральная (p, q) -задача для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в областях с анизотропными гёльдеровыми особенностями.....	74
2 Образовательная составляющая.....	78
2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные центром	78
2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и образовательными организациями.....	79
2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром	81
2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра.....	81
2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре	81

2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром	82
2.7 Вовлечение школьников в мероприятия центра.....	82
2.8 Дополнительная информация о деятельности центра.....	86
Заключение.....	87
Список использованных источников.....	88
Приложение А (обязательное) Публикации	95

ВВЕДЕНИЕ

Коллектив НОМЦ проводит исследования по трем большим направлениям, которые соответствуют сформированным в НОМЦ научным группам:

- фундаментальная математика,
- математические методы в механике,
- математическое моделирование и анализ данных.

Научные сотрудники группы фундаментальной математики проводят исследования по актуальным направлениям современной алгебры, геометрии и топологии, неевклидовой геометрии. Полученные результаты опубликованы в статьях [А.1, А.2, А.3, А.4, А.5, А.6, А.7, А.8, А.9, А.10, А.11, А.12] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus или входящих в перечень ВАК, и [А.25] в сборнике конференции.

1. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. По теореме жесткости Мостова [1], любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Важнейшим геометрическим инвариантом является объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести задачу к вычислению объема многогранника. Задача получения формул для объемов гиперболических многогранников в важных частных случаях решалась еще Н.И. Лобачевским, который нашел объемы идеальных и биортогональных гиперболических тетраэдров [2]. В общем случае задача решена лишь для гиперболических многогранников простейшего комбинаторного типа – тетраэдров. Формулы для объема гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов независимо получены в работах Г. Сфорца [3], Ю. Чо и Х. Кима [4], Дж. Мураками и М. Яно [5], Д.А. Деревнина и А.Д. Медных [6]. В 2021 г. Н.В. Абросимовым и Б. Выонгом [7] в рамках данного проекта впервые получена явная интегральная формула, выражающая объем произвольного гиперболического тетраэдра через длины его ребер. Все указанные формулы достаточно сложны и не всегда удобны для приложений, в частности, для вычисления объемов многогранников более сложного комбинаторного типа путем разбиения их на тетраэдры. В рамках данного проекта этот пробел удалось отчасти исправить. Так, в 2022 году нами найдена простая формула для объемов трехпрямоугольных тетраэдров в пространстве Лобачевского, у которых три ребра при одной из вершин попарно ортогональны. В отчетном 2023 году удалось обобщить этот результат: получена замкнутая интегральная формула для объемов четырехпараметрического семейства гиперболических тетраэдров, у

которых хотя бы одно ребро ортогонально двум другим ребрам. Важно, что любой многогранник можно разбить на тетраэдры указанного типа. Это позволяет использовать найденную формулу для вычисления объемов более сложных многогранников в пространстве Лобачевского, что продемонстрировано нами на ряде примеров. Кроме того, разработанный в рамках проекта новый метод получения замкнутых интегральных формул для объемов тетраэдров специального вида мы планируем использовать для нахождения новой формулы объема произвольного гиперболического тетраэдра, удобной для практических вычислений.

2. Одним из основных уравнений математической физики является уравнение Янга-Бакстера, которое было введено Янгом, изучавшим проблему движения нескольких тел на прямой, а также Бакстером, строившем статистические модели. Уравнение Янга-Бакстера иногда называют уравнением 2-симплекса или уравнением треугольника. В последние десятилетия активно изучаются обобщения уравнения Янга-Бакстера- уравнение тетраэдров (уравнение 3-симплексов), которое возникает в электрических сетях как преобразование «звезда-треугольник». Решение уравнений подобного вида имеет многочисленные применения на практике. Естественно, изучать уравнение n -симплексов, которое является обобщением уравнения Янга-Бакстера. Несмотря на то, что в настоящее время нет общей теории подобных уравнений и неясны практические приложения, эти уравнения заслуживают глубокого изучения.

За отчетный период В.Г. Бардаковым доказана общая теорема, позволяющая по решению n -симплексного уравнения и m -симплексного уравнения строить решения $n+m$ -симплексного уравнения. Используя методы тропической геометрии, введена процедура, позволяющая по рациональным решениям строить полиномиальные решения n -симплексных уравнений. Введено понятие вербального решения n -симплексного уравнения. Изучены вербальные решения уравнения тетраэдра на произвольной группе. В частности, описаны вербальные решения уравнения тетраэдра на свободной группе. Отметим, что ранее подобное описание было получено для свободных абелевых групп.

3. Классическая теория узлов, рассматривая задачи вложений окружности в трехмерную сферу, была расширена до более широкой теории. Например, теорию виртуальных узлов можно рассматривать как теорию узлов на утолщенных замкнутых ориентированных поверхностях. Теория узлов в других трехмерных многообразиях, таких как проективное и линзовое пространство, воплотилась в жизнь в последнее десятилетие. Х.Б. Вьюнг в 2023 г. исследовал комбинаторный подход к изучению узлов в трехмерном торе. Был предложен алгоритм вычисления скрученных полиномов Александра для узлов и зацеплений в трехмерном торе. Доказано, что кручение Рейдемейстера дополнения к

зацеплению и его скрученный полином Александра равны. Связь между полиномом Александра узла и инвариантом кручения Рейдемейстера, Франца и де Рама для дополнения узла была впервые замечена Милнором. Как следствие этого соотношения, Милнор дал еще одно доказательство симметрии полинома Александра. Милнор применил этот результат к теории узлов, рассматривая случай классического узла в трехмерной сфере, то есть дополнение узла имеет гомологию окружности. Оказывается, существуют аналогичные отношения между кручением Рейдемейстера и скрученным полиномом Александра для случая дополнения узла в других пространствах, отличных от трехмерной сферы, когда первая группа гомологии содержит также кручение. Технология получения явных отношений была создана Милнором, используя теорию простых гомотопий для CW-комплексов и свободное дифференциальное исчисление Фокса. Они допускают клеточную структуру CW для узла, связанную с данным представлением фундаментальной группы, так что граничные операторы получаются посредством свободных производных Фокса. Таким образом показано, что этот метод имеет эффект также для случая узлов и зацеплений в трехмерном торе.

4. В последние десятилетия были введены и активно изучаются алгебраические системы с однотипными операциями. В частности, димоноиды, дюплексы, кортежные полугруппы. Эти алгебраические системы тесно связаны с вертексными и другими алгебрами, введенные в работах Лодея. Естественно, изучать алгебраические системы, на которых определены несколько групповых операций. Примерами таких алгебраических систем являются косые брейсы, которые связаны с решением уравнения Янга-Бакстера. А также брейсовые системы, состоящие из множества с определенным на нем набором групповых операций, которые связаны с решением n -симплексного уравнения, являющегося обобщением уравнения Янга-Бакстера.

Т.А. Козловская на множестве квадратных матриц определила алгебраические системы, содержащие набор полугрупповых операций, которые связаны аксиомой смешанной ассоциативности. Данные операции имеют приложения в теории матриц с нестандартным умножением, которые широко изучаются в теории физических структур.

5. И.А. Колесниковым получена формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для отображения прямоугольника (и треугольника с углами $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/4$) на многоугольник. С помощью этой формулы получено интегральное уравнение для модуля четырехугольника. Конформные отображения имеют приложения в геометрической теории функций, в задачах математической физики, в частности, конформный модуль имеет приложения в электронике [8]. Существует подход, когда отображение прямоугольника на многоугольник записывается с помощью композиции классической формулы

Кристоффеля–Шварца и эллиптического синуса [9, 10], в данной работе получено «прямое» отображение прямоугольника на многоугольник. Такое представление отображения более удобно для некоторых задач, в том числе для нахождения конформного модуля.

Также И.А. Колесниковым в 2023 году получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца для отображения полосы на односвязную область типа полосы, обладающую симметрией переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей (круговой счетноугольник). Численно-аналитический подход построения конформного отображения полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых, реализован в [11]. Формула Кристоффеля–Шварца получила обобщение для односвязных счетноугольников типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых, в работе [12], в [13] для многосвязных счетноугольников типа полосы. Конформные отображения на счетноугольники типа полосы имеют приложения в задачах гидродинамики, электростатики, теплопроводности, в теории дифференциальных уравнений.

6. В статье [14] Е.А. Тимошенко и А.Ю. Степанова показали, что кольцо K изоморфно кольцу эндоморфизмов группы $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$. Также им удалось определить аналог определителя для таких матриц, необходимые и достаточные условия обратимости, а также формулы для построения обратной матрицы.

Норбосамбуев Ц.Д. рассмотрел аддитивные задачи в кольце K , то есть, то, как K и его отдельные формальные матрицы могут аддитивно порождаться обратимыми, нильпотентными, идемпотентными и другими «специальными» (например, q -потентами или обратимо-регулярными) формальными матрицами из K . В [А.7] Ц.Д. Норбосамбуев показал, что при $p > 2$, K – 2-хорошее, а при $p = 2$ K не является хорошим, то есть в K найдутся матрицы, непредставимые в виде сумм конечного числа обратимых матриц.

7. В отчетный период В.А. Пчелинцевым исследовалась спектральная (p, q) -задача для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в нерегулярных областях евклидова пространства. Нахождение нижних и верхних оценок собственных чисел нелинейного оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана является давней сложной открытой задачей, которая восходит к Поля и Сегё. В случае выпуклых областей нижняя оценка первого нетривиального собственного числа оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана была получена в терминах евклидова диаметра выпуклой области. К сожалению, в невыпуклых областях спектральные оценки не могут быть получены в терминах евклидова диаметра области. По этой причине в проекте был предложен метод, основанный на теории операторов композиции в пространствах Соболева, позволивший получать нижние оценки первого нетривиального собственного числа (p, q) -задачи Неймана для нелинейного весового оператора p -Лапласа в

невыпуклых областях с гёльдеровыми особенностями. Изучение нелинейного весового оператора p -Лапласа мотивировано его различными приложениями в механике жидкости, в потоках сквозь пористые среды, в гляциологии.

8. В 1972 году представитель томской алгебраической школы А.М. Себельдин описал в работе [15] все вполне разложимые группы (без кручения), определяющиеся своим кольцом эндоморфизмов. Позднее в [16] он же описал все вполне разложимые группы, определяющиеся своей полугруппой эндоморфизмов.

Так как группа автоморфизмов абелевой группы B несет меньше информации о B , чем полугруппа или кольцо эндоморфизмов группы B , то следующим этапом исследования вполне разложимых групп естественным образом стал вопрос о том, какие из этих групп определяются своей группой автоморфизмов. Этой теме для случая конечного ранга группы B была посвящена защищенная в 2014 году в ТГУ диссертация В.К. Вильданова (ученика А.М. Себельдина) [17], в которой доказан ряд важных теорем.

Как отмечается в работе Кона [18], строение линейных групп порядка n существенно различается для случаев $n = 2$ и $n \geq 3$. Использование техники, разработанной ранее для получения полного решения вопроса об определяемости вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов [19], позволило показать, что всякое множество попарно перестановочных инволюций такой группы автоморфизмов, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством диагональных инволюций. Этот факт открывает дорогу к получению полного ответа на вопрос о том, какие вполне разложимые абелевы группы конечного ранга определяются своей группой автоморфизмов.

9. За отчетный период А.Р. Чехловым в соавторстве с П.В. Данчевым доказано, что все редуцированные абелевы p -группы являются сильно инертными цокольно регулярными, получен ряд свойств сильно инертных подгрупп и приведены примеры таких подгрупп. Полученные результаты позволили ответить на вопрос Breaz-Călugăreanu, поставленный в 2017 г. в статье [1].

В соавторстве с П.В. Данчевым и П. Кифом продолжается исследование абелевых групп, близких к группам Басса (Bassian groups) [2, 3]. Получено полное описание конечно (ко-) Бассовых, вполне обобщенных (ко-) Бассовых и абсолютно обобщенных (ко-) Бассовых групп.

В соавторстве с П.В. Данчевым, Б. Голдсмитом и П. Кифом начато исследование относительно хопфовых абелевых групп.

В соавторстве с П.В. Данчевым доказано, что всякая равномерно вполне инертная подгруппа данной группы соизмерима с вполне инвариантной ее подгруппой, это решение

известного вопроса о таких подгруппах. Также в соавторстве с П.В. Данчевым получен ряд свойств характеристически инертных подгрупп абелевых групп.

Получено описание всех делимых, примарных, а также сепарабельных и алгебраически компактных групп без кручения, лиево кольцо эндоморфизмов которых разрешимо.

В области прикладной математики и механики основным направлением исследований являются актуальные задачи теоретической механики и математической физики, сосредоточенные, в частности, на задачах молекулярной физики и методов молекулярной динамики, а также задачах по конвективному тепломассопереносу и методов сложного теплообмена с исследованием характеристик сгорания жидкого топлива. Результаты работы по этому направлению опубликованы в статьях [А.13, А.14, А.15, А.16, А.17, А.18, А.19] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus или входящих в перечень ВАК, и [А.26] в сборнике конференции.

1. Группой под руководством А.М. Бубенчикова проведены исследования по динамике крупных углеродных молекул, взаимодействующих с ограничивающими поверхностями, компонентами газовых смесей и внешними магнитными полями. Такие исследования имеют прямое отношение к изучению фундаментальных свойств нанокapsул, которые уже сейчас находят широкое применение в биотехнологиях, энергетике, материаловедении и медицине. Используя основное свойство нанокapsул изолировать содержимое от молекулярного окружения, наноконтейнеры могут использоваться для инкапсуляции редких веществ, хранения водорода, доставки сильнодействующих лекарственных веществ к пораженным тканям. Фуллерен, как углеродный объект замкнутой формы, имеющий минимальные размеры, часто используется с точки зрения проявления своих внешних свойств, как фрагмент более общей структуры, в качестве строительного элемента. Наиболее многообещающие применения фуллеренов связаны с органическими солнечными элементами, светоизлучающими устройствами, квантовыми битами, фуллереновыми переключателями.

2. Исследования процессов горения играют важную роль в различных областях науки и техники. Понимание этих процессов позволяет разрабатывать более эффективные способы сжигания топлива и уменьшить выбросы вредных веществ, что сказывается на экологическое и климатическое состояние планеты. Фундаментальные исследования процессов горения являются основой для понимания и управления процессами, протекающими в пламени, что является немаловажным аспектом для развития и оптимизации различных промышленных процессов.

Исследование, проводимое в рамках выполнения проекта М.В. Агафонцевым, направлено на изучении процессов, происходящих при диффузионном горении метана, при наличии внешних источников возмущений в виде пульсаций давления. На данном этапе исследования проведен сравнительный анализ данных, полученных в результате физического и математического моделирования диффузионного горения метана при наличии внешнего источника пульсации давления. Проведен анализ спектров изменения температуры в пламени при различных режимах внешних воздействий. Показано качественное сходство результатов математического и физического моделирования. На основании экспериментальных данных выявлены характерные режимы горения.

3. Теплообмен излучением в диатермичных (прозрачных для излучения) средах является объектом исследования многих научных групп у нас в стране и за рубежом [23, 24, 25, 26, 27]. К диатермичным средам относятся одноатомные и двухатомные газы (O_2 , H_2 , N_2 и др.), так как излучение в них может возникать только в результате электронных переходов при очень высоких температурах, измеряемых тысячами градусов Кельвина. Характерными же представителями излучающих (поглощающих) газов являются газы, молекулы которых состоят из трех и более атомов - аммиак (NH_3), водяной пар (H_2O), углекислый газ (CO_2). Для случая турбулентной естественной конвекции в кубической полости показано [28], что учет излучения газа, при определенных условиях, крайне незначительно влияет на процессы переноса массы и энергии внутри рассматриваемого объема. В частности, среднее полное число Нуссельта изменяется только лишь на 1,5 %. Однако для рассматриваемого класса задач не следует пренебрегать излучением между ограничивающими поверхностями. Если перепад температур между стенками достаточно высок или течение жидкости происходит при относительно невысокой скорости (например, термогравитационная конвекция), то вклад радиационной составляющей может быть довольно значительным. Мирошниченко И.В. за отчетный период проведено численное моделирование конвективно-радиационного теплообмена в 2D и 3D замкнутых дифференциально обогреваемых полостях, с целью определения условий при которых данные 3D моделирования могут быть частично заменены данными, полученными при решении плоских задач.

По направлению математического моделирования и анализа данных группой под руководством А.В. Старченко совместно с Е.А. Динилкиным и Д.В. Лищинским проводятся исследования в области математического моделирования и вычислительной математики, сосредоточенные, в частности, на задачах, связанных с изучении локальных весенних паводков и процессов деформации русла реки, исследованием процессов распространения выбросов автотранспорта и решения обратных задач электроимпедансной

томографии. Полученные в рамках выполнения работы результаты опубликованы в статьях [A.20, A.21, A.22, A.23, A.24] в рейтинговых журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и [A.27, A.28] в сборниках конференций.

Поведение водного объекта оказывает существенное влияние на жизнь и деятельность человека. Вопросы моделирования двухфазных течений газа с твердыми частицами возникают во многих задачах, связанных с моделированием течений в окружающей среде, например, речного течения с учетом плавающего льда. В большинстве таких течений несущая фаза движется в турбулентном режиме. Наличие твердых частиц и их распределение в потоке оказывает существенное влияние на структуру потока. Основной причиной повышенного интереса к моделированию речного течения с учетом движущихся льдин является возможность прогнозирования появления ледовых заторов и связанных с ними локальных затоплений прибрежных территорий.

Для обеспечения комфортности пребывания человека на городской территории необходимо осуществление мониторинга качества атмосферного воздуха и оперативного прогноза. Одним из эффективных способов исследования процессов распространения выбросов автотранспорта является применение математических моделей, описывающих движение воздуха и перенос примеси. Используя математическое моделирование, можно, исходя из скорости, направления ветра, а также интенсивности выбросов загрязняющих веществ автотранспортом, прогнозировать, какой способностью к проветриванию обладает рассматриваемый участок городского ландшафта. Микромасштабное моделирование атмосферного пограничного слоя в городской застройке в настоящее время представляет собой одно из важнейших современных направлений вычислительной механики и имеет большое научное значение.

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволит восстановить внутреннюю структуру объектов живой природы, используя электрические измерения только на границе объекта. Математически ЭИТ описывается с помощью коэффициентной обратной задачи. В данной работе обратная задача ЭИТ рассматривается в полной электродной модели, особенностью которой является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегрально-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов.

Все запланированные на 2023 год работы выполнены, все ожидаемые результаты получены. Все полученные результаты являются новыми, они прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

1 Научная составляющая

1.1 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

Введение. Уравнение Янга-Бакстера – одно из основных уравнений статистической физики. Оно было введено в работах Ч. Янга 1968 г. и Р.Д. Бакстера 1971 г. Уравнение Янга-Бакстера (далее сокращенно УВЕ) используется в некоторых точно решаемых моделях математической физики. В частности, при изучении модели льда и решеточной 8-вершинной модели.

В 1992 году В. Дринфельд определил теоретико-множественное решение УВЕ и сформулировал вопрос об их описании множества его решений. С тех пор появились сотни работ, посвященных этому вопросу.

Были установлены связи УВЕ с инвариантами узлов и зацеплений, как классических, так и виртуальных и сингулярных, а также с представлениями групп кос автоморфизмами некоторых алгебраических систем.

Пусть X - произвольное множество. Функция $R: X^{\times 2} \rightarrow X^{\times 2}$ называется теоретико-множественным решением уравнения Янга-Бакстера, если выполнено условие:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

где функция $R_{ij}: X^{\times 3} \rightarrow X^{\times 3}$, действует на i -ой и j -й компонентах как R , а на оставшейся тождественно.

Уравнение Янга-Бакстера имеет следующую геометрическую интерпретацию (рисунок 1).

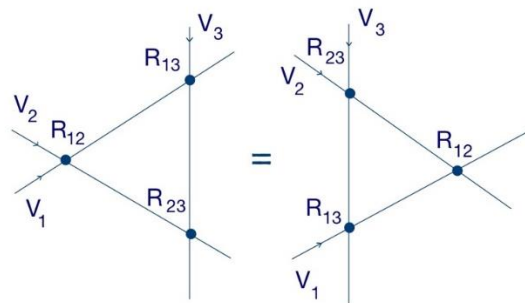


Рисунок 1 – Равенство двух динамических систем

С уравнением Янга-Бакстера тесно связано уравнение: $S_1S_2S_1 = S_2S_1S_2$, которое называют косовым уравнением. Название объясняется тем, что оно имеет вид длинного соотношения в группе кос. Напомним, что группа кос B_n порождается элементами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяется соотношениями:

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 2,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1.$$

Геометрическая интерпретация первого соотношения группы кос приведена на рисунке 2. Разница между левым и правым рисунком состоит в том, что каждый перекресток на левом рисунке соответствует порождающему σ_i , а на правом R_{ij} - соответствует пересечению i -ой и j -й нитей. Таким образом, уравнение $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$ можно рассматривать как соотношение в группе кос, а также как третье преобразование Рейдемейстера в теории узлов.

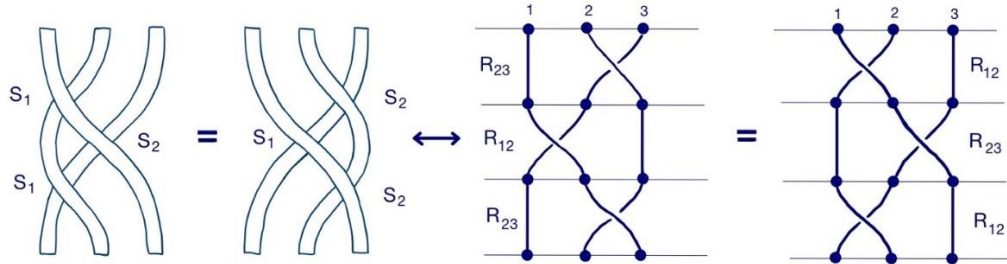


Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация уравнения $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$

Известно, что если $S: X^2 \rightarrow X^2$ удовлетворяет равенству $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$, то отображение $PS: X^2 \rightarrow X^2$, где P — это отображение перестановки из простейшего примера 1.2 (ниже), удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера $R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$.

Таким образом решение уравнения $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$ равносильно решению уравнения Янга-Бакстера $R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$.

Приведем примеры.

Пример 1.1. Если X – произвольное множество, то можно взять в качестве S тождественное отображение, т.е. $S(x, y) = (x, y)$ для $x, y \in X$. Несложно убедиться в том, что S удовлетворяет равенству $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$.

Пример 1.2. Если X – произвольное множество, то отображение $S = P$, заданное перестановкой $S(x, y) = (y, x)$ также удовлетворяет равенству $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$.

Пример 1.3. Если X — множество целых чисел, то отображение $S(x, y) = (y + 1, x)$ для $x, y \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет косовому уравнению.

Пример 1.4. Пусть X – произвольная группа. Тогда отображение $S(g, h) = (h, h^{-1}gh)$ для $g, h \in G$ удовлетворяет уравнению $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$.

Для изучения решений УВЕ были введены новые алгебраические системы: квандлы, биквандлы, брэйсы, косые брэйсы. Указанные алгебраические системы успешно используются для построения новых сильных инвариантов для различных обобщений классических узлов и зацеплений.

Пусть X - произвольное множество. Функция $R: X^{\times 3} \rightarrow X^{\times 3}$ называется решением уравнения тетраэдра (далее сокращенно ТЕ), если выполнено условие:

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123},$$

где функция $R_{ijk}: X^{\times 6} \rightarrow X^{\times 6}$, действует на i -ой, j -й и k -й компонентах как R , а на оставшихся -тождественно. Рисунок 3 показывает, как по уравнению Янга-Бакстера можно написать уравнение тетраэдра.

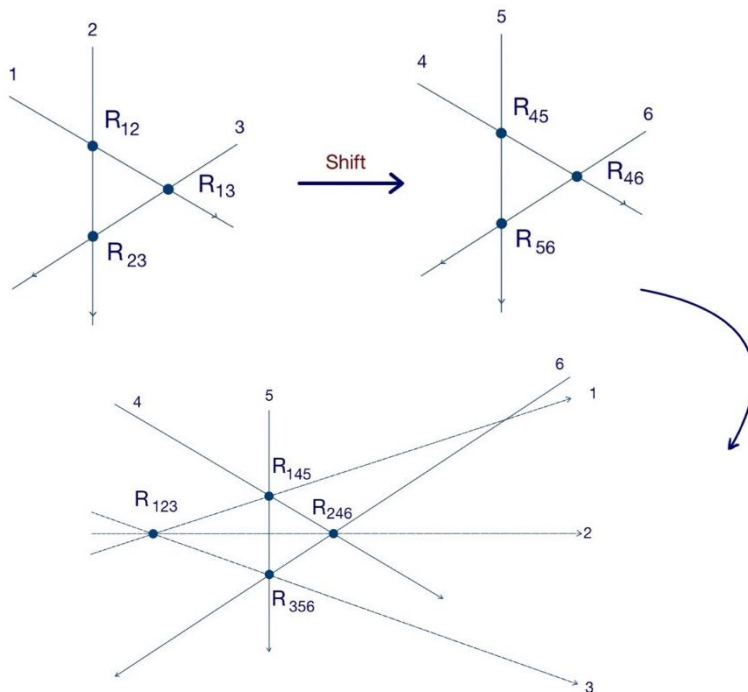


Рисунок 3 – Переход от двумерного случая к трехмерному

Впервые уравнение тетраэдров возникло в работе А. Замолотчикова в 1981 году. Уравнение тетраэдра также имеет геометрическую интерпретацию, которая приведена на рисунке 4 ниже.

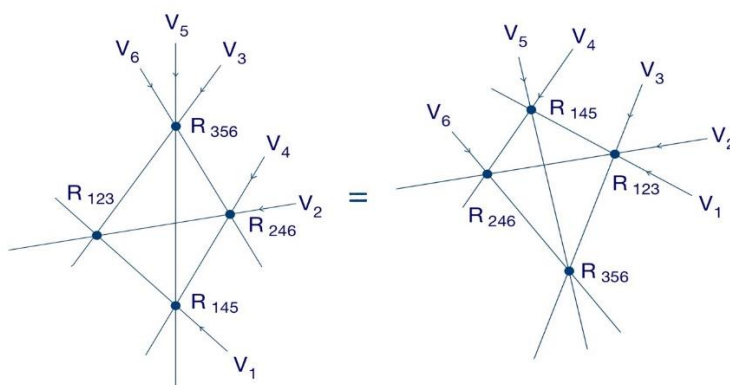


Рисунок 4 – Геометрическая интерпретация уравнение тетраэдра

Уравнение Янга-Бакстера соответствует треугольнику. Его обобщением является уравнение тетраэдра. Учитывая, что треугольник является 2-мерным симплексом, а тетраэдр – 3-мерным, можно для каждого n -мерного симплекса написать уравнение аналогичное уравнению Янга-Бакстера. Отметим, что некоторые решения уравнения тетраэдра найдены. Почти ничего не известно для симплексов более высокой размерности.

Результаты и обсуждения. В отчетный период изучались решения уравнений Янга-Бакстера, его многомерные аналоги (уравнения n -симплекса) и алгебраические системы, связанные с ними. В частности, уравнения тетраэдра, а также параметрические уравнения Янга-Бакстера. Найдены некоторые решения уравнения n -симплекса.

Пусть X – произвольное множество, $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Функция $R: X^{\times n} \rightarrow X^{\times n}$ называется решением уравнения n -симплекса, если выполнено равенство:

$$R_1 R_2 \dots R_{n+1} = R_{n+1} R_n \dots R_1,$$

где функция $R_i: X^{\times N} \rightarrow X^{\times N}$ действует на n компонентах как R и тождественно на оставшихся компонентах.

Нами были получены следующие результаты:

Теорема 1.1.

1. Пусть R – решение уравнения n -симплекса, тогда его продолжения $R \times Id$ и $Id \times R$ являются решениями уравнения $n + 1$ -симплекса.

2. Пусть $R = (f_1, \dots, f_n)$ -решение уравнения n -симплекса. $(a, \dots, a) \in X^n$ -неподвижная точка при действии R . Тогда $R_a = (f_1|_{x_n=a}, \dots, f_{n-1}|_{x_n=a})$ решение уравнения $n - 1$ -симплекса.

Пусть K – упорядоченное поле. Решение уравнения n -симплекса называется рациональным, если каждая его компонента является рациональной функцией от координат и кусочно-линейным, если каждая его компонента является кусочно-линейной функцией координат.

Тропикализацией рационального решения $R: K^{\times n} \rightarrow K^{\times n}$ называется функция $R^t: K^{\times n} \rightarrow K^{\times n}$, полученная заменой операций:

$$x + y \rightarrow \max(x, y); x * y \rightarrow x + y; \frac{x}{y} \rightarrow x - y.$$

Теорема 1.2. Если R – рациональное решение уравнения n -симплекса, в котором все компоненты содержат лишь коэффициенты 0 или 1, тогда R^t - кусочно-линейное решение уравнения n -симплекса.

Одним из известных рациональных решений уравнения тетраэдра является так называемое электрическое решение:

$$R(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1);$$

$$x_1 = \frac{xy}{x + z + xyz},$$

$$y_1 = x + z + xyz,$$

$$z_1 = \frac{yz}{x + z + xyz}.$$

Это преобразование эквивалентно преобразованию «звезда-треугольник» в электрических цепях (рисунок 5).

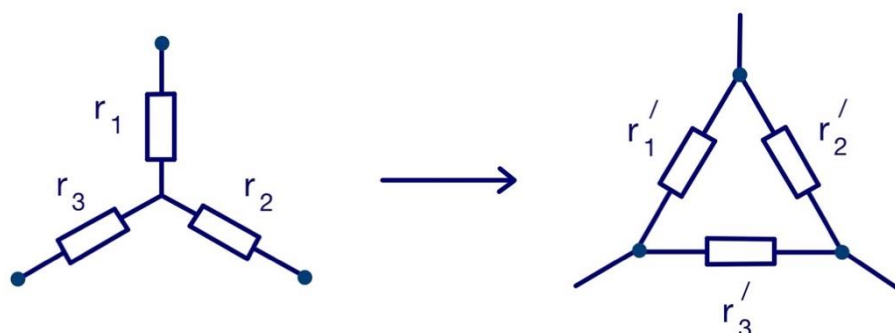


Рисунок 5 – Преобразование звезда-треугольник

Пример 1.5. Тропикализацией электрического решения

$$R(x, y, z) = \left(\frac{xy}{x + z + xyz}, \quad x + z + xyz, \quad \frac{yz}{x + z + xyz} \right)$$

является отображение:

$$R^t(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - \max\{x, z, x + y + z\} \\ \max\{x, z, x + y + z\} \\ y + z - \max\{x, z, x + y + z\} \end{pmatrix},$$

которое также является решением уравнения тетраэдра.

Его линейными кусками будут:

$$R^{t,1}(x, y, z) = (y, x, y + z - x),$$

$$R^{t,2}(x, y, z) = (x + y - z, z, y),$$

$$R^{t,3}(x, y, z) = (-z, x + y + z, -x).$$

Отметим, что $R^{t,1}$ и $R^{t,2}$ также дают линейные решения уравнения тетраэдра.

Каждое решение уравнения Янга-Бакстера на множестве X определяет две бинарные алгебраические операции. Аналогично, каждое решение уравнения тетраэдра определяет три тернарные алгебраические операции. Доказана следующая теорема:

Теорема 1.3. Пусть дана алгебраическая система $(X, *, \circ)$ с двумя бинарными операциями $*$ и \circ , которые удовлетворяют следующим аксиомам:

$$\begin{aligned}x \circ (y \circ z) &= (x \circ y) \circ (x \circ z); \\(x * y) \circ (z * w) &= (x \circ z) * (y \circ w); \\x * y &= (z * x) * (z * y).\end{aligned}$$

Тогда отображение $(x, y, z) \rightarrow (x, y, (x * y) \circ z)$ дает решение ТЕ.

Тернаром назовем непустое множество X с одной тернарной алгебраической операцией: $[\circ, \circ, \circ]: X \times X \times X \rightarrow X$.

Теорема 1.4. Пусть $(X, [\circ, \circ, \circ])$ – тернар. Тогда отображение $(x, y, z) \mapsto ([x, y, z], y, z)$ является решением ТЕ тогда и только тогда, когда для всех $x, y, z, t, p, q \in X$ справедливо равенство:

$$[[x, t, p], [y, t, q], [z, p, q]] = [[x, y, z], t, p].$$

Методы. В работе использовались методы математической физики, методы теории алгебраических система и методы комбинаторной и классической теории групп.

Заключение. Предложен способ построения n -симплексного уравнения для произвольного натурального n . Найдено общее решение таких уравнений. А также найдены все решения уравнения тетрадра на свободной группе. Запланированные на 2023 год результаты получены.

Полученные результаты опубликованы в работах [А.2, А.3, А.4]. Результаты прошли апробацию на следующих международных конференциях:

1. Colloquium of the Sino-Russian Mathematics Center JLU, Jilin University, Чанчунь, Китай, 25 июня 2023 г. – V. G. Bardakov «Yang-Baxter equation, Rota-Baxter operators and corresponding algebraic systems» (приглашенный доклад), <https://math.jlu.edu.cn/info/1686/15020.htm>

2. The 9th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics, Jilin University, Чанчунь, Китай, 15-19 августа 2023 г. – В. Г. Бардаков «Yang-Baxter equation, relative Rota-Baxter operators and skew braces (приглашенный доклад), <http://math.jlu.edu.cn/info/1556/14842.htm>

3. Conference «Advances in Homotopy Theory IV», Китай, 19-25 июня 2023, V. G. Bardakov, Simplicial structures on braid-like groups, (приглашенный доклад) <https://qzc.tsinghua.edu.cn/en/info/1122/2522.htm>

1.2 Математическое моделирование динамики крупных макромолекул

Авторским коллективом под руководством А.М. Бубенчикова в 2023 году разработан способ высокоточных расчетов динамики крупных молекул, имеющих каркасную структуру расположения атомов. Этот способ наряду с трансляционными движениями позволяет учитывать угловые перемещения крупных молекул, что открывает дополнительные возможности в анализе процессов, связанных с преобразованием энергии трансляционных и угловых движения, особенно в ситуациях взаимодействия с супермолекулярными конструкциями. На основе разработанного вычислительного приёма решен ряд задач динамики крупных молекул.

Первая из этих задач [А.14] относится к разработке и исследованию функциональных свойств нанокапсул. Расчёты фуллерена находящегося в наноконтейнере показали, что он всегда движется вдоль стенок рассматриваемой камеры не выходя из потенциальной ямы создаваемой поверхностью камеры.

Вторая задача посвящена рассмотрению неравновесного состояния фуллерена в двухкомпонентной смеси газов [А.26]. Здесь изучены свойства фуллеренов, а также их физические взаимодействия с окружающими их поверхностями. При решении задач динамики молекул остро стоит вопрос о глобализации полученного численного результата, поскольку важными являются свойства макроскопических объемов рассматриваемой совокупности частиц и их состояние на макроскопических интервалах времени. Одним из способов глобализации результата является выделение представительного объёма той или иной атомно-молекулярной среды. Другим способом глобализации является исследование стабильных состояний системы. Применение этих способов в задаче о взаимодействии мультикомпонентной смеси с графеновой поверхностью позволило установить сорбционные свойства этой поверхности по отношению к высокомолекулярным компонентам смеси. Было показано, что применительно даже к идеальным фуллеренам C_{60} , не является справедливым закон о равномерном распределении энергии между вращениями и трансляциями. При совершенно стандартных начальных условиях в отдельном представленном объеме зафиксировано образование спина фуллерена. Созданное математическое описание позволяет по найденному расчетному закону трансляционного движения фуллерена (по координатам его центра масс) полностью определить характер диффузии углеродной молекулы в мультикомпонентной смеси газов.

Следующая задача об инерционном вращении фуллерена сложной формы. Если такое вращение осуществляется вокруг собственной оси, имеющей промежуточное значение момента инерции, то ось мгновенного вращения не имеет устойчивого положения в пространстве. Такое движение известно как неустойчивость Луи Пуансо. Фазовый

портрет рассматриваемой неустойчивости определяется в данном случае выявленной связью индуцированных компонент вектора мгновенной угловой скорости, поскольку пространство с исключенным третьим направлением основного вращения является плоскостью Пуансо. На этой плоскости, изменяющийся со временем вектор мгновенной угловой скорости, вычерчивает герполодию, основную кривую неустойчивого движения молекулярного тела. Эта кривая является плоской спиралью на кольце с притягивающими предельными множествами в виде большой и малой окружности. Расчеты проведены по высокоточной схеме численного интегрирования, которая в случаях инерционных движений позволяет получать результат с погрешностью 10^{-15} безразмерных единиц. Этот результат достигается как по рассчитанной кинетической энергии молекулярного тела, так и по проекциям кинетического момента, которые в случае вращения по инерции должны оставаться постоянными во все время движения.

В работах [А.15, А.17] используется влияние постоянного и переменного во времени внешнего магнитного поля на характер угловых движений магнитовосприимчивого фуллерена. Собственный магнитный момент у фуллерена может появиться вместе с имплантированным в него атомом железа. Магнитное поле, действующее на такой фуллерен, будет генерировать только его угловые движения. Однако при этом не будет сохраняться ни его кинетическая энергия, ни кинетический момент. Для того, чтобы проверить точность вычислений необходимо иметь аналитически полученные первые интегралы уравнений движения. Для внешнего поля с заданным направлением воздействия такие интегралы удается получить. Они включают в себя интеграл энергии и два интеграла моментов движения фуллерена. Поле с заданным направлением воздействия генерирует лишь плоские движения магнитовосприимчивого молекулярного объекта. В этом случае события разворачиваются в плоскости векторов собственного магнитного момента фуллерена μ и вектора магнитной индукции внешнего поля \mathbf{B} . Удалось показать, что если фуллерен обладает собственным магнитным моментом и может реагировать на внешнее поле, то его кинетическая энергия будет изменяться по гармоническому закону относительно угла между указанными выше векторами. Высокоточный алгоритм был обобщён на случай воздействия внешних магнитных полей. Выполнены оценки по точности вычислений опираясь на полученные в этом случае первые интегралы уравнений движения.

Последняя задача об особенностях перехода, сопровождающегося изменением размерности пространства состояний системы. Переход плоского движения фуллеренов в их перемещения в сферическом слое имеет характер сложного движения, в частности, имеет все предпосылки для проявления хаоса. Однако, чтобы зафиксировать такое

состояние системы как развивающийся хаос необходимо рассматривать процесс на интервалах времени, превосходящих интервал развития нового состояния. В задачах динамики крупных молекул своя система единиц измерения базовых величин: нанометр, наносекунда, атомная единица массы. При этом характерные изменения в состоянии системы происходят на ещё меньших временах. Поэтому расчеты по явным схемам обычно проводятся с шагом $\Delta t = 10^{-6}$ нс. Это «микромир» и все значительные для него процессы протекают очень быстро. Однако если рассмотрение ведется на больших интервалах времени, то имеющиеся отрывочные сведения о нём не представляют собой всю последовательность событий, разрывающихся во времени. Поэтому процесс может восприниматься как стохастический из-за того, что потеряна возможность контролировать всю последовательность событий. Неконтролируемость и непредсказуемость часто связана с проявлением неустойчивости. С неустойчивостью было бы совсем всё хорошо, если бы наблюдалось разбегание траекторий. Однако в задаче о потере устойчивости плоского движения двух фуллеренов фиксируется компактная область нахождения траекторий. Этой областью является сферический слой, а сферы, составляющие этот слой, служат предельными множествами притяжения, т.е. являются аттракторами второй фазы движения фуллеренов. Теперь применим к рассматриваемому явлению формальные признаки устойчивости движения. Траектория в фазовом пространстве устойчива по Пуассону, если она является всюду плотной возле себя. Другими словами, если через конечное время траектория возвращается в наперед заданную достаточно малую окружность любой своей точки. Из-за компактности области занятой траекториями этот признак выполняется на любом интервале времени пока существует сферический слой. Таким образом, движение в этом слое является устойчивым по Пуассону. Теперь рассмотрим движение в сферическом слое с позиции А.М. Ляпунова. Если всякое решение, стартующее из достаточно малой окрестности начальных положений $U\delta$ не покидает произвольно заданной окрестности конечных положений $U\epsilon$, то решение является устойчивым по Ляпунову. Из-за отсутствия разбегания траекторий и отсутствия на них точек бифуркаций движение в сферическом слое оказывается устойчивым по Ляпунову. Расширение пространства области существования решения создают предпосылки развития хаоса. Хаотическое движение может возникнуть тогда, когда у траекторий появляется возможность выхода в дополнительное третье измерение. Странный аттрактор как сложное притягивающее множество в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающее возможность хаотического поведения системы, формируется также при наличии возможности выхода в третье измерение. Нельзя не отметить, что при образовании кинематической пары фуллеренов происходят качественные изменения в характере движения. Эти качественные

изменения связаны прежде всего с увеличением размерности области нахождения траекторий и имеют все предпосылки для развития хаоса. Однако хаоса трансляционных перемещений фуллеренов не возникает. Симметрия противостояния и предсказуемый режим движения фуллеренов наблюдается исходя из анализа перемещения центров масс. Что же касается угловых перемещений, то здесь хаос появляется с момента первого столкновения фуллеренов. Это становится возможным ввиду независимости уравнений, определяющих угловые и трансляционные перемещения.

Таким образом, все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Результаты опубликованы в работах [А.14, А.15, А.16, А.17, А.26].

1.3 Математическое моделирование некоторых задач экологии и медицины

1.3.1 Новая численная модель (математическая постановка и численный метод) двухфазного течения "вода-частицы льда" в приближении мелкой воды и ее применение для прогнозирования возникновения паводка

Введение. Поведение водного объекта оказывает существенное влияние на жизнь и деятельность человека. Ухудшение качества воды в реке в связи со сбросом сточных вод от промышленных предприятий и крупных городов, затопление прибрежных территорий во время локальных весенних паводков, деформации русла реки, угрожающие постройкам, значительно влияют на жизнь города. Математические модели, сочетающие детальность описания течения с приемлемой для решения практических задач вычислительной сложностью, очень востребованы при изучении процессов, происходящих в окружающей среде.

Методы. Рассматривается двухфазное изотермическое движение смеси «вода – ледяные частицы» в открытом канале или русле реки. Предполагается, что ледяные частицы плотно расположены в приповерхностном слое воды и их концентрация остается постоянной на входе в канал (или рассматриваемый участок реки). Плотность льда меньше плотности воды. Горизонтальные размеры области исследования много больше глубины двухфазного потока. Учитывается взаимодействие (столкновения) частиц между собой. Предполагается что размер ледяных частиц много меньше характерных размеров канала (русла). Для описания рассматриваемого процесса используются уравнения теории взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов [29], в соответствии с которой ледяные частицы, плотно расположенные у поверхности воды, представляются сплошной средой с эффективными свойствами. После проведения осреднения по вертикальной

координате и использования условия гидростатики из уравнения для вертикальной компоненты скорости получаются следующие уравнения [30]:

- неразрывности:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial(h_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(h_i v_i)}{\partial y} = 0, i = water, ice ; \quad (1)$$

- движения ($i=water, ice$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(h_i u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h_i u_i v_i)}{\partial y} &= -g\beta_i h_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x} + \gamma_i \frac{\partial(h_i \tau_{xx}^i)}{\partial x} + \gamma_i \frac{\partial(h_i \tau_{xy}^i)}{\partial y} + \gamma_i [(\tau_{xz}^i)_s - (\tau_{xz}^i)_b] - (F_x)_i, \\ \frac{\partial(h_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(h_i u_i v_i)}{\partial x} + \frac{\partial(h_i v_i^2)}{\partial y} &= -g\beta_i h_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial(h_i \tau_{yx}^i)}{\partial x} + \gamma_i \frac{\partial(h_i \tau_{yy}^i)}{\partial y} + \frac{(\tau_{yz}^i)_s - (\tau_{yz}^i)_b}{\rho} - (F_y)_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $h(t,x,y) = h_{water}(t,x,y) + h_{ice}(t,x,y)$ – глубина; $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ – осредненные по глубине значения компонент вектора скорости фаз; $z_b(x,y)$ – рельеф дна; $\gamma_i = 1/\rho_i$ – величина, обратная плотности воды или льда, g – ускорение свободного падения; τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yy} , – осредненные по глубине компоненты тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса; $(\tau_{xz})_s$, $(\tau_{xz})_b$, $(\tau_{yz})_s$, $(\tau_{yz})_b$ – трение на поверхности воды и на дне, соответственно.

Трение воды о дно определяется как:

$$(\tau_{xz})_b = \rho_{water} c_f u_{water} |\vec{w}_{water}|, (\tau_{yz})_b = \rho_{water} c_f v_{water} |\vec{w}_{water}|,$$

где c_f – коэффициент трения, зависящий от физических характеристик русла или канала: $c_f = gn^2/h^{0,33}$ определяется из закона трения Маннинга, где n – коэффициент Маннинга, характеризующий шероховатость русла. Также учитывается трение фазы частиц о берег и дно в случае выхода льдин на берег.

Для расчета турбулентных характеристик двухфазного течения применяется модель турбулентности для осредненных по глубине уравнений с модификацией, учитывающей влияние дисперсных частиц [31].

Для численного решения этой системы уравнений используются равномерные разнесенные структурированные сетки, метод конечного объема, полунявные монотонные разностные схемы второго порядка, сохраняющие массу и импульс [32, А.21]. Для учета сложной береговой линии и возможного разлива речного потока ячейки делятся на «мокрые» и «сухие». Для проведения сквозных расчетов по двухфазной модели на участках речного потока, где отсутствуют частицы, разработан специальный алгоритм частичного исключения. Все вычислительные технологии прошли тестирование на аналитических решениях и экспериментальных данных [А.21].

Результаты и обсуждения. Рассматриваемая вычислительная модель была применена для исследования течений «вода-ледяные частицы» и паводковых ситуаций на

участке реки Томь (Западная Сибирь) [А.21], который характеризуется разветвленным руслом (рисунок 6). “Заторы часто возникают на разветвлениях русел, где энергия потока ослабевает настолько, что ее недостаточно для разрушения ледового покрова. В разветвленном русле при возникновении затора в одной из протоков подпор и возросшие уровни воды могут быть сброшены по другой протоке, и затопления территории выше затора не происходит. Такая ситуация регулярно возникает на участке разветвления р. Томи на три протоки: основное русло, Светлая и Калтайская в районе сел Вершинино и Батурино. Эти протоки, в свою очередь, соединяются между собой более мелкими протоками” [33].

Целью исследования был анализ влияния уровня воды во входном сечении на разлив воды в рассматриваемом участке русла. Расчеты проводились на равномерной сетке 200x157. Размер ячейки сетки 90x50м. Коэффициент Маннинга выбирался равным 0,02. Уровень воды на входе в рассматриваемую область составлял 77м над уровнем моря. Скорость потока на входе 1 м/с. Расход воды при таких условиях составлял 3600 м³/с (рисунок 7). Также был проведен расчет с расходом 5800 м³/с [33]. Высота речного потока на входе в расчетную область при таком расходе составила 79.1 м над уровнем моря (рисунок 8). Скорость речного потока на входе выбиралась 1 м/с.

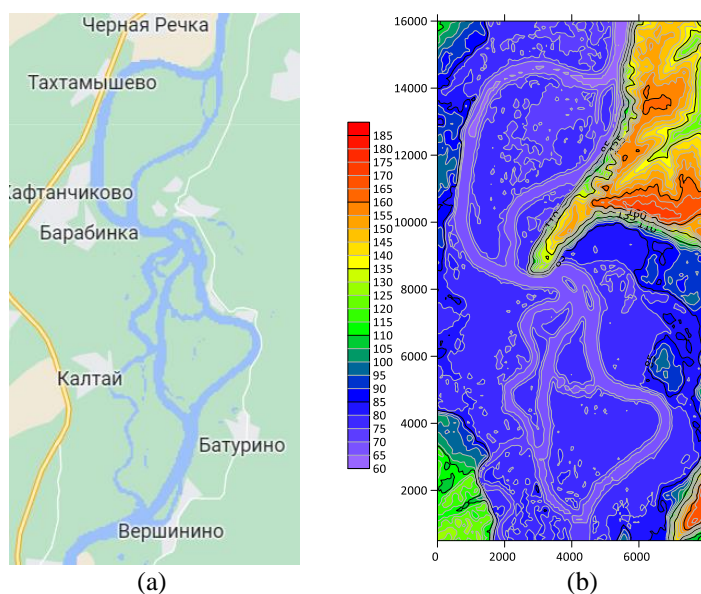


Рисунок 6 – Область исследования. Размеры в метрах. Рисунки ориентированы на север. Справа рельеф местности с указанием русла реки. Географическая широта области: 56,5 градусов северной широты

На рисунке 7 представлены цветные картины глубины речного потока h_{water} , м и модуля скорости $W = \sqrt{u^2 + v^2}$, м/с для исследуемой области при расходе течения 3600 м³/с

[33]. Из рисунка видно, что глубина речного потока зависит от рельефа дна. Максимальные значения она принимает перед соединением (конвергенцией) двух проток (слева направо – Калтайской и Светлой) и основного потока (центр рисунка 7а), а также ниже этого участка в русле основного потока. Минимальные значения глубины потока наблюдаются в расчетах во вторичных протоках и на выходе из рассматриваемой области. Но если во вторичных протоках скорость потока также имеет небольшие значения, то на выходе из рассматриваемой области ее значения повышаются до 4-5 м/с. Также локальное повышение скорости течения расчетами прогнозируется после конвергенции проток и основного русла в центре области и в основном русле ниже по течению. Там, где глубина речного потока уменьшается. Анализируя расчетную картину распределения модуля скорости течения, можно предполагать, что образование заторов льда при ледоходе будет наблюдаться в сужениях и разветвлениях (излучинах) реки, на ее отмелях.

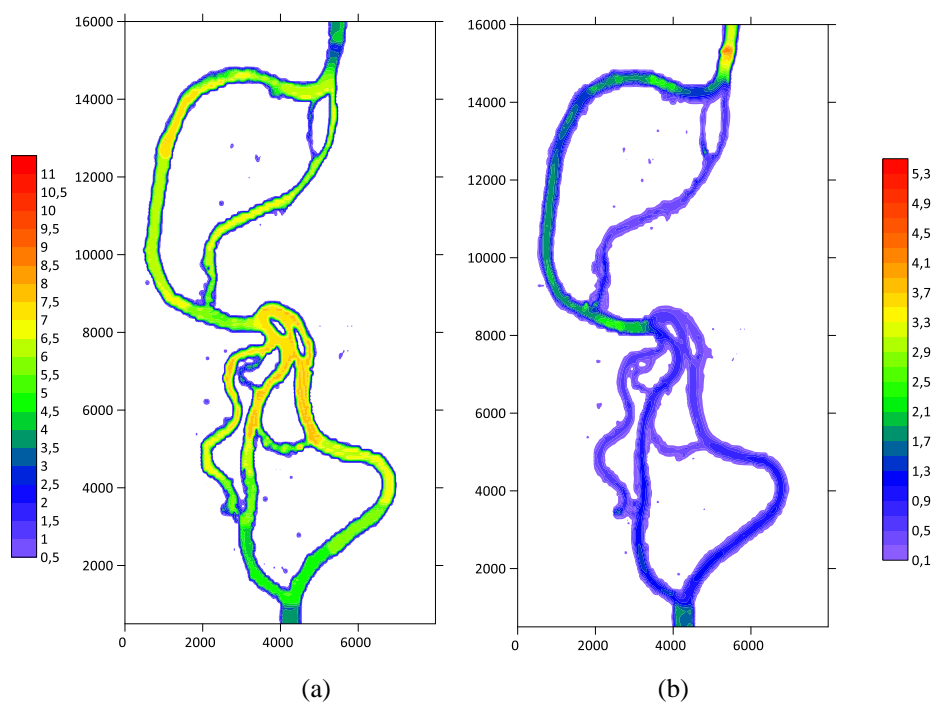


Рисунок 7 – Высота h_{water} (а) и модуль скорости W (б) речного потока при расходе $3600 \text{ м}^3/\text{с}$ для исследуемой области течения для установившегося состояния в случае расхода $3600 \text{ м}^3/\text{с}$

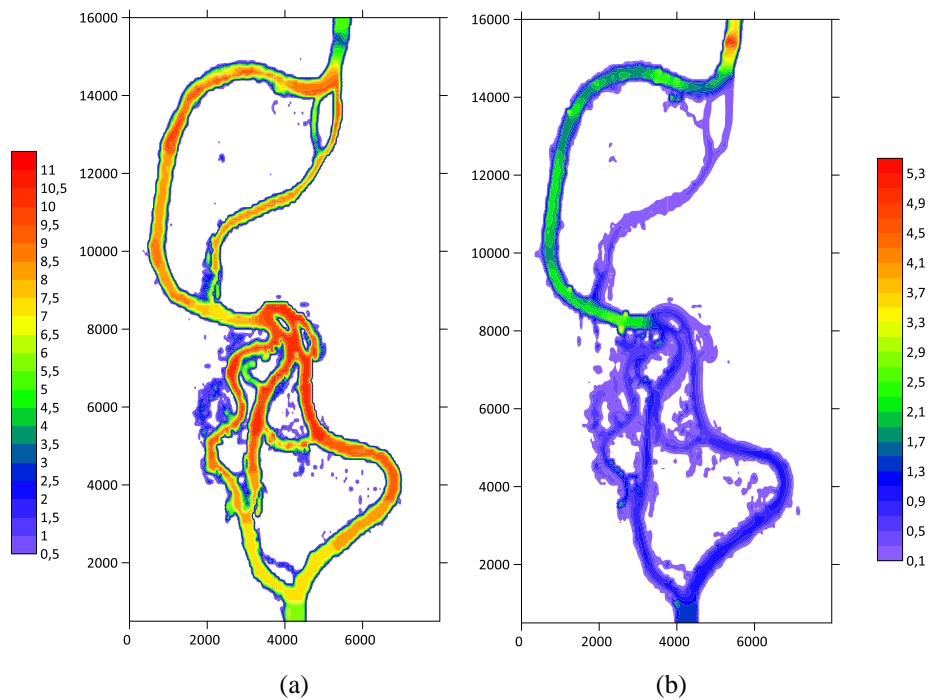


Рисунок 8 – Высота h_{water} , м (а) и модуль скорости W , м/с (б) речного потока при расходе $5800 \text{ м}^3/\text{с}$ для исследуемой области

Из рисунка 8 видно, что за счет повышения глубины речного потока на вход в рассматриваемую область, уровень воды в реке также поднялся повсеместно по всему руслу. Максимальная глубина наблюдается на тех же участках, что и на рисунке 7. Минимальная – в русле реки после разветвления основного потока (Батурино) и после конвергенции основного потока и двух проток. Заметим, что скорость потока вблизи населенного пункта Батурино скорость потока после первого разветвления основного потока изменилась мало. Из рисунка 8 также видно, что повышение уровня воды во входном сечении привело к разливу реки вблизи проток Светлой и, особенно, Калтайской, а также в начале протоки после точки конвергенции.

Заключение. Построена новая математическая модель двухфазного изотермического турбулентного течения смеси «жидкость – легкие частицы» в рамках механики взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов.

Для численного решения предложен новый численный метод, позволяющий проводить сквозные расчеты в областях с неоднородным распределением частиц вплоть до их полного отсутствия. Проведены расчеты нестационарного течения в р. Томь во время весеннего паводка.

1.3.2 Эффективный численный метод решения обратных задач электроимпедансной томографии на неструктурированных сетках в условиях их плохой обусловленности линейных систем

Введение. Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволяет восстановить внутреннюю структуру объектов живой природы, используя электрические измерения только на границе объекта [34]. Существует два типа задач ЭИТ [35]: прямая и обратная. Цель прямой задачи – найти значения электрических потенциалов на поверхности объекта при заданном распределении удельной проводимости σ и подаваемого тока I . Цель обратной задачи – восстановить неизвестное распределение проводимости σ при заданном токе и значениях потенциалов на поверхности объекта.

Методы. Обратная задача ЭИТ рассматривается в полной электродной модели, особенностью которой является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов.

При решении обратной задачи ЭИТ требуется при известных наборах пропускания электрического тока через электроды (при, так называемых, токовых конфигурациях) и измерениях напряжения на электродах получить распределение электрической проводимости $\sigma(x,y)$ внутри области D [35]. Таким образом, постановка обратной задачи ЭИТ предполагает, что известны значения напряжения на электродах $\{\tilde{U}_l^\mu\}, l=1, \dots, L; \mu=1, \dots, M$ при M рассмотренных токовых конфигурациях $\{I_l^\mu\}, l=1, \dots, L; \mu=1, \dots, M$. Искомое распределение электрической проводимости $\sigma^*(x,y)$ внутри области D должно удовлетворять минимуму функции:

$$\Phi(\sigma^*) = \arg \min_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M \left(\vec{r}^\mu(\sigma), \vec{r}^\mu(\sigma) \right) \right), \quad \vec{r}^\mu(\sigma) = \vec{U}^\mu(\sigma) - \vec{\tilde{U}}^\mu, \quad \mu=1, \dots, M. \quad (3)$$

В (1) $\vec{U}^\mu(\sigma)$ - полученные значения напряжения на электродах в результате решения μ -й прямой задачи ЭИТ при некотором распределении $\sigma(x,y)$ и известной токовой конфигурации $\vec{I}^\mu = (I_1^\mu, I_2^\mu, \dots, I_L^\mu)^T$.

Для решения обратной задачи использовался итерационный метод – Левенберга-Марквардта [36, 37]. Была построена итерационная процедура последовательной минимизации целевой функции (3) по методу Левенберга-Марквардта:

$$\sigma_h^{(k+1)} = \sigma_h^{(k)} - \left(H(\sigma_h^{(k)}) + \lambda_k E \right)^{-1} \nabla \Phi(\sigma_h^{(k)}). \quad (4)$$

В итоге итерационный алгоритм решения обратной задачи ЭИТ будет состоять из следующих этапов:

0) Задание начального распределения электрической проводимости $\sigma_h^{(0)}$, $\lambda_0 = 1$, $k=0$, расчет матрицы P ,

1) Построение основной матрицы системы линейных уравнений разностной схемы $A_h(\sigma_h^{(k)})$ для прямой задачи ЭИТ,

2) нахождение обратной матрицы к $A_h(\sigma_h^{(k)})$,

3) аналитическое вычисление производных от основной матрицы $\frac{\partial A_h(\sigma_h)}{\partial \sigma_j}$,

4) численное решение набора прямых задач ЭИТ для различных токовых конфигураций активных электродов: $u_h^\mu(\sigma_h^{(k)}) = [A_h(\sigma_h^{(k)})]^{-1} \bar{b}_h(\bar{I}^\mu)$, $\mu = 1, \dots, M$,

5) вычисление напряжений на электродах и производных,

6) вычисление матрицы Якоби $\nabla \Phi(\sigma_h^{(k)})$ и гессиана H ,

7) проверка существования успешной факторизации Холецкого для матрицы $H + \lambda_k E$ и подбор параметра λ_{k+1} для следующей итерации,

8) уточнение электрической проводимости $\sigma_h^{(k+1)}$ с помощью метода Левенберга – Марквардта (4).

Если условия завершения глобального итерационного процесса не выполнены, то $k=k+1$ и перейти на п.1.

Результаты и обсуждения. Рассмотрим применение разработанного итерационного алгоритма решения обратной задачи ЭИТ на следующем простом примере. Пусть исследуемый объект, для которого нужно найти значения электрической проводимости, имеет форму круга и к нему на границе прикреплены восемь электродов, значения сопротивления которых известны: $z_l=1$, $l=1, \dots, L$. Внутри области исследования размещены две круговые вставки, расположения которых и значения электрической проводимости которых внутри области неизвестны. Середины электродов шириной 0,5 расположены при $\varphi = \{\pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 3\pi/2; 7\pi/4; 2\pi\}$.

Для получения «измеренных» значений напряжений на электродах рассматривалось $M=28$ независимых вариантов парного подключения электродов (один – токоподающий, второй – токопринимающий). Решения прямых задач ЭИТ проводились при следующих значениях электрической проводимости: $\sigma_1 = 0,5$; $\sigma_2 = 0,75$; $\sigma_3 = 1,0$. Центр первой вставки – $(-0,5; 0,1)$, а второй – $(0,2; 0,4)$, также они имеют разные радиусы $\rho_1 = 0,3$ и $\rho_2 = 0,2$, соответственно.

На рисунке 9 представлены результаты полученной реконструкции внутреннего распределения электрической проводимости для рассматриваемых условий в случае, если положение неоднородностей неизвестно. Минимум целевой функции (3) менее 10^{-5} был достигнут за 25 итераций.

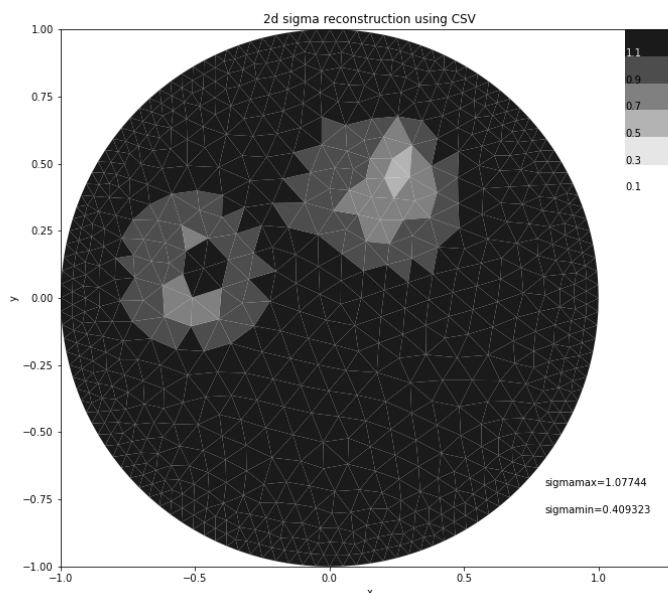


Рисунок 9 – Результаты 2D реконструкции электрической проводимости

Заключение. Для восстановления распределения электрической проводимости внутри исследуемого объекта разработан итерационный метод решения обратной задачи ЭИТ, который опирается:

- на получение обратной матрицы для основной матрицы системы линейных уравнений разностной схемы,
- аналитическое нахождение производной от основной матрицы
- алгоритм Левенберга-Марквардта с адаптивным изменением коэффициента скорости сходимости.

Итерационный метод реализован численно для двумерного случая и протестирован с помощью синтетических измерений на модели круга с 8 электродами и двумя неконцентрическими круговыми вставками, имеющими отличающуюся электрическую проводимость. Таким образом, все запланированные на 2023 год результаты достигнуты. Часть полученных результатов уже опубликована, другая часть готовится к публикации.

Все результаты прошли апробацию на семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета и на следующих конференциях:

1. XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия, 25-28 апреля 2023 г. –

А.А. Афанасьева «Исследование влияния распределения электрической проводимости внутри объекта на электродные напряжения при различных токовых конфигурациях» (секционный доклад), <https://conf-prfn.org>

2. Всероссийская молодежная научная конференция студентов «все грани математики и механики», Томск, Россия, 15-18 мая 2023 г. – А.А. Афанасьева и А.В. Старченко «Численное решение прямой задачи с использованием реальных данных» (секционный доклад), <https://conf.math.tsu.ru>

3. Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, Томск, Россия, 2-5 октября 2023 г. – А.А. Афанасьева и А.В. Старченко «Численное решение обратной задачи ЭИТ с использованием алгоритма Левенберга–Марквардта», <https://conference.math.tsu.ru>

4. XV международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Новосибирск, Академгородок, 30 октября – 6 ноября 2023 г. – А.А. Афанасьева, А.В. Старченко «Численное решение обратной задачи электроимпедансной томографии с использованием итерационного метода», <http://conf.nsc.ru/tcmiip2023/ru/topics>

1.3.3 Исследование закономерностей аэротермических процессов в уличных каньонах, оценка влияния свойств набегающего потока и солнечной радиации на динамику атмосферной циркуляции и концентрацию вредных выбросов в уличном каньоне

Введение. Микромасштабное (с разрешением несколько метров) моделирование атмосферного пограничного слоя в городской застройке в настоящее время представляет собой одно из важнейших современных направлений вычислительной механики и имеет большое научное значение. В качестве важных параметров, влияющих на структуру течения и механизм распространя примеси в уличных каньонах, можно выделить метеоусловия (скорость и направления ветра, влияние солнечного излучения), геометрические характеристики (соотношение сторон уличного каньона, форма крыши), расположение акустических экранов, «живых» и бетонных изгородей и других ограждений. Однако далеко не все аспекты задачи о переносе выбросов автотранспорта в уличных каньонах хорошо изучены. Для этого нужны хорошо апробированные численные микромасштабные модели.

Методы. Рассматривается стационарное неизотермическое трехмерное турбулентное движение воздуха в уличном каньоне, который представляет собой

протяженный участок улицы с параллельно расположенными высокими зданиями с обеих ее сторон. По дороге между зданиями интенсивно движется автотранспорт, выбрасывающий в атмосферу продукты сгорания углеводородного топлива. Высота зданий соизмерима с шириной улицы. Примесь считается химически инертной и не осаждается на образующих уличного каньона. Стены и дно уличного каньона могут иметь температуру, отличную от температуры окружающей среды. Это возможно в результате антропогенной деятельности или солнечного нагрева.

Математическая модель рассматриваемого физического процесса включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, Навье-Стокса, теплообмена и переноса примеси [А.23, А.27, 38]. Влияние силы плавучести на движение воздуха в уличном каньоне моделируется с помощью приближения Обербека-Буссинеска. Замыкание системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска и двухпараметрической «к-ε» модели [39], учитывающей влияние плавучести на характеристики турбулентности. Для описания переноса теплового излучения внутри каньона применялось Р-1 приближение метода сферических гармоник, которое в настоящее время широко используется при моделировании рассматриваемых процессов [40]. Кроме того, учитывается процесс переноса тепла в стенах зданий. Внизу уличного каньона ближе к середине располагаются линейные источники выбросов автотранспорта, расположенные на небольшой высоте над поверхностью и ориентированы параллельно уличным зданиям. Исследуются значения концентрации примеси на уровне пешеходов и вдоль вертикальных поверхностей.

Задача решается численно методом конечного объема, алгоритм SIMPLE привлекается для согласования полей скорости и давления [38]. Разработан эффективный алгоритм вычисления температуры поверхностей в уличном каньоне.

Апробация разрабатываемой микромасштабной математической модели неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличных каньонах выполнена на стационарных трехмерных турбулентных течениях в ветровом туннеле с нагреваемой выемкой и в канале-каверне с подачей примеси, для которых имеются результаты измерений.

Результаты и обсуждения. Разрабатываемая микромасштабная математическая модель была применена для исследования неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне с частично нагретой стенкой здания с наветренной стороны. В численном эксперименте моделируется влияние нагрева стен здания от солнечного излучения при различной высоте светила над горизонтом. Предполагается, что уличный каньон (ось Ox_2) ориентирован на

север, соответственно, ось Ox_1 - с запада на восток. При таком выборе системы координат в зависимости от высоты Солнца при его заходе будет освещаться только часть наветренной стороны, размеры которой будут уменьшаться при снижении высоты Солнца над горизонтом. Такие условия моделирования были выбраны в связи с тем, что при нагреве наветренной стороны в каньоне может образовываться двухвихревая структура течения, приводящая к накоплению примеси у нижней границы каньона [А.23, А.27, 38]. Для выявления неблагоприятных условий проветривания каньона была проведена серия параметрических расчетов, в которых варьируемым параметром выступала доля высоты наветренной стены с повышенной температурой.

Геометрические размеры каньона заданы следующим образом: высота H и ширина $W = 20$ м, глубина $L = 30$ м. В расчетах использовалась сетка $110 \times 62 \times 100$. Скорость набегающего потока $U_{in} = 1,0$ м/с. Температура окружающей среды принята равной 23 градусам, разница температур между нагретой стеной и окружающей средой 20 °С. Кинематическая вязкость воздуха ν принята равной $1,5 \times 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Линейный источник примеси размещен в центре нижней поверхности каньона.

Рассмотрены следующие варианты: температура стены совпадает с температурой окружающей среды (0-4), нагрета верхняя четверть стены (1-4), нагрета половина стены (2-4), нагреты три четверти стены (3-4), нагрета вся стена целиком (4-4). Результаты расчетов показали, что нагрев наветренной образующей уличного каньона приводит к изменению структуры течения и характера распространения примеси внутри каньона. Нагрев верхней четверти приводит к замедлению интенсивности вращательного движения, как результат значение максимальной концентрации возрастает практически вдвое, также увеличивается средняя концентрация в зоне дыхания. Нагрев половины наветренной стенки уличного каньона приводит к изменению структуры течения: в нижнем углу у наветренной стороны формируется небольшой вихрь. Примесь затягивается в сформировавшийся вихрь и циркулирует в нем. Это приводит к значительному увеличению максимальной концентрации примеси в каньоне. Средняя концентрация в зоне дыхания также увеличивается (таблица 1).

Таблица 1 – Максимальная, минимальная и средняя концентрации $C^* = cU_{in}HL/Q$ в каньоне и зоне дыхания

Обозначение	Максимальная концентрация в каньоне	Минимальная концентрация в каньоне	Средняя концентрация в каньоне	Средняя концентрация в зоне дыхания
0-4	371,525	6,656	17,140	27,395
1-4	662,072	5,510	24,448	37,741

2-4	2485,178	5,403	22,143	41,172
3-4	1312,013	2,997	23,518	45,771
4-4	1228,755	2,025	19,671	37,485

Дальнейшее увеличение зоны нагрева наветренной стенки каньона до соотношения 3/4 приводит к более существенному изменению структуры течения. Восходящий поток теплого воздуха у нагретой образующей каньона конкурирует с основным направлением движения воздуха в каньоне. Это приводит к поджатию основного вихря и образованию вторичного вихря в зоне между основным вихрем и наветренной стеной здания: для такого варианта расчеты показывают изменение механизма проветривания каньона, примесь выносится вторичным вихрем. Как результат возрастает полученное расчетным путем значение максимальной концентрации примеси по сравнению с вариантами 0-4 и 1-4. В случае нагрева всей стены структура течения принципиально не меняется, но увеличивается интенсивность движения во вторичном вихре, что приводит к снижению максимальных и средних концентраций примеси.

Во всех случаях при увеличении доли нагретой части стены уменьшаются минимальные значения концентрации примеси, что в сочетании с увеличением максимальных и средних значений концентрации, по-видимому, косвенно свидетельствует об ухудшении перемешивания воздушных масс в каньоне.

Для оценки влияния свойств набегающего потока на концентрацию вредных выбросов в уличном каньоне проведена серия расчетов. В качестве изменяемого параметра использовалась скорость воздушного потока над зданиями. Геометрические размеры каньона, используемая сетка и расположение линейного источника примеси были выбраны как в описанном выше численном эксперименте. Скорость набегающего потока составляла 1.0, 2.5, 5.0 или 10.0 м/с. Температура окружающей среды и образующих уличного каньона составляла 20 градусов. На основе численных экспериментов получено, что увеличение скорости основного потока способствует более интенсивному выносу примеси из уличного каньона и уменьшению максимальных и средних значений концентрации вредных выбросов в каньоне.

Заключение. В развиваемую микромасштабную модель аэродинамики и распространения примеси в уличных каньонах M2UE добавлен блок учета переноса излучения от нагретых солнцем стен. Результаты расчетов показали, частичное или полное нагревание стен за счет солнечного излучения оказывает существенное влияние на картину движения воздуха, распространение примеси и значения температуры в уличном каньоне при слабом ветре. Получено, что наиболее высокие концентрации примеси образуются у

наветренной стороны каньона при полном ее нагреве в дневное время, у подветренной стороны – при отсутствии солнечного нагрева или частичном (50%) нагреве от заходящего солнца. В зоне дыхания пешеходов повышенные концентрации примеси могут образовываться как ближе к подветренной стороне (при отсутствии нагрева и при 50% нагреве), так и ближе к наветренной стороне при 100% нагреве стены. Увеличение скорости основного потока способствует более интенсивному выносу примеси из уличного каньона.

Таким образом, все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Результаты опубликованы в статьях [А.20, А.21, А.22, А.23, А.24, А.27, А.28].

1.4 Изучение автоморфизмов абелевых групп

Введение. Как отмечал еще Фукс в своей знаменитой монографии [41], при работе с инволюциями возникают определенные сложности: «эти автоморфизмы не обеспечивают нас информацией в том же объеме, что и проекции; к тому же во избежание излишних трудностей... необходимо предположить, что умножение на 2 есть автоморфизм группы». И действительно, многие теоремы в работах Вильданова [17, 42, 43], посвященных определяемости вполне разложимых групп (без кручения) их группами автоморфизмов, доказаны в предположении, что вполне разложимая группа 2-делима. Здесь можно провести некоторые параллели с задачей об определяемости абелевой p -группы ее группой автоморфизмов: для $p > 3$ она была решена Лептином в 1960 году [44], для $p = 3$ – Либертом в 1980-х годах [45], а случай $p = 2$, как отмечается в последнем издании монографии Фукса [46], до сих пор остается открытой проблемой. Таким образом, для решения поставленных в рамках данного проекта задач нужны новые подходы, которые позволят избавиться от требования 2-делимости при рассмотрении определяемости вполне разложимой группы ее группой автоморфизмов. Случай вполне разложимых групп ранга 2 и 3 (уже без требования 2-делимости) был полностью разобран ранее в работах Е. А. Тимошенко [47] и [19] соответственно. Результаты и методы этих работ требуют обобщения, позволяющего решить рассматриваемый вопрос для случая произвольного конечного ранга.

Методы. Для решения вопроса об определяемости вполне разложимой группы (без кручения) B ее группой автоморфизмов $\text{Aut } B$ использовались предложенные Вильдановым подходы [17, 43], позволяющие диагонализировать инволюции группы $\text{Aut } B$ при помощи подходящего внутреннего автоморфизма. Эти методы, в свою очередь, были усовершенствованы таким образом, чтобы они оказались применимы к ситуации, когда группа B не является 2-делимой. При этом важную роль сыграли подходы, разработанные ранее в [19] при рассмотрении вполне разложимых групп ранга 3.

Результаты и обсуждения. Нас интересует вопрос о том, при каких условиях коммутирующие инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой группы (без кручения) конечного ранга могут быть переведены подходящим автоморфизмом в диагональные инволюции.

Определение 4.1. Вполне разложимой группой ранга k называется всякая группа B , представляющая собой прямую сумму k групп ранга 1.

Определение 4.2. Пусть $B \in W$, где W – некоторый класс групп. Мы будем говорить, что B определяется своей группой автоморфизмов $\text{Aut } B$ в классе W , если из $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$, где $B' \in W$, всегда следует $B \cong B'$.

Нас интересует случай, когда W – класс всех вполне разложимых групп (без кручения) конечного ранга. Поскольку всякая группа ранга 1 изоморфна некоторой рациональной группе (т.е. отличной от 0 подгруппе аддитивной группы поля \mathbb{Q} рациональных чисел), для удобства можно сразу рассматривать группы из класса W как прямые суммы рациональных групп. Для группы Y ранга 1 через $t(Y)$ обозначаем тип этой группы.

Группу $B \in W$ можно записать в виде $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_s$, где каждое прямое слагаемое B_i представляет собой прямую сумму n_i копий одной и той же рациональной группы Y_i , причем группы Y_1, Y_2, \dots, Y_s попарно неизоморфны (известно, что любые два таких разложения группы B изоморфны). Для индексов i, j введем обозначение $\Gamma_{ji} = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha Y_j \subset Y_i\}$. Учитывая частичный порядок, который задан на множестве всех типов, можно пронумеровать однородные компоненты B_i так, что для любого i тип $t(Y_i)$ будет одним из максимальных элементов множества $\{t(Y_i), t(Y_{i+1}), \dots, t(Y_s)\}$. Тогда при $i < j$ имеем $\Gamma_{ij} = 0$, а кольцо эндоморфизмов $E(B)$ группы B изоморфно кольцу блочно-верхнетреугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \end{pmatrix} \quad (5)$$

таких, что каждый блок A_{ij} принадлежит множеству $\Delta_{ij} = M(n_i, n_j, \Gamma_{ji})$, состоящему из всех матриц размера $n_i \times n_j$ с элементами из Γ_{ji} . Поэтому мы отождествляем кольцо $E(B)$ с указанным матричным кольцом, считая, что $\text{Aut } B$ есть группа матриц, обратимых в этом кольце. Матрица $A \in E(B)$ вида (5) лежит в $\text{Aut } B$ тогда и только тогда, когда каждый блок A_{ii} принадлежит полной линейной группе $GL(n_i, \Gamma_{ii})$ над кольцом Γ_{ii} (иначе говоря, определитель каждого блока A_{ii} должен быть обратимым элементом в Γ_{ii}).

Используются следующие обозначения:

– через $\underline{\text{Aut}} B$ обозначим группу всех матриц $A \in \text{Aut } B$ вида (5), для которых $A_{ij} = 0$ при $i < j$;

– через Σ обозначим группу матриц вида (5), для которых $A_{ij} \in M(n_i, n_j, \mathbb{Q})$ при $i < j$, а каждый блок A_{ii} равен единичной матрице E (далее размер матрицы, обозначаемой символом E , в каждом конкретном случае ясен из контекста);

– через π_{ij} , где $i \leq j$, обозначим отображение, которое сопоставляет матрице A вида (5) значение ее блока A_{ij} ;

– через π мы обозначим эндоморфизм группы $\text{Aut } B$, сопоставляющий всякой матрице A вида (5) матрицу $\pi(A) \in \underline{\text{Aut}} B$ такую, что $\pi_{ii}(\pi(A)) = A_{ii}$ при всех i .

Через φ_X , где X – элемент какой-либо группы, будем обозначать внутренний автоморфизм этой группы, переводящий всякий ее элемент A в элемент $X^{-1}AX$. Пусть инволюции $D_1, D_2, \dots, D_s \in \underline{\text{Aut}} B$ таковы, что $\pi_{ii}(D_k) = -E$, если $i \leq k$, и $\pi_{ii}(D_k) = E$, если $i > k$. В доказательстве следующей теоремы важную роль играют свойства множества $\Lambda(A) = \{T^{-1}ATA \mid T \in \text{Aut } B\}$, где A – инволюция.

Теорема 4.1. Пусть $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$ – попарно коммутирующие инволюции, для которых $\pi(J_k) = D_k$ и множество $\Lambda(J_k)$ замкнуто относительно умножения при всех k . Тогда существуют матрица $X \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ и система матриц $C_{ij} \in \Delta_{ij}$, где $i < j$, такие, что:

(i) для автоморфизма $\psi = \varphi_X$ и любых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ выполнено

$$\pi_{ij}(\psi(J_k)) = \begin{cases} E, & \text{если } i = j > k, \\ -E, & \text{если } i = j \leq k, \\ C_{ij}, & \text{если } i \leq k < j, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

(ii) если $C_{ij} \in 2\Delta_{ij}$, то $C_{ij} = 0$;

(iii) если $C_{ij} \neq 0$, то $n_i = n_j = 1$;

(iv) если $i < k < j$, то $C_{ik} = 0$ или $C_{kj} = 0$.

С помощью этой теоремы доказывается

Теорема 4.2. Если инволюции $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$ удовлетворяют требованиям, перечисленным в условии теоремы 4.1, то существует матрица $T \in \Sigma$, для которой $\varphi_T(J_k) = D_k$ при всех k и $\underline{\text{Aut}} B \subset \varphi_T(\text{Aut } B)$.

Кроме того, построен пример, показывающий, что если группа B не является 2-делимой, то изоморфизм φ_T из теоремы 4.1, вообще говоря, переводит $\text{Aut } B$ в какую-то группу, отличную от $\text{Aut } B$.

З а к л ю ч е н и е. Таким образом, показано, что всякое множество попарно перестановочных инволюций группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством диагональных инволюций. Тем самым получены результаты, запланированные на 2023 год. Они опубликованы в статьях, рецензируемых Web of Science и Scopus. Все результаты прошли апробацию на семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета, а также на Всероссийской молодежной научной конференции студентов «Все грани математики и механики», Томский государственный университет, Томск (15–18 мая 2023 г.) – И.В. Третьяков и Е.А. Тимошенко «Об определяемости вполне разложимой группы своей группой автоморфизмов» (секционный доклад) <http://conf.math.tsu.ru>.

1.5 Обобщенные группы Басса

В в е д е н и е. В 1990 г. Басс [20] поставил вопрос о возможности вложении математического объекта в собственный гомоморфный образ. В [21] рассмотрен этот тип проблемы в контексте абелевых групп: абелева группа G названа бассовой, если существование инъективного гомоморфизма $f: G \rightarrow G/N$ для некоторой подгруппы $N \leq G$ влечет $N = 0$, в данной работе получено полное описание бассовых абелевых групп. В [22] изучались обобщенные группы Басса. В 2023 г. та же группа исследователей перешла к исследованию конечно (ко-) Бассовых, вполне обобщенных (ко-) Бассовых и абсолютно обобщенных (ко-) Бассовых групп. По результатам исследования отправлены в редакции журналов 2 статьи. Начато исследование относительно хопфовых абелевых групп. В 2024 году планируется продолжить исследование этих групп.

В соавторстве с П.В. Данчевым доказано, что всякая равномерно вполне инертная подгруппа данной группы соизмерима с вполне инвариантной ее подгруппой, это решение известного вопроса о таких подгруппах. Также в соавторстве с П.В. Данчевым получен ряд свойств характеристически инертных подгрупп абелевых групп, по этим результатам отправлены в редакции журналов 2 статьи.

Получено описание всех делимых, примарных, а также сепарабельных и алгебраически компактных групп без кручения, лиево кольцо эндоморфизмов которых разрешимо, статья отправлена в редакцию журнала.

М е т о д ы. Для исследования обобщений групп Басса были использованы общие методы теории абелевых групп; а также методы и приемы, разработанные при исследовании групп Басса в [21, 22]. Методы, примененные при изучении цоколей вполне

инвариантных и характеристических подгрупп из [48], были доработаны для исследования сильно вполне инертных цокольно-регулярных групп.

Результаты и обсуждения.

Получен ряд результатов для различных обобщений групп Басса. Приведем два из них.

Теорема 5.1. Для группы G эквивалентны следующие условия:

(а) G является конечно ко-Бассовой группой;

(б) G является полу ко-Бассовой группой;

(с) ранг без кручения группы G конечный, и каждая p -компонента группы G имеет конечный p -ранг.

Теорема 5.2. Группа G является абсолютно обобщенно ко-Бассовой тогда и только тогда, когда G делима или факторгруппа G/T является делимой конечного ранга и каждая p -компонента группы G имеет обобщенный конечный ранг.

Определение 5.1. p -Группа G называется сильно инертно цокольно регулярной, если для всякой ее сильно инертной подгруппы S найдется ординальное число α такое, что цоколь $S[p]$ соизмерим с цоколем $p^\alpha G[p]$.

Теорема 5.3. Все редуцированные p -группы являются сильно инертно цокольно регулярными.

Построены примеры характеристически инертных и вполне инертных подгрупп. Из них приведем следующий.

Пример 5.1. Существует группа G имеющая характеристически инертную, но не вполне инертную подгруппу.

Определение 5.2. Группа G называется относительно хопфовой группой, если для любой ее ненулевой подгруппы H в факторгруппе G/H нет собственных прямых слагаемых, изоморфных G .

Предложение 5.1. Каждая хопфова группа является относительно хопфовой.

Предложение 5.2. Редуцированная относительно хопфова копериодическая группа является хопфовой алгебраически компактной группой.

Пример 5.2. Для каждого целого числа $n \geq 2$ существует относительно хопфова группа G такая, что прямая сумма $G^{(k)}$ является относительно хопфовой для всех $1 < k < n$, но группа $G^{(n)}$ не относительно хопфова.

Определение 5.3. 1) Подгруппа H группы G называется вполне инертной, если факторгруппа $(H+f(H))/H$ конечна для всякого эндоморфизма f группы G .

2) Если же порядок факторгруппы $(H+f(H))/H$ не превосходит фиксированного числа n для всякого эндоморфизма f группы G , то подгруппа H называется равномерно вполне инертной.

3) Подгруппы H и S группы G называются соизмеримыми, если обе факторгруппы $(H+S)/H$ и $(H+S)/S$ конечны.

Теорема 5.4. Всякая равномерно вполне инертная подгруппа соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.

Теорема 5.4 является решением основного вопроса о равномерно вполне инертных подгруппах.

Если вместо умножения в кольце эндоморфизмов $E(G)$ абелевой группы G взять операцию коммутирования $\alpha*\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$, то получим лиево кольцо эндоморфизмов L группы G . Если $L^{(0)} = L$, а $L^{(1)} = \langle L*L \rangle$ – идеал кольца L , порожденный всеми коммутаторами $\alpha\beta - \beta\alpha$, где $\alpha, \beta \in E(G)$, то $L^{(n+1)} = \langle L^{(n)}*L^{(n)} \rangle$ – $n+1$ -коммутант кольца L . Кольцо L называется *разрешимым ступени n* для натурального числа n , если $L^{(n)} = 0$, но $L^{(n-1)} \neq 0$. В этом случае говорят, что группа G L - разрешима ступени n .

Напомним, что через $Z(n)$ обозначается циклическая группа порядка n , а через $Z(p^\infty)$ – квазициклическая p -группа.

Теорема 5.5. p -группа G при $p \neq 2$ является L - разрешимой тогда и только тогда, когда $G = A \oplus B$, где $A = 0$ или $A = Z(p^{n_1}) \oplus \dots \oplus Z(p^{n_k})$ для некоторого натурального числа k , причем $n_1 < \dots < n_k$ при $k > 1$, а $B = 0$ или $B \cong Z(p^\infty)$.

Подобная теорема получена для p -групп при $p = 2$. Получены также описания L - разрешимых сепарабельных групп без кручения, L - разрешимых прямых сумм циклических групп и др. Эти результаты обобщают результаты статьи [49].

З а к л ю ч е н и е . Полученные результаты опубликованы в статьях [А.10, А.11, А.12] и прошли апробацию на следующих конференциях:

1) Чехлов А.Р. Об абелевых группах с разрешимыми лиевыми кольцами эндоморфизмов // Мальцевские чтения 2023: международная конференция, 13-17 ноября 2023 г.: тезисы докладов. Новосибирск, 2023. С. 197.

2) Чехлов А.Р., Данчев П.В. Абелевы группы с изоморфными сильно инвариантными подгруппами // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, 2–5 октября, 2023 г., г. Томск: сборник материалов конференции. Томск: ООО "СТТ", 2023. С. 55–57.

1.6 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

Введение. Трехмерное многообразие называется гиперболическим, если оно допускает введение полной римановой метрики постоянной отрицательной кривизны. По теореме жесткости Мостова [1], любой геометрический инвариант гиперболического многообразия является его топологическим инвариантом. Важнейшим геометрическим инвариантом является объем многообразия. Для нахождения объема гиперболического многообразия, как правило, удобно рассмотреть его фундаментальный многогранник и свести задачу к вычислению объема многогранника. Нахождение объема гиперболического многогранника – очень старая и трудная задача. Объем биортогонального гиперболического тетраэдра (так называемой ортосхемы) был независимо найден Н.И. Лобачевским [2] и Я. Бойяи [50].

Гиперболический тетраэдр T – это выпуклая оболочка четырех точек в пространстве Лобачевского \mathbb{H}^3 . Эти точки называются вершинами T . Обозначим их цифрами 1, 2, 3 и 4 (рисунок 10). Пусть ℓ_{ij} – длина ребра, соединяющего вершины i и j , а θ_{ij} – двугранный угол вдоль этого ребра.

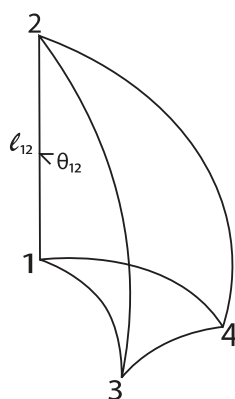


Рисунок 10 – Гиперболический тетраэдр T

Матрица Грама $G(T)$ тетраэдра T определяется как

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{14} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} & -\cos\theta_{24} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 & -\cos\theta_{34} \\ -\cos\theta_{14} & -\cos\theta_{24} & -\cos\theta_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Реберная матрица $E(T)$ состоит из гиперболических косинусов длин ребер и определяется следующим образом:

$$E(T) = \begin{pmatrix} 1 & \cosh\ell_{12} & \cosh\ell_{13} & \cosh\ell_{14} \\ \cosh\ell_{12} & 1 & \cosh\ell_{23} & \cosh\ell_{24} \\ \cosh\ell_{13} & \cosh\ell_{23} & 1 & \cosh\ell_{34} \\ \cosh\ell_{14} & \cosh\ell_{24} & \cosh\ell_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что гиперболический тетраэдр T однозначно с точностью до изометрии определяется либо матрицей Грама $G(T)$, либо реберной матрицей $E(T)$ [51].

В общем случае формулы для объема гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов независимо получены в работах Г. Сфорца [3], Ю. Чо и Х. Кима [4], Дж. Мураками и М. Яно [5], Д.А. Деревнина и А.Д. Медных [6]. В 2021 году Н.В. Абросимовым и Б. Выонгом [7] в рамках данного проекта впервые получена явная интегральная формула, выражающая объем произвольного гиперболического тетраэдра через длины его ребер. Все указанные формулы достаточно сложны и не всегда удобны для приложений, в частности, для вычисления объемов многогранников более сложного комбинаторного типа путем разбиения их на тетраэдры. Цель исследования в отчетном 2023 году – отчасти исправить этот пробел и найти сравнительно простую формулу для достаточно широкого множества гиперболических тетраэдров, удобную для дальнейшего использования в приложениях.

Трехпрямоугольный тетраэдр – это тетраэдр, у которого все три угла при одной вершине прямые. Для дальнейших приложений удобно задавать трехпрямоугольный тетраэдр в пространстве Лобачевского гиперболическими длинами трех его взаимно ортогональных ребер.

Многогранник Коксетера – это многогранник, все двугранные углы которого имеют вид π/n . Ф. Ланнер [52] доказал, что в \mathbb{H}^3 имеется ровно 9 компактных тетраэдров Коксетера. Один из них $T(\pi/2, \pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/5, \pi/2)$ представляет собой трехпрямоугольный тетраэдр. Остальные 8 тетраэдров Коксетера являются ортосхемами. Для триангуляции более сложных многогранников в \mathbb{H}^3 можно использовать как ортосхемы, так и трехпрямоугольные тетраэдры, не обязательно коксетеровские.

В 2023 году нами изучено обобщение класса трехпрямоугольных тетраэдров, а именно, гиперболические тетраэдры, у которых одно ребро ортогонально грани (основанию). Такие тетраэдры удобно задавать длинами трех ребер и одним углом: $\ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{14}, \theta_{12}$ (рисунок 10). Удастся получить относительно простые формулы для него, выражающие объем. В дальнейшем указанные тетраэдры использовались для разбиения более сложных многогранников в пространстве Лобачевского и получения их точных объемов.

Методы. Модель Пуанкаре \mathbb{H}^3 это верхнее полупространство $R_+^3 = \{(x, y, z) \in R^3 | z > 0\}$, снабженное метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$. Граница $\partial\mathbb{H}^3 = \{(x, y, 0) \in R^3\}$ состоит из бесконечно удаленных точек и называется абсолютом. Элемент объема в этой модели имеет вид ([51], гл. 7, п. 2.3) $dV = \frac{dx dy dz}{z^3}$. Нахождение известных ранее

формул для объема гиперболического тетраэдра как правило опиралось на исследование точных решений дифференциального уравнения типа Шлефли, которое в случае гиперболического тетраэдра имеет вид $-dV = \sum_{ij} \ell_{ij} d\theta_{ij}$, где суммирование ведется по всем ребрам. В настоящей работе мы не исследуем решения уравнения Шлефли, а вместо этого используем интегрирование по элементу объема в \mathbb{H}^3 . Затем с помощью формулы Фубини переходим от тройного интеграла к интегралу по проекции тетраэдра на плоскость абсолюта.

Результаты и обсуждения. Рассмотрим гиперболический тетраэдр $T = T(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \psi)$, у которого одно ребро ортогонально грани (основанию). Пронумеруем его вершины так, чтобы $\ell_{13} = \ell_1$, $\ell_{14} = \ell_2$, $\ell_{12} = \ell_3$. Существует изометрия \mathbb{H}^3 , которая переводит вершину v_1 в точку $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}_+^3$, направляет ребро ℓ_3 вдоль оси Oz и помещает вершину v_3 в координатную плоскость Oyz (рисунок 11). Будем называть такую конфигурацию тетраэдра T в \mathbb{R}_+^3 стандартным положением. Далее будем считать без ограничения общности, что T уже находится в таком положении.

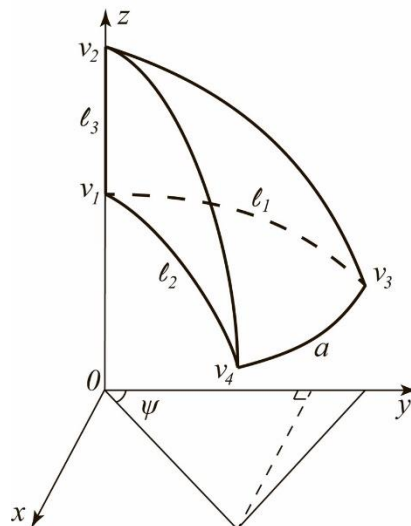


Рисунок 11 – Гиперболический тетраэдр $T(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \psi)$, в стандартном положении

Основной результат состоит в получении точной формулы для вычисления объемов четырехпараметрического семейства тетраэдров, описанных выше.

Теорема 6.1. Пусть $T = T(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \psi)$ – компактный гиперболический тетраэдр, у которого ребро длины ℓ_3 ортогонально двум другим ребрам с длинами ℓ_2, ℓ_3 , угол между которыми равен ψ . Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой

$$V = \int_0^{\cos \psi \tanh \ell_2} \int_0^{\tan \psi} f(x, y) dx dy + \int_{\cos \psi \tanh \ell_2}^{\tanh \ell_1} \int_0^{\frac{\sin \psi \tanh \ell_2 (y - \tanh \ell_1)}{\cos \psi \tanh \ell_2 - \tanh \ell_1}} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y) = \left[\frac{1}{1-x^2-y^2} + \frac{1}{x(x-2x_0)+y(y-2y_0)-e^{2\ell_3}} \right]$, $x_0 = \frac{(1-e^{2\ell_3})(\tanh\ell_1 - \cos\psi \tanh\ell_2)}{2 \sin\psi \tanh\ell_1 \tanh\ell_2}$ и $y_0 = \frac{1-e^{2\ell_3}}{2 \tanh\ell_1}$.

Полученная формула может быть использована для вычисления объемов более сложных многогранников в пространстве Лобачевского. Пусть P – гиперболический многогранник. Рассмотрим его разбиение на тетраэдры рассматриваемого вида. Для этого зафиксируем точку O внутри P , опустим из O перпендикуляры на каждую грань P и затем основания этих перпендикуляров соединим с вершинами соответствующих граней. Если многогранник обладает центральной симметрией, то в качестве точки O удобно выбирать его центр.

Пример 6.1. Гиперболический додекаэдр $D(a)$, все ребра которого имеют длину a , состоит из 60 копий тетраэдра $T_1 = T\left(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \frac{2\pi}{5}\right)$ – рисунок 12.

Длины ребер тетраэдра T_1 $\ell_1 = \ell_2 = r$ равны радиусу окружности, описанной вокруг одной из пятиугольных граней додекаэдра, который определяется соотношением

$$\cosh^2 r = \frac{\cosh a - \cos \frac{2\pi}{5}}{1 - \cos \frac{2\pi}{5}}.$$

Длина ребра $\ell_3 = h$ равна радиусу шара, вписанного в додекаэдр, который определяется из соотношения

$$\tanh^2 h = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{1 - \cos \frac{2\pi}{5}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3} (\cosh a - 1)}{\sin^2 \frac{\pi}{3} (\cosh a + 1) - 1 - \cos \frac{2\pi}{5}}.$$

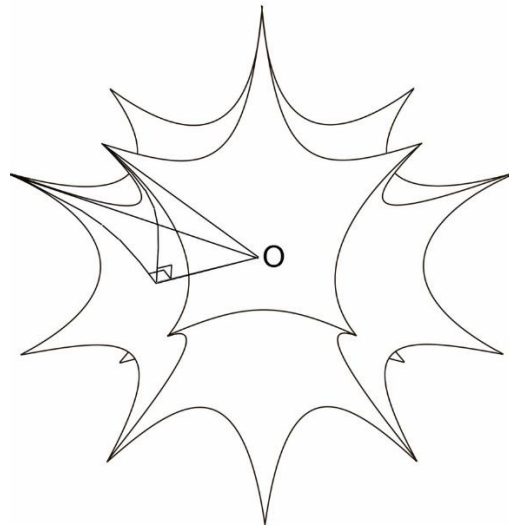


Рисунок 12 – Гиперболический додекаэдр $D(a)$

Пример 6.2. Гиперболический икосаэдр $I(a)$, все ребра которого имеют длину a , состоит из 60 копий тетраэдра $T_2 = T\left(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \frac{2\pi}{3}\right)$ – рисунок 13.

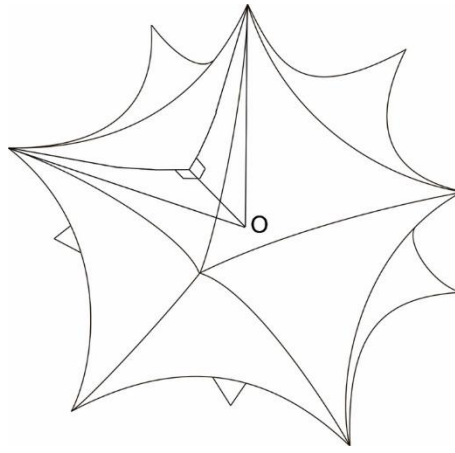


Рисунок 13 – Гиперболический икосаэдр I

Длины ребер тетраэдра T_2 $\ell_1 = \ell_2 = r$ равны радиусу окружности, описанной вокруг одной из треугольных граней икосаэдра, который определяется соотношением

$$\cosh^2 r = \frac{\cosh a - \cos \frac{2\pi}{3}}{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}.$$

Длина ребра $\ell_3 = h$ равна радиусу шара, вписанного в икосаэдр, который определяется из соотношения

$$\tanh^2 r = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3}}{1 - \cos \frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5} (\cosh a - 1)}{\sin^2 \frac{\pi}{5} (\cosh a + 1) - 1 - \cos \frac{2\pi}{3}}.$$

З а к л ю ч е н и е. Изучено четырехпараметрическое семейство гиперболических тетраэдров, у которых одно ребро ортогонально грани (основанию). С помощью нового подхода, получена точная формула для объемов таких тетраэдров. Найденная формула применена для вычисления объемов более сложных многогранников в пространстве Лобачевского путем их разбиения на тетраэдры указанного типа. Таким образом, все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Опубликовано статья [А.1].

Все результаты прошли апробацию на международных конференциях и исследовательских семинарах:

1) XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томский политехнический университет, Томск, Россия, 25-28 апреля 2023 г. – Н. В. Абросимов «Объем гиперболического тетраэдра специального вида» (пленарный доклад) https://conf-prfn.org/Files/2023/program_2023.pdf

2) Международная конференция Geometric and algebraic methods in knot theory, Математический центр Сириус, Сочи, Россия, 16-20 сентября 2023 г. – Н. В. Абросимов

«Euclidean volume of a cone manifold over a hyperbolic knot» (приглашенный доклад)
<https://siriusmathcenter.ru/program/030w>

3) The 9th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics, Jilin University, Чанчунь, Китай, 15-19 августа 2023 г. – Н. В. Абросимов «Euclidean volume of a cone manifold over a hyperbolic knot is always an algebraic number» (пленарный доклад)
<http://math.jlu.edu.cn/info/1556/14842.htm>

4) Colloquium of the Sino-Russian Mathematics Center JLU, Jilin University, Чанчунь, Китай, 20 августа 2023 г. – Н. В. Абросимов «On the volume of hyperbolic tetrahedron» (приглашенный доклад) <https://math.jlu.edu.cn/info/1555/14853.htm>

1.7 Исследование полей температуры в диффузионном пламени различных углеводородных топлив с применением оптических методов и математического моделирования

Введение. Горение является одним из самых фундаментальных и всеобъемлющих процессов в природе. Он играет важную роль в нашей повседневной жизни, обеспечивая нам тепло, энергию и освещение. Изучение и понимание процессов горения имеет огромную значимость в разных областях науки и техники. Оно не только позволяет оптимизировать эффективность и безопасность использования горючих материалов, но и способствует сокращению вредных выбросов в окружающую среду. Актуальной задачей является изучение и разработка способов контроля и, в перспективе, управления процессами горения различных горючих материалов. В данном исследовании приводится сравнение данных, полученных при физическом и математическом моделировании диффузионного горения метана при наличии внешнего источника возмущений в виде пульсации давления.

Методы. Для проведения экспериментального исследования был подготовлен стенд для физического моделирования диффузионного горения метана с наличием внешнего источника возмущений в виде акустических колебания. Стенд состоял из следующих элементов: горелочное устройство ГСП-3, генератор сигнала специальной формы FeelTech FeelElec FY6900-60M, усилитель LV-103, низкочастотный динамик 25-ГД-26 с мягким подвесом, осциллограф Tektronix TDS-1002. С помощью генератора сигналов формировался синусоидальный сигнал амплитудой 1 В, который затем подавался на усилитель, а из усилителя на динамик, который являлся источником внешних акустических колебаний. Форма сигнала на выходе из усилителя дополнительно контролировалась осциллографом. Рабочий диапазон изменения частоты сигнала составлял от 0 до 10 Гц, с шагом 1 Гц. Скорость

выхода рабочего газа из сопла горелки контролировалась с использованием анемометра KURZ 444 M. В работе был рассмотрен режим истечения газа со скоростью 0.5 м/с.

Математическое моделирование нестационарного процесса горения метана в двумерной постановке осуществлялось с использованием программного пакета «Ansys Fluent». В нем решалась полная система уравнений Навье-Стокса (уравнение неразрывности и уравнение движения), уравнение энергии, уравнение состояния газа и уравнения для скалярных величин, описывающих концентрацию химических веществ, участвующих в реакции горения [53]. Система уравнений решалась методом конечных объемов. Размер расчетной области составлял 500 × 200 мм, а размер горелки - 20 × 4 мм. Количество ячеек расчетной сетки составило 101005 шт. Для математического моделирования использовались следующие настройки: модель, описывающая турбулентное течение - стандартная k-ε модель со стандартными пристенными функциями; модель горения – одностадийная необратимая реакция горения стехиометрической метановоздушной смеси; модель скорости химической реакции - модель вихревой диссипации (EDM). Граничные условия на стенках № 1, № 2 и № 3 задавались по типу давление-выброс со стандартными настройками и заданием притока окислителя O₂ на стенку. Для реализации условия пульсации давления изменение давления на стенке № 1 задавалось в виде функции, имеющей вид $P_0 \sin(\omega t)$, где параметр ω изменялся в соответствии с исследуемой частотой воздействия от 0 до 10 Гц (с шагом 1 Гц), P_0 – параметр, отвечающий за величину максимальной амплитуды пульсации давления, который был равен 0.1 Па. Граничные условия на стенке № 4 были типа непроницаемой, теплоизолированной стенки - "Wall" с постоянной температурой 300 К. Граничные условия на стенке № 5 были типа "Velocity inlet", с постоянной скоростью истечения горючего газа CH₄, равной 0.5 м/с.

Результаты и обсуждения. В результате проведения экспериментального исследования диффузионного горения метана с наличием внешнего источника возмущений были получены наборы термограмм (рисунок 14).

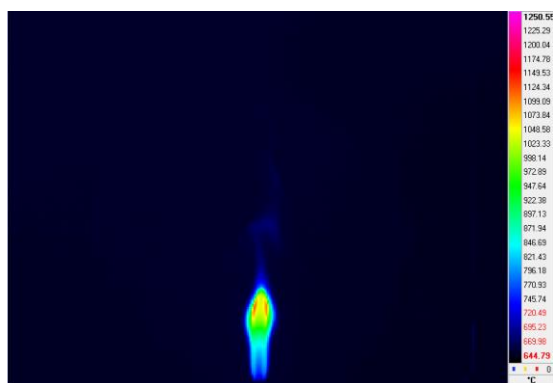


Рисунок 14 – мгновенная термограмма факела пламени метана
(диаметр сопла 4 мм, скорость газа 0.5 м/с)

Для анализа спектров изменения температуры производилась следующая обработка. По центру факела, на одной вертикальной оси, устанавливались 20 контрольных точек с фиксированным шагом 5 пикселей (рисунок 15а). Для каждой из точек была получена таблица изменения температуры во времени. Для получения спектров изменения температуры была использована программа, разработанная в среде MatLab, в которой реализован алгоритм быстрого преобразования Фурье. Используя ее, для каждой точки был получен спектр изменения температуры. Проводя усреднение (среднее арифметическое), был получен спектр изменения температуры для всего факела пламени (рисунок 15b). Аналогичная обработка производилась с данными, полученными в результате математического моделирования.

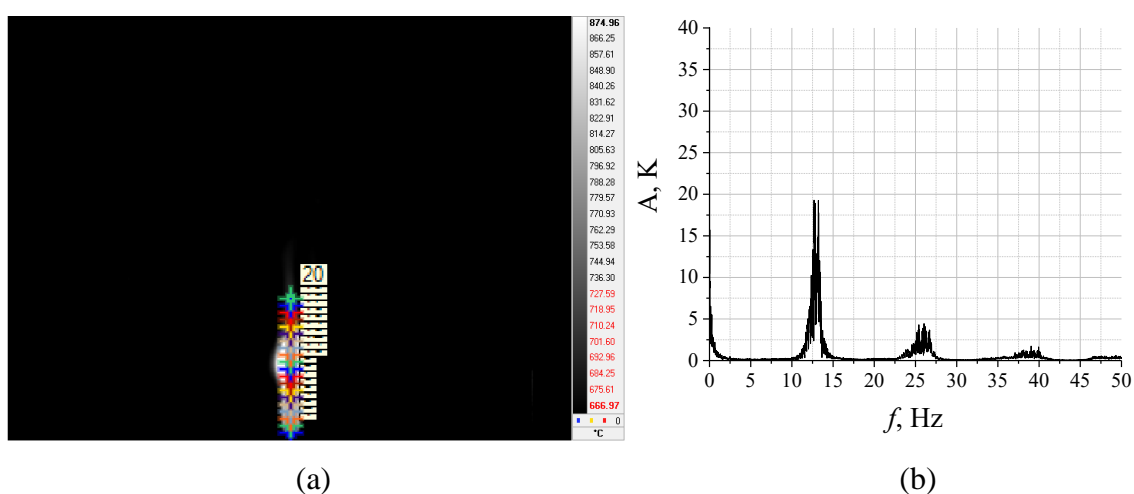


Рисунок 15 – Мгновенная термограмма факела пламени метана с установленными контрольными точками (а) и усредненный спектр изменения температуры в факеле (b) без внешних воздействий

На полученном спектре изменения температуры (рисунок 15b) выделяется основная частота пульсации температуры 13 Гц, а затем следуют ее гармоники, соответствующие 26 Гц, 39 Гц и 52 Гц. Эти пульсации обусловлены влиянием горелочного устройства на процесс горения. В случае возникновения внешнего акустического воздействия на спектре изменения температуры виден соответствующий отклик. Можно выделить режим от 2 до 4 Гц, когда на одном спектре присутствует исходная частота 13 Гц со своими гармониками, так и частота внешних пульсаций давления, опять же, со своими гармониками (рисунок 16).

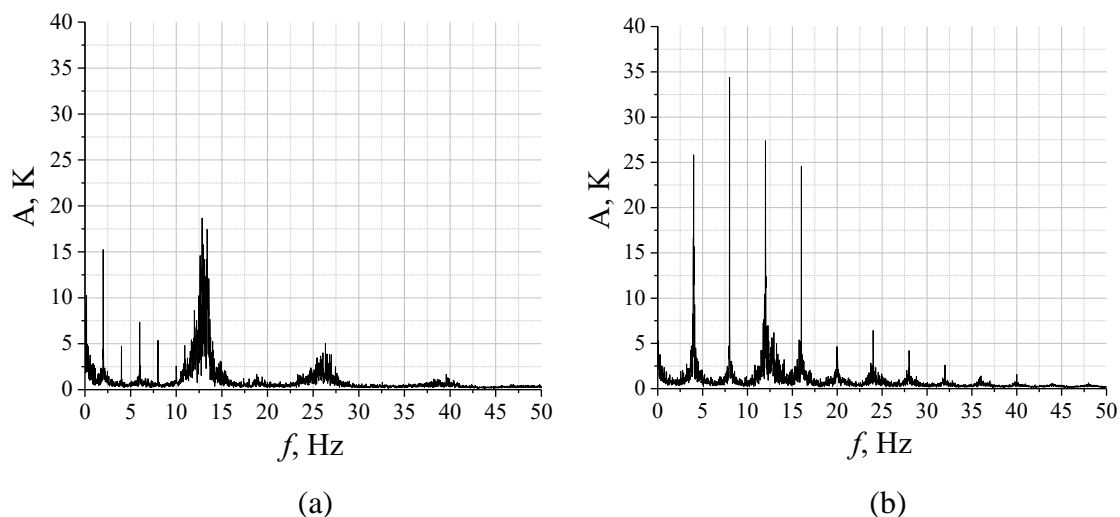


Рисунок 16 – Усредненный спектр изменения температуры в факеле метана при наличии внешних возмущений с частотой 2 Гц (a) и 4 Гц (b)

При дальнейшем увеличении частоты воздействия на спектре изменения температуры присутствует лишь характерная пульсация, со своими гармониками, соответствующая частоте воздействия (рисунок 17).

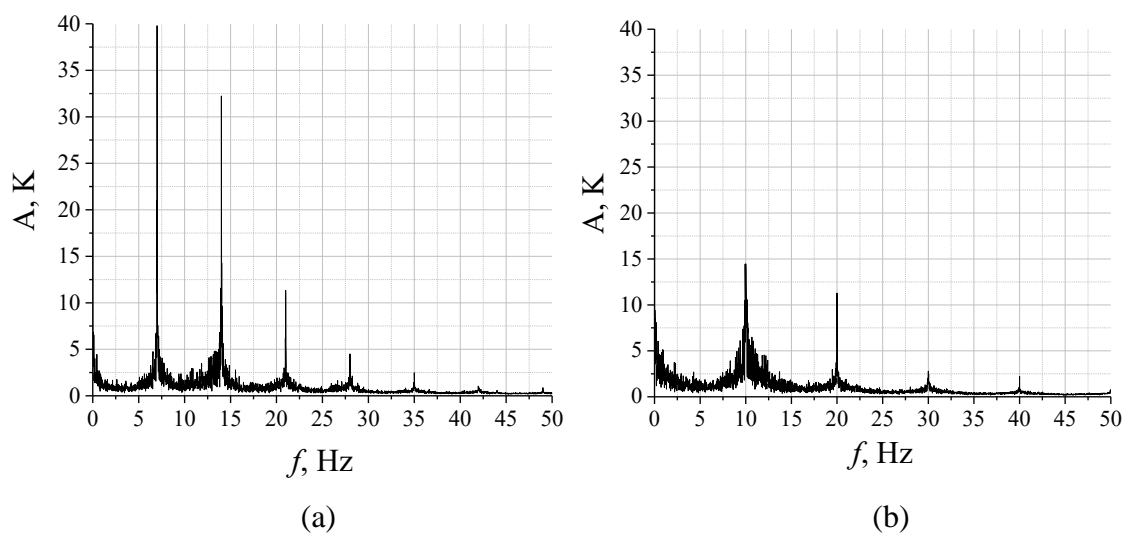


Рисунок 17 – Усредненный спектр изменения температуры в факеле метана при наличии внешних возмущений с частотой 7 Гц (a) и 10 Гц (b)

Проводя сравнительный анализ с теми данными, которые были получены в результате математического (рисунок 18) и физического (рисунок 17) моделирования диффузионного горения метана с наличием внешнего источника возмущений, можно сделать вывод о том, что наблюдается хорошее качественное и количественное согласование. Следует отметить, что на рисунке 18 отображается лишь основная частота воздействия и первая гармоника. Кроме того, если сравнивать полученные спектры изменения температуры в диапазоне от 2 до 4 Гц (рисунок 16), то на спектрах, полученных в результате математического

моделирования, присутствует лишь основная частота воздействия. Это свидетельствует о том, что математическая модель требует дальнейших доработок.

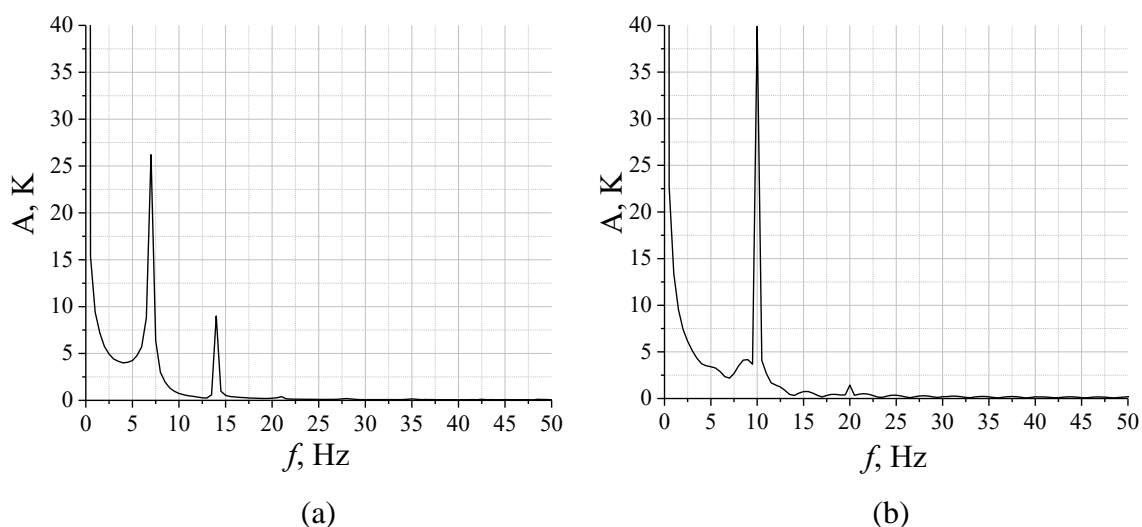


Рисунок 18 – Усредненный спектр изменения температуры в факеле метана при наличии внешних возмущений с частотой 7 Гц (а) и 10 Гц (б), полученный в результате математического моделирования

Заключение. В результате анализа данных, полученных при физическом и математическом моделировании диффузионного горения метана с наличием внешнего источника возмущений было проведено сравнение спектров изменения температуры в факеле пламени. Экспериментально выявлен характерный режим внешних воздействия, при котором на спектре пульсации температуры присутствуют как резонансные частоты воздействия, так и основная частота 13 Гц с соответствующими гармониками. Сравнение спектров изменения температуры показало хорошее согласование с разработанной математической моделью.

На основании полученных результатов исследования можно заключить, что все запланированные на отчетный период работы выполнены полностью. Полученные результаты опубликованы в статье [А.13]. Все результаты прошли апробацию на XXVIII Международном симпозиуме "Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы", проходившем 04 – 08 июля 2022 года в г. Томске, с докладом Агафонцев М.В., Лобода Е.Л., Рейно В.В. «Влияние акустических волн на процесс горения метана» (Агафонцев М.В., Лобода Е.Л., Рейно В.В. Влияние акустических волн на процесс горения метана // Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы: Материалы XXIX Международного симпозиума. Электронный ресурс. Томск: Издательство ИОА СО РАН, 2023. Конференция А. – с. 238–241.).

1.8 Узлы и зацепления в трехмерном торе

Введение. Недавно классическая теория узлов была расширена до более широкой теории, такой как теория виртуальных узлов, которую можно рассматривать как теорию узлов на утолщенных замкнутых ориентированных поверхностях. Теория узлов в других трехмерных многообразиях, таких как проективное пространство и линзовое пространство, воплотилась в жизнь в последнее десятилетие. В предстоящей статье [54] Вьонг исследовал диаграммный подход к изучению узлов в трехмерном торе. В данной работе предложен алгоритм вычисления скрученных полиномов Александера узлов и зацепления в трехмерном торе. В этой статье доказано, что кручение Рейдемейстера дополнения зацепления и его скрученный полином Александера равны.

Связь между полиномом Александера узла и инвариантом кручения Рейдемейстера, Франца и де Рама для дополнения узла была впервые замечена Милнором [55]. Как следствие этого соотношения, Милнор дал еще одно доказательство симметрии полинома Александера [56]. Милнор применил этот результат к теории узлов, рассматривая случай классического узла, то есть дополнение узла имеет гомотопию круга. Оказывается, существуют аналогичные отношения между кручением Рейдемейстера и скрученным полиномом Александера для случая дополнения узла в других пространствах, а не только в трехмерной сфере, когда группа гомотопии содержит также кручение [57, 58]. Технология получения явных отношений между кручением Рейдемейстера и полиномом Александера, которую создал Милнор, используя теорию простых гомотопий для CW-комплексов и свободное дифференциальное исчисление Фокса. Эти теории обеспечивают клеточную структуру для узла, связанную с представлением фундаментальной группы в виде порождающих и отношений, так что граничные отображения получаются посредством свободных производных Фокса. Таким образом, показано, что комбинаторный и алгебраический подходы можно использовать для изучения узлов и зацеплений в трехмерном торе.

Методы. Для доказательства равенства между кручением Рейдемейстера и скрученным полиномом Александера применяем теорию простых гомотопий и комбинаторную теорию групп. Построим клеточную структуру дополнения к узлу в трехмерном торе. Хорошо известно, что кручение является простым гомотопическим инвариантом и топологическим инвариантом компактных связных CW-комплексов. И для каждого топологического многообразия размерности 3 допускает кусочно-линейную структуру или, другими словами, допускает триангуляцию. Такая кусочно-линейная структура единственна в том смысле, что каждый гомеоморфизм между двумя кусочно-линейными многообразиями изотопен кусочно-линейному гомеоморфизму. В терминах

триангуляций триангуляции могут быть разделены так, что существует изоморфизм разделенных триангуляций, изотопных. Таким образом, кручение Рейдемейстера корректно определено. Свободное дифференциальное исчисление Фокса обеспечивает один способ для вычисления скрученных полиномов Александера. Получив эти значения в кольце многочленов, доказали, что два значения должны совпадать.

Результаты и обсуждения. Первая группа гомологии дополнения к зацеплениям в T^3 .

Зацепление L с n компонентами в трёхмерном торе T^3 является вложением дизъюнктного объединения n окружностей S^1 в трёхмерный тор. Если $n = 1$, зацепление называется узлом. Два зацепления считаются эквивалентными, если они объемлющие изотопны, то есть если существует непрерывная деформация T^3 , переводящая одно зацепление в другое.

Диаграмма зацепления в T^3 представляет собой регулярный плоский граф, представленный в квадрате [54]. Данный граф имеет 4-валентные вершины (с дополнительной структурой, представляющей перекресток в зацеплении), а также 2-валентные вершины (вершины с полюсами). Говорят, что две такие диаграммы эквивалентны, если существует последовательность обобщенных движений Рейдемейстера (рисунок 19) и движений вершин, обозначенных на рисунке 20, переводящих одну диаграмму в другую. Эти движения выполняются локально на регулярном плоском графе (с дополнительной структурой), который образует диаграмму зацепления.

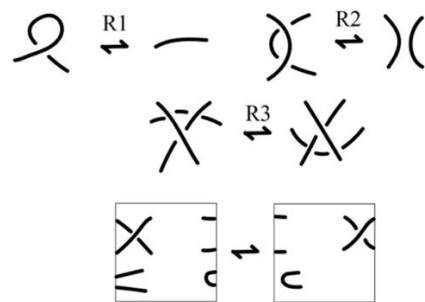


Рисунок 19 – Обобщенные движения Рейдемейстера

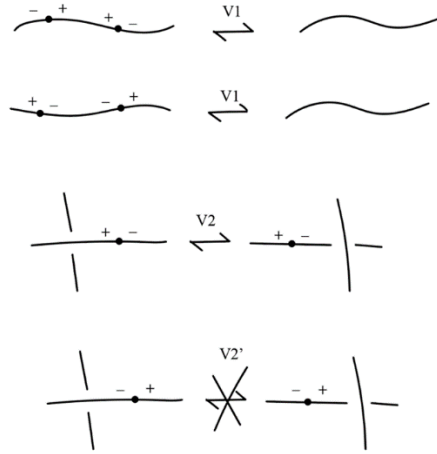


Рисунок 20 – Движения вершин

В статье [54] предположен алгоритм, с помощью которого можно получить одно представление фундаментальной группе дополнения зацепления в трехмерном торе из диаграммы зацепления, определенной выше. Имея диаграмму узла K в трёхмерном торе, мы легко можем определить его класс гомологии $[K] \in \mathbb{Z}^3$ узла K . Имеет место следующей теоремы о первой группе гомологий дополнения к зацеплению в T^3 .

Теорема 8.1.[54] Пусть L – зацепление в трехмерном торе T^3 с компонентами L_1, \dots, L_ω . Для каждого $i = 1, \dots, \omega$, пусть $(\delta_i, \sigma_i, \xi_i) = [L_i] \in \mathbb{Z}^3 = H_1(T^3)$ гомологический тип компонента i . Тогда

$$H_1(T^3 \setminus L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_\rho, & \text{if } \omega = 1 \\ \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_\kappa \oplus \mathbb{Z}_\lambda, & \text{if } \omega = 2 \\ \mathbb{Z}^\omega \oplus \mathbb{Z}_\zeta \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta, & \text{if } \omega \geq 3. \end{cases}$$

где $\rho = \gcd(\delta_1, \sigma_1, \xi_1)$; κ и λ являются инвариантным фактором матрицы M_1 ; ζ, η и θ инвариантным фактором матрицы M_2 .

$$M_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_\omega \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_\omega \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\omega \end{pmatrix}.$$

Теперь видим, что первая группа гомологии может содержать кручение. Говорим, что зацепление $L \in T^3$ является некручёным, если кручение первой группы гомологии $\text{Tors}(H_1(T^3 \setminus L))$ равно нулю, в противном случае скажем, что L является скрученным.

Локальное зацепление или аффинное зацепление – это зацепление, которое можно изотопировать так, чтобы она содержалась внутри трехмерного шара в T^3 . Локальное зацепление явно является некручёным.

Скрученный полином Александера. Дано одно представление группы зацепления, можно вычислить ее полином Александера, используя свободное исчисление Фокса [59]. Напомним следующее определение полиномов Александера [58, 60, 61, 62]. Пусть $P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ – представление группы G и обозначим через $H = G/[G, G]$ ее абелианизацию. Пусть $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – соответствующая свободная группа. Применяем цепочку отображений $\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H$, где $\frac{\partial}{\partial x}$ обозначает дифференциал Фокса, γ – фактор-отображение по отношениям r_1, \dots, r_m и α – отображение абелианизации.

Матрица Александера-Фокса представления P – это матрица $A = [a_{i,j}]$, где $a_{i,j} = \alpha(\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}))$ для $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. При $k = 1, \dots, \min\{m-1, n-1\}$ k -й элементарный идеал $E_k(P)$ является идеалом интегрального модуля $\mathbb{Z}H$, порожденный определителями всех $(n-k)$ миноров A . Первый элементарный идеал $E_1(P)$ – это идеал интегрального модуля $\mathbb{Z}H$, порожденный определителями всех $(n-1)$ миноров A .

Определение 8.1 Пусть $L \subset S^3$ – зацепление, а $E_k(P)$ – k -й элементарный идеал, полученный из представления P фундаментальной группы $\pi_1(S^3 \setminus L, *)$. Тогда k -ый полином зацепления $\Delta_k(L)$ является порождающим наименьшего главного идеала, содержащего $E_k(P)$. Полином Александера L , обозначаемый $\Delta(L)$, является первым многочленом зацепления L .

Для классического зацепления L в S^3 абелианизацией $\pi_1(S^3 \setminus L, *)$ является свободная абелева группа, образующие которой соответствуют компонентам L . Для зацепления в 3-торе T^3 абелианизация его группы зацеплений также может содержать кручение, как мы знаем из теоремы 8.1. В этом случае мы вспоминаем понятие скрученного полинома Александера.

Пусть G – группа с конечным представлением P и абелианизацией $H = G/[G, G]$ и обозначает $K = H/Tors(H)$. Тогда каждое представление $\phi: Tors(H) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определяет скрученный полином Александера $\Delta^\phi(P)$ следующим образом. Выбирая расщепление $H = Tors(H) \times K$, ϕ индуцирует гомоморфизм колец $\phi: \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{C}[K]$,

отправляя $(f, g) \in Tors(H) \times K$ в $\phi(f)g$. Кольцевой гомоморфизм называется скрученным гомоморфизмом. Таким образом, мы применяем цепочку отображений

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[K]$$

и получим ϕ -скрученную матрицу Александра $A^\phi = \left[\phi\left(\alpha\left(\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)\right) \right]$. Тогда скрученный

полином Александра определяется выражением $\Delta^\phi(P) = \gcd(\phi(E_1(P)))$.

Определение 8.2. Пусть $L \subset T^3$ – зацепление в трёхмерном торе T^3 . Для любого представления P группы зацепления $\pi_1(T^3 \setminus L, *)$ можем определить следующее.

Полином Александра L , обозначаемый $\Delta(L)$, является порождающим наименьшего главного идеала, содержащего $E_1(P)$.

Для любого гомоморфизма $\phi: Tors(H_1(T^3 \setminus L)) \rightarrow \mathbb{C}^*$ ϕ -скрученный полином Александра зацепления L равен $\Delta^\phi(L) = \gcd(\phi(E_1(P)))$.

Из теоремы 8.1 знаем, что подгруппа кручения $H_1(T^3 \setminus L)$ – это группа $\mathbb{Z}_\zeta \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta$ в общем виде. Таким образом, образ группового гомоморфизма $\phi: Tors(H_1(T^3 \setminus L)) \rightarrow \mathbb{C}^*$ содержится в циклической группе, порожденной Ω , корень степени d из единицы, где d равен $\text{lcm}(\zeta, \eta, \theta)$. ϕ -скрученный полином Александра $\Delta^\phi(L) \in \mathbb{Z}[\Omega][K]$ определен с точностью до умножения на обратимый элемент.

Кручения Рейдемейстера CW-комплекса. В этом разделе дано определение кручения Рейдемейстера по [57] (дополнительно работы Тураева [62, 63], Милнора [64]).

Пусть \mathbb{F} – поле, V – k -мерное векторное пространство над \mathbb{F} . Предположим, что $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ и $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ – два базиса V , тогда существует обратимая матрица размера $k \times k$ (a_{ij}) такая, что $b_j = \sum_{i=1}^k a_{ij} c_i$. Пишем $[b/c] = \det(a_{ij}) \in \mathbb{F}^*$. Говорят, что два базиса b и c имеют одинаковую ориентацию, если $[b/c] > 0$, и эквивалентны, если $[b/c] = 1$.

Пусть $0 \rightarrow C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$ – короткая точная последовательность векторных пространств. Пусть $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ – базис для C , а $e = (e_1, e_2, \dots, e_l)$ – базис для E . Поскольку отображение β сюръективно, мы можем поднять e_i до вектора \tilde{e}_i в D . Тогда $ce = (c_1, \dots, c_k, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_l)$ является базисом D и его эквивалентный класс не зависит от выбора \tilde{e}_i , но только на классах эквивалентности c и e .

Конечный цепной $(C, \partial) = (0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0)$ конечномерных векторных пространств над \mathbb{F} называется ациклическим, если оно точно. Цепной комплекс называется базисным, если для каждого C_i один базис определен.

Предположим, что (C, ∂) ациклическа и базируется на базисе c . Выберем базис b_i для $B_i = \text{Im } \partial_{i+1} = \ker \partial_i$. Из короткой точной последовательности $0 \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0$ получаем базис $b_i b_{i-1}$ для C_i .

Определение 8.3. Кручение ациклического и базисного цепного комплекса C определяется как $\tau(C) = \prod_{i=0}^m [b_i b_{i-1} / c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{F}$. Если C не является ациклическим, то $\tau(C)$ определяется равно 0.

Кручение $\tau(C)$ зависит от c , но не зависит от выбора b_i . Если вместо c_i используется базис c'_i , то кручение умножается на $[c_i / c'_i]^{(-1)^{i+1}}$.

Пусть X – конечный связный CW-комплекс и $\pi = \pi_1(X)$. Универсальное накрытие \tilde{X} пространства X имеет каноническую CW-комплексную структуру, полученную поднятием клеток X . Если $\{e_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$ – упорядоченное множество ориентированных k -клеток X и \tilde{e}_i^k – любое поднятие e_i^k , то упорядоченное множество $\{\tilde{e}_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$ является базисом $\mathbb{Z}[\pi]$ -модуля $C_i(\tilde{X})$.

Если $\mathbb{Z}[\pi] \xrightarrow{\phi} \mathbb{F}$ – кольцевой гомоморфизм, то заменой конструкции колец $\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X})$ является цепным комплексом конечномерных векторных пространств над \mathbb{F} . Если этот цепной комплекс ацикличесок, то определено его кручение $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X})) \in \mathbb{F}^*$. Однако $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ зависит от выбранного базиса для $C_*(\tilde{X})$, то есть от выбора поднимающих клеток $\{\tilde{e}_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$. Если мы зафиксируем выбор набора поднятых клеток в качестве базиса $\mathbb{Z}[\pi]$ -модуля $C_i(\tilde{X})$, но изменим порядок клеток в базисе, то $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ умножается на ± 1 . Если изменить ориентацию клеток, то кручение также умножится на ± 1 . Если мы выберем другую поднятую клетку для e_i^k по действию $h \cdot \tilde{e}_i^k$ накрывающего преобразования $h \in \pi$ тогда кручение умножается на $\phi(h)^{\pm 1}$.

Определение 8.4. Кручение Райдемайстера $\tau^\phi(X)$ CW-комплекса X определяется как образ $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ при фактор-отображении $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} / \pm\phi(\pi)$.

Кручение является инвариантом простой гомотопии и топологический инвариант компактных связных CW-комплексов. В размерностях три или меньше, где нас интересуют,

каждое топологическое многообразие имеет уникальную кусочно-линейную структуру, поэтому кручение многообразия корректно определена.

Замечание. Увидели, что для определения скрученного полинома Александра нам необходимо представление $\phi: Tors(H) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ части кручения $Tors(H)$ в \mathbb{C}^* , как описано выше. Это представление индуцирует скрученный гомоморфизм $\mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[K]$, которую мы также обозначаем ϕ . Если $\mathbb{Q}(K)$ обозначает поле частных $\mathbb{C}[K]$. Тогда скрученный гомоморфизм ϕ путем компоновки с проекцией в это поле частных определяет кольцевой гомоморфизм из $\mathbb{Z}[H]$ в поле $\mathbb{Q}(K)$, который тоже обозначен через ϕ . Таким образом, с помощью представления $\phi: Tors(H) \rightarrow \mathbb{C}^*$ можем определить как скрученный полином Александра Δ^ϕ , так и кручение τ^ϕ .

Кручение Рейдемейстера дополнения к зацеплению в 3-торе. Пусть L – зацепление в трёхмерном торе T^3 . Эйлерова характеристика 3-тора T^3 равна $\chi(T^3) = 0$. Удалив трубчатую окрестность $N(L)$ зацепления L из 3-тора T^3 , мы получим компактное 3-многообразие X с краем, являющееся дополнением к зацеплению в 3-торе. С точки зрения эйлеровой характеристики мы имеем $0 = \chi(T^3) = \chi(X \cup N(L)) = \chi(X) + \chi(N(L)) - \chi(X \cap N(L))$, откуда следует $\chi(X) = 0$.

Рассмотрим дополнение к зацеплению X , зажая по одной свободной клеткой за раз, можем свернуть X до двумерного подкомплекса Y , так что X просто гомотопен Y [65]. Двухклеточный комплекс Y имеет нулевую эйлерову характеристику. Можем гарантировать, что Y имеет клеточную структуру, содержащую только одну 0-клетку σ^0 ; n 1-клеток $\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1$, m 2-клеток $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$, где $m = n - 1$.

Граничное отображение: $\partial_1 = 0$ и $\partial_2(\sigma_i^2) = r_i$, где r_i – слово из σ_j^1 , дающее представление фундаментальной группы в виде $\pi = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$.

Имеют места формул из статьи [57], связанные с кручением Рейдемейстера и матрицей Александра-Фокса для представления группы, то есть фундаментальной группы многообразия. Для любых i и j ,

$$(\phi(x_i) - 1)\det A_j = \pm(\phi(x_j) - 1)\det A_i.$$

$$(\phi(x_i) - 1)\tau^\phi(X) = \pm \det A_i \in \mathbb{Q}(K) / \pm K.$$

Теорема 8.2. Кручение Рейдемейстера и скрученный полином Александра дополнения к зацеплению в 3-торе совпадают.

Заключение. Изучены узлы узлов и зацепления в трехмерном торе и их алгебраические инварианты (кручение Рейдемейстера и скрученный полином Александера). Доказано, что два данные инварианта совпадают.

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью.

Все результаты прошли апробацию на международных конференциях и исследовательских семинарах:

1. Исследовательский семинар «Узлы и теория представлений», Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия, 14 июня 2023 г. – Выонг Бао «Узлы в 3-торе», 2 сентября 2023 г. – Выонг Бао «Матрица Грамма и объем тетраэдра», 20 ноября 2023 г. – Выонг Бао «Кручение Рейдемейстера дополнения к зацеплению в 3-торе» https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=12&confid=209

2. Международная конференция «9-th China-Russia Knot theory and related topics», Китай, 15-19 августа 2023 г. – Б. Выонг «Twisted Alexander polynomial of knots in 3-torus», <http://math.jlu.edu.cn/info1556/14842.htm>

3. Научная конференция «Геометрические и алгебраические методы в теории узлов», Центр Сириус, Сочи, Россия, 16-20 сентября 2023 г. – Б. Выонг «Fundamental group and twisted Alexander polynomial of link complement in 3-torus», <https://siriusmathcenter.ru/program/030w>

4. Научная конференция «Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных», Томский Государственный Университет, НОМЦ, Томск, Россия, 5-9 декабря 2023 г. – Б. Выонг «Узлы и зацепления в трехмерном торе», <https://nomc.math.tsu.ru/>.

1.9 Мульти-группы

В теории алгебраических систем существуют алгебраические системы с множеством операций одной арности.

В отчетном периоде найдена связь между косыми брейсами и димоноидами, определены полугрупповые системы на множестве квадратных матриц. Исследованы полугрупповые системы на множестве квадратных матриц $M_n(\mathbb{k})$. Также, мы строим некоторые рэковые системы и мульти-рэки на множестве $V \times G$, где V является векторным пространством размерности n над полем \mathbb{k} , а G является полугруппой $GL_n(\mathbb{k})$.

Определение 9.1. Пусть – алгебраическая система $\mathcal{A} = (A, f_i, i \in I)$ с множеством операций f_i арности n_i . Будем называть эту систему m - однородной системой, если все

арности n_i равны m . В частности, если $m=2$, то будем говорить о группоидной n -системе вместо 2-однородной n -системы.

Кольцо $(K, +, \cdot)$ является группоидной 2-системой. Другими примерами однородной системы являются полугрупповая (моноидальная, групповая) система $\mathcal{G} = (G, *_i, i \in I)$, где $(G, *_i)$ является полугруппой (моноидом, группой) для всех $i \in I$. Примером полугрупповой системы с двумя операциями является дюплекс.

Определение 9.2. Мы будем называть \mathcal{G} мульти-полугруппой (мульти-моноидом, мульти-группой), если операции связаны следующим условием:

$$(a *_i b) *_j c = a *_i (b *_j c), \quad a, b, c \in G, \quad i, j \in I.$$

Примером мульти-полугруппы с n операциями является n -кортежная полугруппа.

Приведем другие примеры полугрупповых систем.

Определение 9.3. Косым левым брейсом называется тройка (G, \cdot, \circ) , где (G, \cdot) и (G, \circ) являются группами и выполняется аксиома: $g_1 \circ (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \circ g_2) \cdot g_3^{-1} \cdot (g_1 \circ g_3)$,

Для всех $g_1, g_2, g_3 \in G$, где g_1^{-1} обратный к элементу g_1 .

Определение 9.4. Димоноидом называется множество X с двумя бинарными операциями \vdash и \dashv , удовлетворяющими следующим аксиомам:

$$\begin{cases} x \dashv (y \vdash z) = (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \vdash z \end{cases} \quad \text{для всех } x, y, z \in X.$$

Приведем примеры димоноидов:

а) Пусть M - моноид. Положим $D = M \times M$ и определим умножение

$$\begin{aligned} (m, n) \dashv (m', n') &:= (m, nm'n'), \\ (m, n) \vdash (m', n') &:= (mm'm', n'). \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{D} = (D, \dashv, \vdash)$ является димоноидом.

б) Пусть G - группа и X является G -множеством. Следующие формулы определяют структуру димоноида на $X \times G$:

$$\begin{aligned} (x, g) \dashv (y, h) &:= (x, gh), \\ (x, g) \vdash (y, h) &:= (g \cdot x, gh). \end{aligned}$$

Групповые системы и мульти-группы. Пусть $M_n(\mathbb{k})$ множество $n \times n$ матриц над полем \mathbb{k} . Сформулировано утверждение $A^*_{s,t,M_1,M_2} B = sAM_1B + tAM_2B$, $s, t \in \mathbb{k}$, $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{k})$, и вопросы:

Что можно сказать про это произведение? Какие алгебраические системы можно построить, используя эти операции? Какая связь этих операций с нестандартным произведением матриц, которые изучались в работе [66].

Найдем условия, под которыми $(M_n(\mathbb{k}), *_{s,t,M_1,M_2})$ является полугруппой. Проверим аксиому ассоциативности:

$$(A * B) * C = (sAM_1B + tAM_2B) * C = s(sAM_1B + tAM_2B)M_1C + t(sAM_1B + tAM_2B)M_2C.$$

С другой стороны,

$$A * (B * C) = A * (sBM_1C + tBM_2C) = sAM_1(sBM_1C + tBM_2C) + tAM_2(sBM_1C + tBM_2C).$$

Получим систему

$$\begin{cases} AM_1BM_1C = AM_1BM_1C; \\ AM_2BM_1C + AM_1BM_2C = AM_1BM_2C + AM_2BM_1C; \\ AM_2BM_2C = AM_2BM_2C. \end{cases}$$

Легко видеть, что $(A * B) * C = A * (B * C)$.

Лемма 9.1. Произведение $*_{s,t,M_1,M_2}$ ассоциативно.

Следствие 9.1. Алгебраическая система $(M_n(\mathbb{k}), *_{s,t,M_1,M_2}, s, t \in \mathbb{k}, M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{k}))$ является полугрупповой системой.

Предложение 9.1. Полугрупповая система $(M_n(\mathbb{k}), *_{s,t,M_1,M_2}, s, t \in \mathbb{k}, M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{k}))$ является мульти-полугруппой.

Лемма 9.2. Единичный элемент: $A * B = AMB, \det M \neq 0, E^{(*)} = M^{-1}$.

Обратный элемент $A * Y = E^{(*)} \Leftrightarrow AMY = M^{-1}$. следовательно, $Y = M^{-1}A^{-1}M^{-1}$.

Теорема 9.1.

1) Пусть $M \in M_n(\mathbb{k})$, $\det M \neq 0$, тогда $(GL_n(\mathbb{k}), *_{M})$ является группой с произведением $A *_{M} B = AMB$, единичным элементом $E^{(*)} = M^{-1}$ и обратным элементом $\bar{A}^{(*)} = M^{-1}A^{-1}M^{-1}$.

2) Алгебраическая система $(GL_n(\mathbb{k}), *_{M}, M \in GL_n(\mathbb{k}))$ является групповой системой.

Рэковые системы.

Определение 9.5. Квандлом называется непустое множество Q с бинарной операцией $(x, y) \mapsto x * y$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(q1) $x * x = x$ для всех $x \in Q$,

(q2) для любого $x, y \in Q$ существует единственный элемент $z \in Q$ такой, что $x = z * y$,

(q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ для всех $x, y, z \in Q$.

Алгебраическая система, удовлетворяющая только (q2) и (q3) называется рэком.

Определим операцию $(a, A)^\circ(b, B) = (Ab, ABA^{-1})$, $a, b \in V$, $A, B \in G$, и проверим левую самодистрибутивность $(a, A)^\circ((b, B)^\circ(c, C)) = ((a, A)^\circ(b, B))^\circ((a, A)^\circ(c, C))$.

Поскольку $(a, A)^\circ((b, B)^\circ(c, C)) = (a, A)^\circ(Bc, BCB^{-1}) = (ABc, ABCB^{-1}A^{-1})$,
 $((a, A)^\circ(b, B))^\circ((a, A)^\circ(c, C)) = (Ab, ABA^{-1})^\circ(Ac, ACA^{-1}) = (ABc, ABCB^{-1}A^{-1})$, левая самодистрибутивность
выполняется.

Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим более общую операцию
 $(a, A)^\circ_n(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n})$, $a, b \in V$, $A, B \in G$.

Проверим левую самодистрибутивность:

$$(a, A)^\circ_n((b, B)^\circ_n(c, C)) = (a, A)^\circ_n(B^n c, B^n C B^{-n}) = (A^n B^n c, A^n B^n C B^{-n} A^{-n}),$$

$$((a, A)^\circ_n(b, B))^\circ_n((a, A)^\circ_n(c, C)) = (A^n b, A^n B A^{-n})^\circ_n(A^n c, A^n C A^{-n}) = (A^n B^n c, A^n B^n C B^{-n} A^{-n}).$$

Следовательно, операция $(a, A)^\circ_n(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n})$ выполняется.

Проверим: $(a, A)^\circ_n(u, X) = (b, B)$. Получим $(a, A)^\circ_n(u, X) = (A^n u, A^n X A^{-n})$.

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} u = A^{-n} b, \\ X = A^{-n} B A^n. \end{cases}$$

Поскольку эта система имеет единственное решение, то левая дистрибутивность
выполняется.

Теорема 9.2. Пусть $Q = (V, G)$, где V векторное пространство размерности n над
полем \mathbb{k} , G - подгруппа $GL_n(\mathbb{k})$. тогда алгебраическая система $(Q, *_n, n \in \mathbb{Z})$, где
 $(a, A)^\circ_n(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n})$, $a, b \in V$, $A, B \in G$.

Удовлетворяет следующим аксиомам:

1) левая самодистрибутивность:

$$(a, A)^\circ_n((b, B)^\circ_n(c, C)) = ((a, A)^\circ_n(b, B))^\circ_n((a, A)^\circ_n(c, C)), \quad a, b, c \in V, \quad A, B, C \in G.$$

2) левая обратимость:

для любого $(a, A), (b, B) \in Q$ существует единственный элемент $(u, X) \in Q$ такой что
 $(a, A)^\circ_n(u, X) = (b, B)$.

Следствие 9.2. Алгебраическая система, $(Q, *_n^{op}, n \in \mathbb{Z})$, где противоположные
операции определены по правилу: $(a, A) *_n^{op}(b, B) = (b, B) *_n(a, A)$ является рэковой системой.

Связь косых брейсов и димоноидов

Предложение 9.2. Пусть (G, \cdot) группа

1) Если $a^\circ b = ab$, то (G, \cdot, \circ) является косым брейсом. Если $a \vdash b = a + b = ab$, то мы
получим димоноид.

2) Если $a^\circ b = ba$, то (G, \cdot, \circ) является косым брейсом. Если $a \vdash b = ab$ и $a \dashv b = ba$, то
 (G, \dashv, \vdash) не является димоноид.

Методы. В работе использовались методы теории алгебраических систем, развитые а. И. Мальцевым и биргофом в середине прошлого века. А также методы теории бигруппоидов, в частности, теории димоноидов и дюплексов.

Заключение. За отчетный период построены некоторые групповые системы на множестве квадратных матриц над полем \mathbb{k} . определены рэковые системы на множестве $V \times G$, где V – векторное пространство размерности n над \mathbb{k} , G - подгруппа $GL_n(\mathbb{k})$. найдена связь между косыми брейсами и димоноидами.

Запланированные на 2023 год результаты получены и прошли апробацию на следующих международных конференциях и исследовательских семинарах:

1. Международная конференция *geometric and algebraic methods in knot theory*, Математический центр Сириус, Сочи, 16-20 сентября 2023 г. – Т.А. Козловская «Representations of the singular braid groups» (приглашенный доклад) <https://siriusmathcenter.ru/program/030w>

2. Научная конференция «Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных», Томский государственный университет, Томск, 5-9 декабря 2023 г. – Т. А. Козловская «Многозначные группы и многогранники ньютона», <https://nomc.math.tsu.ru/>

3. Конференция «Дни геометрии», Новосибирск, 28 августа – 2 сентября 2023 г. Т. А. Козловская «Представления группы сингулярных кос» (доклад).

4. Исследовательский семинар «Геометрия, топология и их приложения», Институт математики им. С.П. Соболева, Новосибирск, 4 апреля 2023 г. – Т. А. Козловская «Группы косового типа». <https://math.nsc.ru/index.php/seminars/gtp?page=3>

5. Исследовательский семинар «Узлы и теория представлений», Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, 19 июля 2023 г. – Т. А. Kozlovskaya «Braid-like group. Simplicial structure on pure singular braid groups». https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventid=12&confid=209

6. Colloquium of the sino-russian mathematics center jlu, Jilin university, Чанчунь, Китай, 25 июня 2023 г. – Т. А. Kozlovskaya «Simplicial structure on pure singular braid groups of samomile type» (приглашенный доклад) <https://math.jlu.edu.cn/info/1686/15019.htm>

1.10 Конформное отображение прямоугольника на многоугольник. Конформное отображение полосы на круговой счетноугольник типа полосы

Введение. В данном исследовании отображение прямоугольника на многоугольник представлено в интегральном виде (интеграл типа Кристоффеля–Шварца) с помощью тета функций Якоби. Такое представление можно использовать для определения

модуля четырехугольника (и в более общем случае четырехсторонника). Существует подход, когда отображение прямоугольника на многоугольник записывается с помощью композиции классической формулы Кристоффеля–Шварца и эллиптического синуса [9, 10], в данной работе получено «прямое» отображение прямоугольника на многоугольник. Такое представление отображения более удобно для некоторых задач, в том числе для нахождения конформного модуля. Для конформного модуля четырехугольника записано интегральное уравнение. Конформный модуль имеет приложения в геометрической теории функций, в задачах математической физики, электронике и др. [8].

В данном исследовании получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца для отображения полосы на круговой счетноугольник типа полосы – односвязную область типа полосы, обладающую симметрией переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей. Численно-аналитический подход построения конформного отображения полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых, реализован в [11]. Формула Кристоффеля–Шварца получила обобщение для односвязных счетноугольников типа полосы в работе [12], в [13] для многосвязных счетноугольников типа полосы. Конформные отображения на счетноугольники типа полосы имеют приложения в задачах гидродинамики, электростатики, теплопроводности, в теории дифференциальных уравнений.

Методы. Отображение f прямоугольника на многоугольник имеет счетное количество особых точек в комплексной плоскости. Показывается, что прешварцциан f''/f' искомого отображения – двоякопериодическая мероморфная функция с простыми полюсами. С помощью теории эллиптических функций устанавливается вид функции f''/f' . Функция f' записывается через тета-функции Якоби и через сигма-функцию Вейерштрасса.

Показано, что производная Шварца отображения f полосы на круговой счетноугольник типа полосы является двоякопериодической мероморфной функцией с полюсами второго порядка. С помощью теории эллиптических функций устанавливается вид производной Шварца отображения f . Производная Шварца представлена через ро и дзета-функции Вейерштрасса.

Результаты и обсуждения. Получена формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для отображения прямоугольника на многоугольник.

Пусть Ω – N -угольник в комплексной плоскости; граница $\partial\Omega$ состоит из отрезков прямых. Через A_1, \dots, A_N обозначим вершины многоугольника и через $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_N\pi$ – углы при этих вершинах, $\alpha_k \in (0, 1) \cup (1, 2]$ если $A_k \neq \infty$ и $\alpha_k \in [-2, 0]$ если $A_k = \infty$.

Согласно теореме Римана существует голоморфное однолистное отображение $f: Q \rightarrow \Omega$ прямоугольника $Q = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < p, 0 < \operatorname{Im} z < q\}$, $p, q > 0$, на многоугольник Ω нормированное условиями

$$f(p) = A_1, \quad f(p+iq) = A_2, \quad f(iq) = A_3. \quad (6)$$

Теорема 10.1. Пусть f – голоморфное однолистное отображение прямоугольника Q на многоугольник Ω , $a_k = f^{-1}(A_k)$, $k = 1, \dots, N$, – прообразы вершин, $a_0 = 0$. Пусть f нормированно условиями (1). Отображение f можно представить в виде

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z e^{\nu \xi} \prod_{k=0}^3 (\sigma(\xi - a_k))^{\gamma_k} \prod_{k=4}^N (\sigma(\xi - a_k) \sigma(\xi + a_k))^{\gamma_k} d\xi + c_2,$$

или в виде

$$f(z) = \tilde{c}_1 \int_{z_0}^z e^{\mu \xi} \prod_{k=0}^3 \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2p} \right) \right)^{\gamma_k} \prod_{k=4}^N \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2p} \right) \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi + a_k}{2p} \right) \right)^{\gamma_k} d\xi + c_2,$$

где σ – сигма функция Вейерштрасса, \mathfrak{G}_1 – первая тета функция Вейерштрасса, $\gamma_k = 2\alpha_k - 1$, $k = 1, 2, 3$, и $\gamma_k = \alpha_k - 1$, $k = 4, \dots, N$, $\gamma_0 = 1$, $\nu = 2(\zeta(p)(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) - \zeta(iq)(\alpha_2 + \alpha_3 - 1))$, $\mu = -i \frac{\pi}{p} (\alpha_2 + \alpha_3 - 1)$, $c_1, \tilde{c}_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq p, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq q\}$.

Получена формула типа формулы Кристоффеля-Шварца для отображения треугольника на многоугольник.

Теорема 10.2. Пусть Ω – N -угольник в комплексной плоскости с вершинами A_1, \dots, A_N и углами при них $\alpha_1 \pi, \dots, \alpha_N \pi$ соответственно, $\alpha_k \in (0, 1) \cup (1, 2]$ если $A_k \neq \infty$ и $\alpha_k \in [-2, 0]$ если $A_k = \infty$. Существует голоморфное однолистно отображение f треугольника $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/4, \operatorname{Re} z < 1\}$ на многоугольник Ω , нормированное условиями $f(1) = A_1$, $f(1+i) = A_2$, $f(0) = A_3$. Отображение f можно представить в виде

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z e^{\nu \xi} (\sigma(\xi - a_1) \sigma(\xi - ia_1))^{\gamma_1} (\sigma(\xi - a_2))^{\gamma_2} (\sigma(\xi - a_3))^{\gamma_3} \times \\ \times \prod_{k=4}^N (\sigma(\xi - a_k) \sigma(\xi + a_k) \sigma(\xi - ia_k) \sigma(\xi + ia_k))^{\gamma_k} d\xi + c_2,$$

или в виде

$$f(z) = \tilde{c}_1 \int_{z_0}^z e^{\mu \xi} \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_1}{2} \right) \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - ia_1}{2} \right) \right)^{\gamma_1} \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_2}{2} \right) \right)^{\gamma_2} \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_3}{2} \right) \right)^{\gamma_3} \times \\ \times \prod_{k=4}^N \left(\mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2} \right) \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi + a_k}{2} \right) \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi - ia_k}{2} \right) \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\xi + ia_k}{2} \right) \right)^{\gamma_k} d\xi + c_2,$$

где σ – сигма функция Вейерштрасса, \mathcal{G}_1 – первая тета функция Вейерштрасса, $a_k = f^{-1}(A_k)$, $k = 1, \dots, N$ ($a_1 = 1$, $a_2 = 1+i$, $a_3 = 0$), $\gamma_1 = 2\alpha_1 - 1$, $\gamma_2 = 4\alpha_2 - 1$, $\gamma_3 = 4\alpha_3 - 1$, $\gamma_k = \alpha_k - 1$, $k = 4, \dots, N$, $\mu = -i\pi(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)$, $\nu = 2(\zeta(1) + \zeta(i))(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)$, $c_1, \tilde{c}_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Следующую теорему – частный случай теоремы 10.1, можно использовать для определения модуля четырехугольника.

Теорема 10.3. Существует такое $p > 0$ и голоморфное однолистное отображение f прямоугольника $Q = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < p, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ на четырехугольник $\Omega = ABCD$ что $f(p) = A$, $f(p+i) = B$, $f(i) = C$, $f(0) = D$, и отображение f представимо в виде

$$f(z) = c \int_0^z e^{\mu\xi} \prod_{k=1}^4 \left(\mathcal{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2p} \right) \right)^{2\alpha_k - 1} d\xi + D,$$

или в виде

$$f(z) = \tilde{c} \int_0^z \left(\mathcal{G}_2 \left(\frac{\xi}{2p} \right) \right)^{2\alpha_1 - 1} \left(\mathcal{G}_3 \left(\frac{\xi}{2p} \right) \right)^{2\alpha_2 - 1} \left(\mathcal{G}_0 \left(\frac{\xi}{2p} \right) \right)^{2\alpha_3 - 1} \left(\mathcal{G}_1 \left(\frac{\xi}{2p} \right) \right)^{2\alpha_4 - 1} d\xi + D,$$

где \mathcal{G}_k – k -ая тета функция, $a_1 = p$, $a_2 = p+i$, $a_3 = i$, $a_4 = 0$ – прообразы вершин четырехугольника Ω при отображении f с углами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi, \alpha_4\pi$ соответственно, $\mu = -i\frac{\pi}{p}(\alpha_2 + \alpha_3 - 1)$, $c, \tilde{c} \in \mathbb{C}$.

Значение параметра p (конформный модуль четырехугольника $(\Omega; D, A, B, C)$), можно найти из равенства

$$\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{\left| \int_0^i e^{\mu\xi} \prod_{k=1}^4 \left(\mathcal{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2p} \right) \right)^{2\alpha_k - 1} d\xi \right|}{\left| \int_0^p e^{\mu\xi} \prod_{k=1}^4 \left(\mathcal{G}_1 \left(\frac{\xi - a_k}{2p} \right) \right)^{2\alpha_k - 1} d\xi \right|}. \quad (7)$$

Следующая часть результатов относится к исследованию отображения полосы на многоугольник с границей, состоящей из дуг окружностей, обладающий симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π (счетноугольник).

Счетноугольником типа полосы с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π называют односвязную область $\Delta \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- область Δ инвариантна относительно сдвига $L(w) = w + 2\pi$;
- при преобразовании L на бесконечности остаются неподвижными два простых конца границы Δ ;

- граница области Δ от точки w_0 до $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Существует и причем единственное h и отображение $f: S \rightarrow \Delta$, переводящее голоморфно и однолистно полосу $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < h\}$ на счетноугольник Δ так, что двум простым концам полосы с носителями на бесконечности соответствуют два простых конца счетноугольника Δ с носителями на бесконечности и для которого

$$f(z + 2\pi) = f(z) + 2\pi \quad (8)$$

и $f(z_0) = w_0$.

Пусть $w_1, w_2 \in \partial S$, $Re w_1 = Re w_2$. Обходя часть границы счетноугольника от точки w_1 до точки $w_1 + 2\pi$ и от точки $w_2 + 2\pi$ до точки w_2 в положительном направлении обхода границы, будем обозначать последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_{k,0}$, $k = 1, \dots, N$ (не включая точки $w_1 + 2\pi$ и $w_2 + 2\pi$). Введем обозначение $A_{k,n} = A_{k,0} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Угол при вершине $A_{k,n}$ обозначим через $\alpha_k \pi$, $k = 1, \dots, N$.

Прообразы вершин $A_{k,n}$ при отображении f обозначим через $a_{k,n}$, $a_{k,n} \in \partial S$. Для упрощения обозначим $a_{k,0} =: a_k$.

В следующей теореме содержится основной результат исследования отображения полосы на круговой счетноугольник типа полосы.

Теорема 10.4. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ отображения f , голоморфно и однолистно переводящего полосу $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < h\}$ на круговой счетноугольник типа полосы Δ , нормированного условием (3), имеет вид

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (1 - \alpha_k^2) \wp(z - a_k) + \sum_{k=1}^N M_k \zeta(z - a_k) + q,$$

где \wp – ро-функция Вейерштрасса, ζ – дзета-функция Вейерштрасса, $q, M_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^N M_k = 0$

a_k – прообраз вершины A_k^0 , $\alpha_k \pi$ – угол при этой вершине, $k = 1, \dots, N$.

В работе на примере показано, что q зависит от геометрии области.

Заключение. Получена формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для отображения прямоугольника на многоугольник с границей, состоящей из отрезков прямых (теорема 10.1). Получена формула (7) для нахождения конформного модуля четырехугольника. Получено уравнение типа уравнения Шварца для отображения полосы на круговой счетноугольник типа полосы (теорема 10.4).

Результаты получены в рамках заявленной тематики развития методов построения конформных отображений.

Результаты апробированы на следующих конференциях:

1. XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22 – 27 августа 2023);

2. Международная конференция Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications (Санкт-Петербург, 11–16 декабря 2023).

1.11 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

Введение. При исследовании процессов теплообмена в сложных технических системах в большинстве случаев необходимо учитывать перенос тепла за счет механизмов конвекции, кондукции и излучения. Тем не менее многие исследователи пренебрегают учетом последнего механизма переноса энергии [67, 68, 29, 70, 71], вследствие сложности математического описания или вследствие малого влияния излучения на гидродинамику и теплообмен в области решения.

В рамках настоящего проекта за отчетный период проведено численное моделирование конвективно-радиационного теплообмена в 2D и 3D замкнутых дифференциально обогреваемых полостях, с целью определения условий при которых данные 3D моделирования могут быть частично заменены данными, полученными при решении плоских задач. Математическое моделирование проведено в открытом пакете OpenFOAM. Рассматриваемые области решения представлены на рисунке 21.

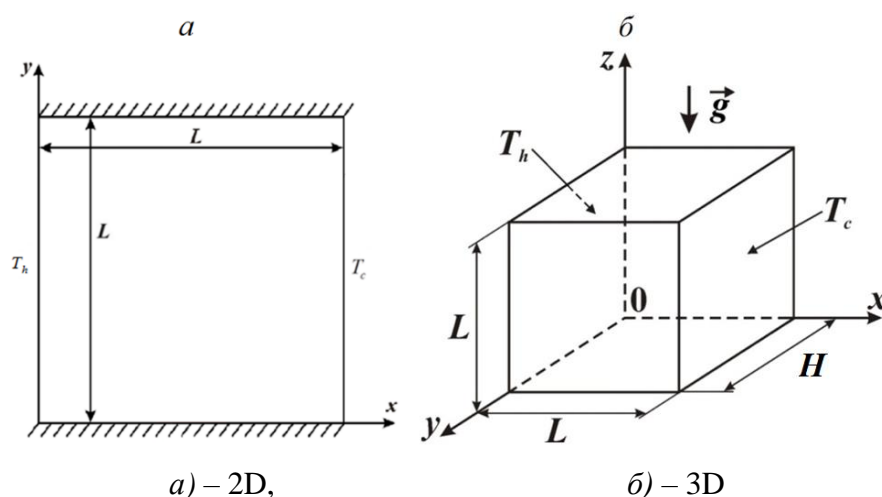


Рисунок 21 – Области решения рассматриваемой задачи

Они представляет собой замкнутые области с твердыми стенками конечной толщины. Внутри областей находится воздух, который считается вязкой ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. На двух границах задаются изотермические граничные условия, на оставшихся границах задаются условия теплоизоляции. В качестве допущений, используемых при моделировании лучистого теплообмена, можно отметить следующие: внутренние поверхности стенок серые, излучение диффузное.

Методы. Для данной постановки система уравнений, описывающих процессы переноса массы, импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot (2\mu_{eff} D(u)) - \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu_{eff} (\nabla \cdot u) \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u e) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u K) + \nabla \cdot (p u) = \nabla \cdot (\alpha_{eff} \nabla e) + \rho u \cdot g \quad (11)$$

Здесь u – составляющие скорости; ρ – плотность; μ_{eff} – эффективная вязкость; $D(u)$ – тензор скоростей деформации; e – внутренняя энергия; t – время; K – кинетическая энергия на единицу массы; g – ускорение свободного падения.

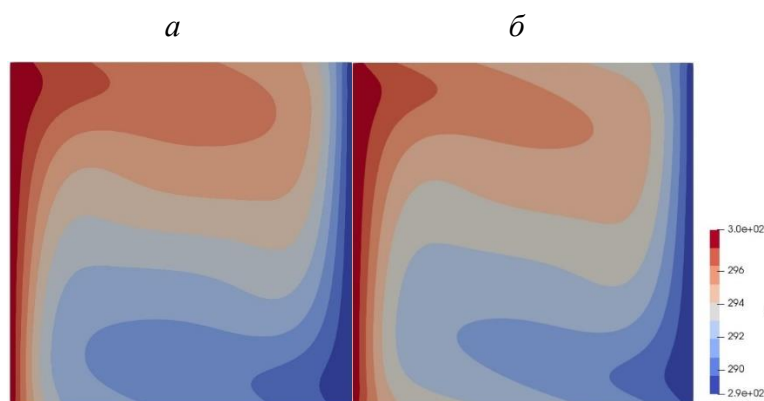
Уравнения (9)–(11) с соответствующими граничными и начальными условиями решаются методом контрольного объема в пакете OpenFOAM. Для аппроксимации оператора градиента в рассматриваемых уравнениях использовалась схема с центральными разностями. Схематиками аппроксимации оператора дивергенция были центральные разности и схема с разностями против потока. В качестве методов решения полученных систем линейных уравнений использовались методы: метод сопряженных градиентов с предобуславливателем и метод бисопряженных градиентов.

Результаты и обсуждения. Для верификации полученных результатов было проведено сравнение полученных результатов с работой [72]. В таблице 1.1 приведено сравнение полученных значений среднего радиационного числа Нуссельта ($Ra=10^5$) с работой [72].

Таблица 2 – Сравнение значений среднего радиационного числа Нуссельта в зависимости от степени черноты поверхностей

ε , степень черноты	Настоящие результаты	Работа [72]
0.2	1.089	1.090
0.8	5.211	5.196

Для установления основных закономерностей процессов тепломассопереноса в рассматриваемой области (рисунок 21) проведена серия численных экспериментов. Численные исследования краевой задачи проводилось при следующих значениях безразмерных комплексов: степень черноты внутренних поверхностей ($\varepsilon = 0.2, 0.8$ и 0), число Рэлея ($Ra = 10^5, 10^4$ и 10^6), $Pr=0.71$. На рисунке 22 представлены распределения изотерм при $Ra = 10^5$ в зависимости от значений степеней черноты поверхностей. Учет поверхностного излучения приводит к модификации поля температуры. Изотермы к горизонтальным стенкам (которые по условию теплоизолированы) подходят не под прямым углом, вследствие влияния радиационного механизма переноса энергии.



$\varepsilon = 0.2 - a, \varepsilon = 0.8 - б$

Рисунок 22 – Изолинии температуры при $Ra = 10^5$ в зависимости от значений степеней черноты поверхностей

Наибольший интерес при решении краевых задач такого рода представляет определение интегральных коэффициентов теплообмена. В таблице 3 представлены значения среднего радиационного числа Нуссельта на левой изотермической границе в зависимости от длины третьей стороны.

Таблица 3 – Сравнение значений среднего радиационного числа Нуссельта в зависимости от длины третьей стороны

	$H=1$	$H=2$	$H=3$	$H=5$	$H=10$	1D
Nu_{rad}	4.27	4.71	4.88	5.01	5.16	5.211

Заключение. Проведено численное исследование конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых 2D и 3D областях. В качестве метода решения использовался метод контрольного объема. Проведена верификация математических моделей на известных данных. В результате проведенных численных экспериментов проведена оценка влияния длины третьей стороны H , числа Рэлея, степеней черноты внутренних

поверхностей на структуру течения и теплообмен в области решения. В результате проведенных исследований определены условия при которых данные 3D моделирования могут быть частично заменены данными, полученными при решении плоских задач.

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью. В 2023 году по проекту опубликованы две статьи [А.18, А.19].

1.12 Исследование инвариантов геометрических структур гиперболических многогранников, многообразий и орбифолдов

Введение. Далее все кольца – ассоциативные с единицей, \mathbf{Z} – кольцо (и группа) целых чисел, $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) вычетов по модулю p^n .

Пусть R и S – кольца, ${}_R M_S$ – R - S -бимодуль, ${}_S N_R$ – S - R -бимодуль, $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$ – бимодульные гомоморфизмы. Рассмотрим множество формальных

или, как еще говорят, обобщенных матриц $K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\}$

Несложно видеть, что относительно поэлементного сложения образует K абелеву группу.

Далее, пусть для любых двух формальных матриц $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix}$ из K

$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}$, причем $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$ и

$\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$ для всех $m, m' \in M, n, n' \in N$. Таким образом, получили, что K –

кольцо, называемое кольцом формальных (обобщенных) матриц. Часто K

обозначают для краткости как $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц естественным образом можно расширить на случай произвольного порядка $n \geq 2$. Понятия формальной матрицы и колец формальных матриц впервые появляются в работе японского математика К. Мориты [73]. Поэтому их иногда называют, *кольцами контекста Мориты*. Детальный обзор истории изучения контекста Мориты можно найти в статье [74].

Пусть p – простое число, m и n – натуральные числа, причем $m \geq n > 0$. Рассмотрим

кольцо формальных матриц $K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$ с

бимодульными гомоморфизмами $\varphi((b + p^n\mathbf{Z}) \otimes (c' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z}$ и

$\psi((c + p^n\mathbf{Z}) \otimes (b' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}cb' + p^n\mathbf{Z}$ для любых $b, c, b', c' \in \mathbf{Z}$. Тогда для любых $A, A' \in K$

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m \mathbf{Z} & b' + p^n \mathbf{Z} \\ c' + p^n \mathbf{Z} & d' + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n} bc' + p^m \mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n \mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n} cb' + dd' + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

Такие кольца формальных матриц над кольцами вычетов $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ представляют интерес по нескольким причинам (далее о них подробнее).

Вообще, всякому кольцу формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ соответствует группа A ,

разложимая в прямую сумму своих подгрупп $A = B \oplus C$ такая, что

$$E(B \oplus C) \cong \begin{pmatrix} E(B) & \text{Hom}(C, B) \\ \text{Hom}(B, C) & E(C) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}. \text{ Для кольца } K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ такой}$$

группой, конечно, будет $-(\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$, $+$). Вместе с тем, всякая конечная p -группа ранга 2 изоморфна группе вида $(\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$, где $m \geq n > 0$. То есть, кольца K есть в точности кольца эндоморфизмов конечных p -групп второго ранга.

Также кольца формальных матриц над кольцами вычетов могут представлять интерес как основа для построения некоммутативного протокола шифрования данных. Этот раздел криптографии – некоммутативная алгебраическая криптография – в последнее время привлекает большой интерес специалистов, в частности предпринимается много попыток сконструировать протоколы шифрования, используя кольца формальных матриц [75, 76, 77, 78, 79, 80]. Кольцо K , очевидно, не является коммутативным, однако, оно рассматривается над несколькими коммутативными кольцами вычетов $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$, очень просто устроенными. Также кольца вида K , в общем случае, не изоморфны кольцам обычных матриц $M(n, R)$. В этом заключается его привлекательность для практического применения.

В недавней статье Е. А. Тимошенко и А. Ю. Степановой [14] изучаются кольца эндоморфизмов конечных примарных абелевых групп ранга 2 (а также 3), которые, как мы

поняли выше, будут изоморфны кольцам обобщенных матриц вида $K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$

Авторам удалось, применяя подход П.А. Крылова из статьи [81], определить аналог определителя для формальных матриц над кольцами вычетов, также они нашли необходимые и достаточные условия обратимости таких матриц и формулы для построения обратной матрицы.

Мы ставим своей задачей работу над так называемыми аддитивными задачами в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов – т.е. то, как кольцо формальных матриц K и его отдельные матрицы могут аддитивно порождаться обратимыми, нильпотентными, идемпотентными и другими «специальными» (например, q -потентами или обратимо-регулярными) формальными матрицами из K .

В статье [А.7] мы показали, что при $p > 2$, K – 2-хорошее, а при $p = 2$ K не является хорошим, то есть в K найдутся матрицы, непредставимые в виде сумм конечного числа обратимых матриц.

В готовящейся работе мы с соавторами находим необходимые и достаточные условия нильпотентности матриц из K , показываем, что K не будет ни изящным, ни ниль-хорошим, ни при каком простом $p > 1$, а также, что K – $(p-1)$ -ниль-чистое кольцо. В конце статьи мы ставим вопросы для дальнейшей работы с аддитивными задачами в кольце K .

Методы. В работе были использованы всевозможные методы теории колец, теории абелевых групп, теории модулей. Методы, касающиеся непосредственно колец формальных матриц над кольцами вычетов, разрабатывались в статьях [1–3, 6–8].

Результаты и обсуждения.

Теорема 12.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$. Матрица A нильпотентна

тогда и только тогда, когда числа a и d кратны p .

Из теоремы 12.1 несложно вывести следующие факты.

Следствие 12.1. В K есть матрицы непредставимые в виде суммы нильпотентной и обратимой или нулевой, то есть K – не ниль-хорошее кольцо.

Следствие 12.2. Поскольку K – не ниль-хорошее кольцо, то оно не будет и изящным.

Проблема 12.1. Будет ли $E((\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}))$ изящным или хотя бы ниль-хорошим кольцом?

Лемма 12.1. Для любого простого $p > 1$ и для любых натуральных m и n , $m \geq n$ следующие (формальные) матрицы являются нетривиальными идемпотентами в K :

$$\begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 1 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 1 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Лемма 12.2. Если элемент кольца ниль-чист, то он будет и k -ниль-чист для любого $k > 1$.

Комбинируя результаты лемм 12.1 и 12.2 можно доказать следующий результат.

Теорема 12.2. K – $(p-1)$ -ниль-чистое кольцо.

Проблема 12.2. Может ли K быть ниль-чистым кольцом при $p > 2$?

Для ответа на этот вопрос нужно знать когда формальная матрица $A \in K$ идемпотентна.

Проблема 12.3. Найти необходимые и достаточные условия идемпотентности матриц в K .

З а к л ю ч е н и е. Была продолжена работа с аддитивными задачами в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов, начатая в [А.7].

Были найдены необходимые и достаточные условия нильпотентности матриц из K . Было показано, что кольцо формальных матриц над кольцами вычетов K не будет ни изящным, ни ниль-хорошим, ни при каком простом $p > 1$, а также, что $K - (p-1)$ -ниль-чистое кольцо. Были поставлены задачи нахождения необходимых и достаточных условий идемпотентности матриц из K . Был поставлен вопрос о том, может ли K быть ниль-чистым кольцом при $p > 2$?

Запланированные показатели и результаты были достигнуты полностью. Полученные результаты готовятся к печати в журнале «Вестник ТГУ. Математика и механика».

1.13 Спектральная (p,q) -задача для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в областях с анизотропными гёльдеровыми особенностями

Введение. В отчетный период исследовалась спектральная (p,q) -задача для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана

$$-div\left(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = \lambda_{p,q} \|u\|_{L_q(\Omega_\gamma)}^{p-q} |u|^{q-2} \text{ in } \Omega_\gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega_\gamma$$

в ограниченных областях $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ с анизотропными гёльдеровыми особенностями [82]:

$$\Omega_\gamma = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, 0 < x_i < g_i(x_n), i = 1, 2, \dots, n-1 \right\},$$

где $g_i(t) = t^{\gamma_i}$, $\gamma_i \geq 1$, $0 < t < 1$, являются гёльдеровыми функциями и $\gamma = \log(g_1(t) \cdots g_{n-1}(t)) (\log t)^{-1} + 1$. Для $g_1(t) = \dots = g_{n-1}(t) = t$ используется понятие Ω_n вместо Ω_γ . Предполагается, что $1 < p < \alpha + \gamma$, где $-n < \alpha < n(p-1)$, $n \geq 2$, и $1 < q < p^*$, где $p^* = \gamma p / (\alpha + \gamma - p)$, и вес $|x|^\alpha$ удовлетворяет условию Макенхаупта.

Мы рассматриваем эту спектральную (p,q) -задачу для нелинейного весового оператора p -Лапласа в обобщённой постановке. Функция $u \in W_p^1(\Omega_\gamma, |x|^\alpha)$ называется решением спектральной (p,q) -задачи для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в обобщённой постановке, если

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle |x|^\alpha dx = \lambda_{p,q} \|u\|_{L_q(\Omega_\gamma)}^{p-q} \int_{\Omega_\gamma} |u|^{q-2} uv dx \quad \forall v \in W_p^1(\Omega_\gamma, |x|^\alpha).$$

Весовое пространство Соболева $W_p^1(\Omega_\gamma, w)$, $1 \leq p < \infty$, определяется как нормированное пространство локально интегрируемых слабо дифференцируемых функций $f : \Omega_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{W_p^1(\Omega_\gamma, w)} = \|f\|_{L_p(\Omega_\gamma)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Omega_\gamma, w)}.$$

Отметим, что без дополнительных ограничений на вес w пространство $W_p^1(\Omega_\gamma, w)$ необязательно является банаховым [83]. Однако, если вес $w : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет условию Макенхаупта ($w \in A_p$):

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1/(1-p)} \right)^{p-1} < +\infty,$$

где $1 < p < \infty$ и $|B|$ - мера Лебега шара B , то $W_p^1(\Omega_\gamma, w)$ является банаховым пространством и гладкие функции класса $W_p^1(\Omega_\gamma, w)$ плотны в $W_p^1(\Omega_\gamma, w)$ [84]. Заметим, что $w = |x|^\alpha \in A_p$ тогда и только тогда, когда $-n < \alpha < n(p-1)$ [3].

Методы. Предложенный метод для исследования спектральной (p, q) -задачи для нелинейного весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в областях с каспами, основан на операторах композиции в пространствах Соболева. Эти операторы композиции порождаются (p, s) -квазиконформными отображениями [85].

Результаты и обсуждения. В отчетный период были получены следующие результаты. Доказана теорема вложения весовых пространств Соболева в классические пространства Лебега в ограниченных областях с анизотропными гёльдеровыми особенностями.

Теорема 13.1. Пусть $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ - область с анизотропными гёльдеровыми особенностями. Предположим, что $\max \left\{ -n, \frac{p(n-\gamma)}{n} \right\} < \alpha < n(p-1)$ и $1 < p < \alpha + \gamma$. Тогда оператор вложения

$$i_{\Omega_\gamma} : W_p^1(\Omega_\gamma, |x|^\alpha) \rightarrow L_q(\Omega_\gamma)$$

компактен для любого $1 < q < p^*$, где $p^* = \gamma p / (\alpha + \gamma - p)$.

Учитывая эту весовую теорему вложения, доказан принцип минимакса для первого нетривиального собственного числа (p, q) -задачи для весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана.

Теорема 13.2. Существует функция $u \in W_p^1(\Omega_\gamma, |x|^\alpha) \setminus \{0\}$ такая, что

$$\int_{\Omega_\gamma} |u|^{q-2} u dx = 0.$$

Кроме того,

$$\lambda_{p,q}(\Omega_\gamma, |x|^\alpha) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\gamma, |x|^\alpha)}^p}{\|u\|_{L_p(\Omega_\gamma)}^p} : u \in W_p^1(\Omega_\gamma, |x|^\alpha) \setminus \{0\}, \int_{\Omega_\gamma} |u|^{q-2} u dx = 0 \right\} = \frac{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\gamma, |x|^\alpha)}^p}{\|u\|_{L_p(\Omega_\gamma)}^p}$$

$$\text{и } \lambda_{p,q}(\Omega_\gamma, |x|^\alpha) > 0.$$

На основе предыдущих теорем и операторов композиции в пространствах Соболева получена нижняя оценка первого собственного числа (p,q) -задачи для весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в пространственных ограниченных областях с анизотропными гёльдеровыми особенностями.

Теорема 13.3. Пусть

$$\Omega_\gamma := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, 0 < x_i < x_n^{\gamma_i}, i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

$\gamma_i \geq 1$, $\gamma := 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i$ области с анизотропными гёльдеровыми особенностями.

$$\text{Пусть } \max \left\{ -n, \frac{p(n-\gamma)}{n} \right\} < \alpha < n(p-1), 1 < p < \alpha + \gamma, 1 < q < p^* = p\gamma / (\alpha + \gamma - p)$$

$$\text{и } a \in \left(\max \left\{ 0, \frac{n-p}{\alpha + \gamma - p} \right\}, \min \left\{ \frac{n}{\gamma}, \frac{p(n-1)}{\alpha + \gamma - p} \right\} \right).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1}{\lambda_{p,q}(\Omega_\gamma, |x|^\alpha)} \leq a^{\frac{p-1}{q}} c_a^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (a\gamma_i - 1)^2 + n - 1 + a^2 \right)^{\frac{p}{2}} B_{r,s}^p(\Omega_n) \\ \times \left(\frac{p-s}{np - s(a(\alpha + \gamma - p) + p)} \right)^{\frac{p-s}{s}} \left(\frac{r-q}{a\gamma r - nq} \right)^{\frac{(r-q)p}{rq}}$$

для некоторых r, s зависящих от a , таких, что $s < \min\{p, n\}$ и $1 < s < r < ns / (n-s)$. Здесь $B_{r,s}(\Omega_n)$ – точная постоянная в соответствующем неравенстве Пуанкаре-Соболева в области Ω_n и c_a – некоторая положительная постоянная.

Замечание. Таким образом, изучены спектральные свойства нелинейного весового оператора p -Лапласа в нерегулярных областях евклидова пространства. На основе весовых теорем вложения доказан принцип минимакса для первого нетривиального собственного числа (p,q) -задачи для весового оператора p -Лапласа с граничным условием

Неймана. Получены нижние оценки первого нетривиального собственного числа (p, q) -задачи для весового оператора p -Лапласа с граничным условием Неймана в ограниченных областях с анизотропными гёльдеровыми особенностями.

Тем самым получены все результаты, запланированные на 2023 год, и представлены в работе [86]. Был сделан доклад на тему «О первом собственном значении задачи Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме» на XVI Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы».

2 Образовательная составляющая

2.1 Конференции, семинары, мастер-классы, съезды, конгрессы, организованные центром

Все запланированные на 2023 г. научные конференции и семинары проведены в срок.

НОМЦ являлся организатором трех всероссийских конференций, прошедших в Томске: Всероссийская конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Всероссийская конференция по математике и механике и VIII Всероссийская конференция с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» «Математика и математическое образование в условиях цифровизации» (совместно с Институтом гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и Институтом теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН).

Также НОМЦ ТГУ являлся организатором двух международных конференций: IX Китайско-Российская конференция по теории узлов и смежным вопросам (совместно с Цзилинским университетом, Китай) и «Геометрические и алгебраические методы в теории узлов» (совместно с Математическим центром «Сириус»).

Совместно с Международным математическим центром в Академгородке, Тюменским государственным университетом и Адыгейским государственным университетом на четырех площадках (Майкоп, Новосибирск, Томск, Тюмень) была организована «Большая математическая мастерская». На площадке НОМЦ были реализованы четыре научно-исследовательских проекта по фундаментальной и прикладной математике с участием студентов и аспирантов ТГУ, НГУ и ИМ СО РАН.

Весной 2023 года были проведены две традиционных студенческих и одна школьная конференции.

Продолжили свою работу два еженедельных научных семинара: Математический коллоквиум и Городской математический семинар им. Г. Г. Пестова.

Перечень научных конференций, семинаров, мастер-классов, съездов, конгрессов и других аналогичных мероприятий, организованных центром:

1. Научный семинар для студентов, аспирантов и преподавателей «Математический коллоквиум», март-май 2023 г. (очно-дистанционный формат, еженедельно, 42 участника – студенты, аспиранты, преподаватели, <https://nomc.math.tsu.ru/about/matematicheskiy-kollokvium/>).

2. Всероссийская конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», 27–30 апреля 2023 г. (очно-дистанционный формат, 33 участника –

российские ученые, <https://nomc.math.tsu.ru/uchenym-istudentam/conf/sovremennye-problemy matematiki-i-ee-prilozheniy/>).

3. XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 25–28 апреля 2023 г. (очно-дистанционный формат, 504 участника – студенты, аспиранты, молодые ученые вузов Сибирского региона, <http://conf-prfn.org>).

4. Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» 15–18 мая 2023 г. (очный формат, 63 участника – студенты вузов Сибири, <http://conf.math.tsu.ru>).

5. VIII Всероссийской конференции с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения», 3–7 июля 2023 г. (очный формат, 112 участников – российские ученые, <http://conf.nsc.ru/freebound23/ru>).

6. Большая математическая мастерская, 10–22 июля 2023 г. Совместное мероприятие с Международным математическим центром в Академгородке, Тюменским государственным университетом и Адыгейским государственным университетом. Площадка Томского государственного университета (очный формат, 18 участников площадки НОМЦ ТГУ: из них 10 студентов и аспирантов, <https://bmm2023.mca.nsu.ru/>)

7. IX Китайско-Российской конференции по теории узлов и смежным вопросам, 15–19 августа 2023 г. (очно-дистанционный формат, 61 участник – российские и зарубежные ученые, в том числе молодые ученые и аспиранты, <http://math.jlu.edu.cn/info/1556/14842.htm>)

8. Международная конференция «Геометрические и алгебраические методы в теории узлов», 16–20 сентября 2023 г (очно-дистанционный формат, 54 участника – российские и зарубежные ученые, <https://siriusmathcenter.ru/program/030w>)

9. Всероссийская конференция по математике и механике, 2–5 октября 2023 г. (очный формат, 127 участников – российские ученые, аспиранты и студенты, <https://conference.math.tsu.ru/>)

Всего в научных мероприятиях центра приняли участие 419 российских и зарубежных ученых, 560 студентов и 35 аспирантов.

2.2 Сотрудничество с российскими и зарубежными научно-исследовательскими и образовательными организациями

Научные мероприятия центра способствуют развитию научных связей между российскими и зарубежными специалистами в области фундаментальной и прикладной математики, обеспечивая единое научное пространство для обсуждения и решения

актуальных проблем. За отчетный период 419 российских и зарубежных ученых приняли участие в мероприятиях НОМЦ. В том числе, сотрудники институтов РАН, математических центров мирового уровня и региональных научно-образовательных математических центров, а также университетов, на базе которых организованы математические центры:

- Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук»

- Международный математический центр в Академгородке (г. Новосибирск)

- Московский центр фундаментальной и прикладной математики

- Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера

- Красноярский математических центр

- Математический центр «Сириус»

- Адыгейский государственный университет

- Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

- Казанский (Приволжский) федеральный университет

- Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

- Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

- Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

- Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

- Санкт-Петербургский государственный университет

- Сибирский федеральный университет

Многолетнее сотрудничество ведется с учеными из Юго-Восточной Азии: Китая, Японии, Южной Кореи и Индии.

Особое внимание уделяется повышению вовлеченности молодых математиков, аспирантов и студентов в проводимые центром исследования.

В рамках программы развития НОМЦ ТГУ привлекаются ведущие ученые. В центре на должностях главных и ведущих научных сотрудников продолжают свою работу 7 докторов наук.

В работе в центре привлечены молодые иностранные ученые. С 2022 года в НОМЦ ТГУ в должности старшего научного сотрудника центре работает гражданин Вьетнама Вьонг Хыу Бао (защита кандидатской диссертации состоялась в 2022 г.). В должности младшего научного сотрудника с 2020 года работает гражданин Казахстана Д.В. Лещинский (защита кандидаткой диссертации планируется на 2024 г.).

2.3 Образовательные курсы и модули, реализуемые центром

Начиная с 2018 года сотрудниками центра были разработаны и модернизированы 16 учебных курсов и модулей основных образовательных программ (ООП) бакалавриата и магистратуры механико-математического факультета (ММФ) ТГУ с учетом ФГОС 3++. Все курсы реализуются в рамках учебных планов сотрудниками ММФ ТГУ, из них 8 – в отчетный период ведутся непосредственно сотрудниками центра.

2.4 Вовлечение студентов, магистрантов и аспирантов в деятельность центра

В 2023 году проведены две студенческие конференции: Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» и XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Участники — студенты, магистранты и аспиранты высших учебных заведений России.

НОМЦ с привлечением студентов ТГУ выступил одной из четырех площадок в мероприятии «Большая математическая мастерская» 10–22 июля 2023 года. В рамках мастерской, на площадке НОМЦ ТГУ велась работа по четырем проектам, объединивших 18 участников: «Универсальные и сингулярные косы», «Кольца, близкие к хорошим» и «Математическое моделирование движения воздуха и распространения вредных выбросов автотранспорта на примере территории кампуса Томского государственного университета», «Объемы многогранников Погорелова и многочлены Татта для узлов в трехмерном торе». По результатам работы по проектам сданы в печать или готовятся научные статьи.

Традиционным стало участие студентов в качестве слушателей еженедельного научного семинара «Математический коллоквиум» и Городского математического семинара им. Г.Г. Пестова и научных конференций, проводимых центром. Число проведенных мероприятий и принявших в них участие студентов полностью соответствуют запланированным показателям

2.5 Подготовка кадров высшей квалификации в центре

Под научным руководством ведущих научных сотрудников НОМЦ ведется научно-исследовательская работа аспирантов, магистрантов и бакалавров ММФ ТГУ. В 2023 году состоялись защиты 6 выпускных квалификационных работ бакалавра и 7 магистерских диссертаций.

Под руководством ведущего научного сотрудника НОМЦ профессора А.М. Бубенчикова подготовлены две диссертации на соискание степени кандидата физико-

математических наук А.С. Челноковой «Математические модели прохождения некоторых газовых компонент через нанопористые структуры» и С.Г.-Ц. Цыдыповым «Двухфазная фильтрация в деформируемых пластах». Диссертации были заслушаны на расширенных заседаниях структурного подразделения ММФ ТГУ 22 июня и 9 ноября 2023 г. и рекомендованы к защите в диссертационном совете «НИ ТГУ 1.1.01».

Под руководством старшего научного сотрудника НОМЦ Е.А. Данилкина подготовлена диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук младшим научным сотрудником НОМЦ Д.В. Лещинским на тему «Математическое моделирование распространения выбросов автотранспорта на компьютерах с параллельной архитектурой». Диссертация была заслушана на заседании структурного подразделения ММФ ТГУ и рекомендована к защите в диссертационном совете «НИ ТГУ 1.2.01».

2.6 Повышение квалификации исследователей, преподавателей и учителей математики и информатики в рамках образовательных курсов и модулей, реализуемых центром

В 2023 году на базе НОМЦ были реализованы два курса повышения квалификации.

Первый курс «Решение задач машинного обучения и вычислительной математики на Python» прошел в период с 10 января по 1 февраля 2023 г. (72 час.). Курс предназначен для формирования компетенций по решению задач вычислительной математики средствами языка программирования Python и его интегрированной среды разработки; совершенствования навыков численного решения задач в рамках научных интересов преподавателей и научных сотрудников механико-математических специальностей. По результатам курса 25 преподавателей получили удостоверения о повышении квалификации.

Второй курс «Актуальные проблемы механики: Теоретические и прикладные задачи конвективного теплопереноса» (36 час.) направлен на получение слушателями актуальных знаний о существующих задачах конвективного теплопереноса и способах их решения. В период 13–15 декабря 2023 г. курс прослушали 9 студентов и аспирантов ТГУ.

2.7 Вовлечение школьников в мероприятия центра

В 2023 году в соответствии с программой развития центром были проведены 10 мероприятий с привлечением школьников и учителей, в том числе: школьная конференция, математический турнир, две олимпиады для школьников 5-11 классов, круглый стол по решению сложных задач профильного ЕГЭ по математике. На механико-математическом

факультете ТГУ проведен день открытых дверей, приуроченный к празднованию Международного дня числа Пи. В 2023 году продолжила свою работу школа-тренинг по олимпиадной подготовке школьников 8-9 классов по математике, и были проведены 2 цикла занятий по подготовке и разбору олимпиадных заданий Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады Юношеской математической школы. Также сотрудниками НОМЦ были проведены научно-популярные лекции в рамках Математического интенсива совместного с Томским региональным центром развития талантов «Пульсар».

Цель указанных мероприятий — поднять интерес к изучению математики и информатики у школьников, предоставить им площадку для обсуждения задач и расширения познаний в этих областях, повысить уровень олимпиадной подготовки и подготовки к ЕГЭ.

В 2023 году в соответствии с программой развития центром были проведены 11 мероприятий с привлечением школьников и учителей:

1. XVI Турнир «Математические бои» среди школьников г. Томск, 3–5 февраля 2023 г. (турнир проходил в очном формате в несколько этапов, участники: 295 школьников, 42 учителя).

2. Цикл лекций по подготовке к региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по математике, 8–10 февраля 2023 г. (лекции проходили в дистанционном формате, 28 участников – школьников Томской области).

3. Международный день числа Пи, 14 марта 2023 г. (мероприятие проходило в очном формате, 92 участника – школьники 5–11 классов).

4. Второй (очный) тур XXVI Олимпиады Юношеской математической школы для учащихся 4–6 классов, площадка Томского государственного университета, 19 марта 2023 г. (мероприятие проходило в очном формате, 3 участника – школьника 4–6 классов).

5. Тренинг для учащихся 5–6 классов: знакомство с олимпиадной математикой на примере задач олимпиады Юношеской математической школы, 1 апреля 2023 г. (мероприятие проходило в очном формате, 24 участника – школьники 5–6 классов)

6. XXXIV Всероссийская конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», 7 апреля 2023 г. (конференция прошла в очном формате с возможностью дистанционного подключения, 59 участников – 51 школьник, 8 учителей)

7. Интернет форум круглый стол «Решение сложных задач профильного ЕГЭ по математике», 10–31 мая 2023 г. (мероприятие проходило в дистанционном формате, 40 участников – школьников Томской области).

8. V Школьная командная олимпиада «Математическая абака», 12 мая 2023 г. (олимпиада проводилась в дистанционном формате, 754 участника: 604 школьника 5–7 классов, 150 учителей).

9. Олимпиадный тренинг по математике, март–май 2023 г. (занятия проводятся в очном формате, 8 участников – школьники 8–9 классов г. Томска).

10. Цикл лекций «Математический интенсив», 31 октября – 2 ноября 2023 г. (лекции проводились в очном формате, 59 участников – школьников 8–11 классов Томской области).

11. Второй (очный) тур XXVI Олимпиады Юношеской математической школы для учащихся 7–11 классов, площадка Томского государственного университета, 19 марта 2023 г. (мероприятие проходило в очном формате, 13 участников – школьников 7–11 классов).

Всего в образовательных мероприятиях центра приняли участие 1217 школьников и 200 преподавателей и учителей математики и информатики.

Перечень школьников, принявших участие в мероприятиях центра и ставших победителями и призерами Всероссийской олимпиады школьников по математике и информатике или олимпиад РСОШ по математике или информатике 1 и 2 уровня:

1. Ячный Владислав Андреевич, 6 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер олимпиады «Формула Единства»/«Третье тысячелетие» по математике;

2. Зюбин Владислав Сергеевич, 7 класс, МАОУ СОШ №32 г. Томска, призер олимпиады «Высшая проба» по математике, призер Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике, призер олимпиады "Формула Единства"/"Третье тысячелетие" по математике;

3. Лисок Никита Александрович, 8 класс, МАОУ "Лицей № 1 г. Томска им. А.С. Пушкина", победитель Регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера, победитель Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике, призер олимпиады "Формула Единства"/"Третье тысячелетие" по математике;

4. Лисок Артем Александрович, 8 класс, МАОУ "Лицей № 1 г. Томска им. А.С. Пушкина", победитель Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, призер Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике, призер Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике;

5. Ландль Арина Николаевна, 8 класс, МБОУ Академический лицей г. Томска имени Г.А. Псахье, призер Регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера;

6. Васьковский Артём Владимирович, 8 класс, МАОУ Гимназия № 29 г. Томска, призер Регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера;

7. Храпаль Александр Антонови, 8 класс, МАОУ Гимназия № 29 г. Томска, призер Регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера;
8. Копаница Андрей Георгиевич, 8 класс, МАОУ СОШ № 2 г. Томска, призер Регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера;
9. Гахов Артем Борисович, 9 класс, МБОУ Северский лицей, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
10. Козлов Евгений Алексеевич, 9 класс, МАОУ СОШ № 4 г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
11. Александров Илья Александрович, 9 класс, МАОУ СОШ № 7 г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
12. Куцанов Тимофей Максимович, 10 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
13. Атимасов Никита Игоревич, 10 класс, МАОУ Школа "Перспектива" г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
14. Баянова Ксения Андреевна, 10 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
15. Рощупкин Максим Эдуардович, 10 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
16. Осипов Вячеслав Витальевич, 10 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;
17. Воронин Вячеслав Игоревич, 10 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике;
18. Зюбин Константин Сергеевич, 11 класс, МАОУ СОШ №32 г. Томска, победитель Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике, призер олимпиады «Высшая проба» по математике;
19. Русанова Маргарита Игоревна, 11 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, призер турнира имени Ломоносова по математике;
20. Агафонов Артём Александрович, 11 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, победитель Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике;
21. Васильцов Алексей Юрьевич, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

22. Сухорослов Геннадий Валерьевич, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

23. Бородатов Егор Олегович, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, победитель Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике;

24. Классен Иван Андреевич, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

25. Комиссаров Данил Андреевич, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

26. Жарков Николай Иванович, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

27. Цветков Владимир Андреевич, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике;

28. Фокин Степан Дмитриевич, 11 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике;

29. Кузнецова Ульяна Александровна, 11 класс, МБОУ Лицей при ТПУ г. Томска, призер Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике;

30. Корепанов Максим Николаевич, 10 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер турнира имени Ломоносова по математике;

31. Дунаев Артём Андреевич, 10 класс, ОГБОУ Томский физико-технический лицей, призер турнира имени Ломоносова по математике.

2.8 Дополнительная информация о деятельности центра

В период, включающий 2020 г. ТГУ не входил в мировой предметный рейтинг QS по математике. Благодаря работе НОМЦ, по этому рейтингу ТГУ в 2021 г. вошел в группу 401 – 500, в 2022 и 2023 гг. в группу 351 – 400.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все работы, запланированные на отчетный период проекта, успешно выполнены, ожидаемые к концу 2023 года результаты получены.

Результаты прошли апробацию на международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Результаты работы по проекту опубликованы сотрудниками НОМЦ в 28 статьях. В том числе: 10 статей опубликованы в журналах, входящих в первый и второй квартиль (Q1, Q2) базы данных Web of Science, Scopus (работы [А.1, А.4, А.5, А.6, А.8, А.11, А.12, А.14, А.18, А.19]), 15 статей подготовлены с участием молодых исследователей НОМЦ (работы [А.6, А.7, А.8, А.13, А.14, А.15, А.16, А.17, А.18, А.19, А.23, А.25, А.26, А.27, А.28]).

На базе или при сотрудничестве НОМЦ в отчетный период было организовано более 30 научных семинаров. Лекции проходили в рамках, организованного НОМЦ «Математического коллоквиума». Кроме того, в форме открытых лекций проходили пленарные доклады на научных конференциях, организованных НОМЦ.

В рамках научно-образовательной деятельности центра в 2023 году были проведены 9 научных мероприятий, в том числе международные и всероссийские научные конференции, которые стали традиционными.

Также в 2023 году при участии Центра были проведены 11 образовательных мероприятий. Среди них традиционный турнир «Математические бои» среди школьников г. Томска и XXXIV региональная конференция школьников и педагогов «Математическое моделирование задач естествознания», которые проводятся при поддержке Департамента общего образования Томской области.

В указанных мероприятиях Центра приняло участие 1812 обучающихся, 419 российских и зарубежных ученых и 200 преподавателей и учителей математики и информатики.

В 2023 году на базе НОМЦ были реализованы два курса повышения квалификации.

Информация обо всех указанных мероприятиях приведена на сайте НОМЦ: <http://nomc.math.tsu.ru> Все мероприятия центра проводятся в соответствии с программой мероприятий НОМЦ ТГУ.

Отчет о работе НОМЦ в 2023 году был заслушан и одобрен на заседании Ученого совета механико-математического факультета Томского государственного университета 25.01.2024, протокол № 1(57).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Mostow G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces / G.D. Mostow – Annals of mathematics studies, 78, Princeton University Press, 1973.
2. Lobachevsky N. I. Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale / N.I. Lobachevsky – German translation by H. Liebmann, Teubner, Leipzig, 1904.
3. Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // Memorie Reale Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena, III, VIII (Appendice) – 1907. – P. 21–66.
4. Cho Yu. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra / Yu. Cho, H. Kim // Discrete and Computational Geometry. – 1999. – Vol. 22. – P. 347–366.
5. Murakami J. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron / J. Murakami, M. Yano // Communications in Analysis and Geometry. – 2005. – Vol. 13. – P. 379–400.
6. Derevnin D. A. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // Russian Mathematical Surveys. – 2005. – Vol. 60, is. 2. – P. 346–348.
7. Abrosimov N. V. Explicit volume formula for a hyperbolic tetrahedron in terms of edge lengths / N. V. Abrosimov, B. Vuong // Journal of Knot Theory and its Ramifications. – 2021. – Vol. 30, is. 10. – Article number 2140007.
8. Ahlfors L. V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory // American Mathematical Society. – 2010. – Vol. 371.
9. Heikkala V., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M. Generalized elliptic integrals // Computational Methods and Function Theory. – 2009. – V. 9, № 1. – P. 75–109.
10. Nasyrov S., Sugawa T., Vuorinen M. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection // Journal of Mathematical Analysis Applications. – 2023. – V. 524 (2). – Article number: 127092.
11. Floryan J. M. Conformal-Mapping-Based Coordinate Generation Method for Flows in Periodic Configurations // Journal of Computational Physics. – 1986. – Vol. 62. – P. 221–247.
12. Fujimori S., Weber M. Triply periodic minimal surfaces bounded by vertical symmetry planes // Manuscripta Mathematica. – 2009. – Vol. 129. – P. 29–53.
13. Baddoo P. J., Crowdy D. G. Periodic Schwarz-Christoffel mappings with multiple boundaries per period // Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences. – 2019. – Vol. 475 (2228). – P. 1–20.
14. Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 74. – С. 30–42. – DOI: 10.17223/19988621/74/4.

15. Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Мат. заметки.* – 1972. – Т. 11, № 4. – С. 403–408.
16. Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Абелевы группы и модули.* – 1991. – С. 125–134.
17. Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород: 2014. – 73 с.
18. Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring / P. M. Cohn // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* – 1966. – Vol. 30. – P. 5–53.
19. Тимошенко Е. А. Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов / Е. А. Тимошенко, И. В. Третьяков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* – 2022. – № 76. – С. 32–42.
20. Breaz S., Călugăreanu G., Strongly inert subgroups of Abelian groups // *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova.* – 2017. – Vol. 138. – P. 101–114.
21. Chekhlov A. R., Danchev P. V., Goldsmith B. On the generalized Bassian property for Abelian groups // *Acta Mathematica Hungarica.* – 2022. – Vol. 168, Is. 1. – P. 186–201.
22. Chekhlov A. R., Danchev P. V. Weakly fully and characteristically inert socle-regular Abelian p -groups // *Communications in Algebra.* – 2022. – Vol. 50, Is. 11. – P. 4975–4987.
23. Rajkumar M.R. Natural convection with surface radiation from a planar heat generating element mounted freely in a vertical channel/ M.R. Rajkumar, G. Venugopal, S. Anillal // *Heat and Mass Transfer.* –2011. –Vol. 47. – Pp. 789–805.
24. Hotta T.K. Effect of surface radiation heat transfer on the optimal distribution of discrete heat sources under natural convection / T.K. Hotta, P. Muvvala, S.P. Venkateshan // *Heat and Mass Transfer.* –2013. –Vol. 49. – Pp. 207–217.
25. Sawant S.M. Conjugate mixed convection with surface radiation from a vertical electronic board with multiple discrete heat sources / S.M. Sawant, C.G. Rao // *Heat and Mass Transfer.* –2008. –Vol. 44. – Pp. 1485–1495.
26. Wang Zh. Combined heat transfer by natural convection, conduction and surface radiation in an open cavity under constant heat flux heating / Zh. Wang, M. Yang, L. Li, Y. Zhang // *Numerical Heat Transfer. Part A.* –2011. –Vol. 60. – Pp. 289–304.
27. Martyushev S.G. Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in a three-dimensional enclosure with a heat source / S.G. Martyushev, M.A. Sheremet // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 2014. – Vol. 73. – Pp. 340–353.

28. Kogawa T. Influence of radiation effect on turbulent natural convection in cubic cavity at normal temperature atmospheric gas / T. Kogawa, J. Okajima, A. Sakurai, A. Komiya, S. Maruyama // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2017. – Vol. 104. – Pp. 456–466.
29. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: монография: в 2 ч. / Р.И. Нигматулин. – Москва: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.
30. Старченко А.В., Чуруксаева В.В. Численное моделирование двухфазного турбулентного течения смеси «вода–легкие частицы» в речных потоках в приближении мелкой воды // *Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: тезисы докладов VIII Всероссийской конференции с международным участием (3–7 июля 2023 г.)*. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2023. – С. 187–189.
31. Pourahmadi F. Modelling solid-fluid turbulent flows with application to predicting erosive wear / F. Pourahmadi, J.A.C. Humphrey // *Physico-Chemical Hydrodynamics*. – 1983. – Vol. 4, № 3. – P. 191–219.
32. Stelling G.S., Duimijer S.P.A. A staggered conservative scheme for every Froude number in rapidly varied shallow water flows // *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2003. – Vol. 43. – P. 1329–1354.
33. Tarasov A.S., Vershinin D.A. Building a predictive model of ice jam occurrence on the branched site of the tom river // *Tomsk State University Journal*. – 2015. – № 390. – P. 218–224.
34. Cheney M. Electrical Impedance Tomography / M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 1999. – Vol 41, № 1. – P. 85–101.
35. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // *Inverse Problems*. – 2002. – Vol. 18. – P. 99–136.
36. Li J., Yuan Y. Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // *App. Math. Modelling*. – 2009. – Vol. 3, № 5. – P. 2175–2186.
37. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. – Москва : Мир, 1985. – 509 с.
38. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Leshchinskiy D.V. Numerical Simulation of the Distribution of Vehicle Emissions in a Street Canyon // *Mathematical Models and Computer Simulations*. – 2023. – Vol. 15, № 3. – P. 427–435.
39. Henkes R.A.W.M., van der Flugt F.F., Hoogendoorn C. J. Natural Convection Flow in a Square Cavity Calculated with Low-Reynolds-Number Turbulence Models // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1990. – Vol. 34. – P. 1543–1557.

40. Yang H., Chen G., Wang D., Hang D., Li Q., Wang Q. Influences of street aspect ratios and realistic solar heating on convective heat transfer and ventilation in full-scale 2D street canyons // *Building and Environment*. – 2021. – Vol. 204. – 108125.
41. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. / Л. Фукс. – М.: Мир, 1977. – 415 с.
42. Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. – 2011. – № 3(1). – С. 174–177.
43. Vildanov V. K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group / V. K. Vildanov // *J. Math. Sci. (New York)*. – 2014. – Vol. 197, № 5. – P. 590–594.
44. Leptin H. Abelsche p -gruppen und ihre Automorphismengruppen / H. Leptin // *Math. Z.* – 1960. – Vol. 73. – P. 235–253.
45. Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups / W. Liebert // *Abelian Group Theory. Proceedings of the 1985 Oberwolfach Conference*, Gordon and Breach. – 1987. – P. 9–31.
46. Fuchs L. Abelian groups / L. Fuchs. – Cham: Springer, 2015. – 747 p.
47. Вильданов В. К. Об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 ее группой автоморфизмов / В. К. Вильданов, В. А. Гайдак, Е. А. Тимошенко // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2020. – № 68. – С. 23–32.
48. Chekhlov A. R., Danchev P. V. Weakly fully and characteristically inert socle-regular Abelian p -groups // *Communications in Algebra*. – 2022. – Vol. 50, Is. 11. – P. 4975–4987.
49. Chunbo Zhou, Heguo Liu The structure of an Abelian Groups whose Endomorphism Ring is a Solvable Lie Ring // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2023. – Vol. 271. – P. 583–593.
50. Stäckel P. Geometrische Untersuchungen von Wolfgang Bolyai und Johann Bolyai, I.–II. / P. Stäckel – B.G. Teubner, Leipzig, 1913.
51. Alekseevskii D. V. Geometry of spaces of constant curvature / D. V. Alekseevskii, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov – *Geometry II: Spaces of Constant Curvature*, Encyclopedia of Mathematical Sciences Vol. 29, Springer, 1993.
52. Lannér F. On complexes with transitive groups of automorphisms / F. Lannér – *Comm. Sem. Math. Univ. Lund*, 1950.
53. ANSYS Fluent User's Guide, Release 15.0 // Canonsburg. – 2013. – URL:<http://www.pmt.usp.br/academic/martoran/notasmodelosgrad/ANSYS%20Fluent%20Users%20Guide.pdf>. (дата обращения 01.11.2023).

54. Vuong B. Fundamental group and twisted Alexander polynomial of knots in 3-torus – URL: <https://arxiv.org/abs/2302.10461> (дата обращения 29.12.2023).
55. Milnor J. A duality theorem for Reidemeister torsion // *Ann. of Math.* – 1962 – Vol. 76, Is. 2. – P. 547–560.
56. Seifert H. Uber das Geschlecht von Knoten // *Math. Ann.* – 1934 – Vol. 110. – P. 571–592.
57. Huynh V. Q., Le T. T. Q. Twisted Alexander polynomial of links in the projective space // *J. Knot Theory Ramifications.* – 2008 – Vol. 17. – P. 411–438.
58. Cattabriga A., Manfredi E., Mulazzani M. On knots and links in lens spaces // *Topology Appl.* – 2013 – Vol. 160. – P. 430–442.
59. Fox R. H. A quick trip through knot theory. *Topology of 3-manifolds*, MK, Fort Jr editor – Prentice-Hall – 1962.
60. Wada M. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology.* – 1994 – Vol. 33, Is. 2. – P. 241–256.
61. Horvat E., Boštjan Gabrovšek. (2019) The Alexander polynomial of links in lens spaces // *J. Knot Theory Ramifications.* – 2019 – Vol. 28, Is. 8. – article number1950049.
62. Turaev V. *Torsion of 3-dimensional manifolds* – Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin – 2002.
63. Turaev V. *Introduction to combinatorial torsions. Lectures in Mathematics ETH Zurich* – Birkhauser Verlag, Basel, Notes taken by Felix Schlenk – 2001.
64. Milnor J. Whitehead torsion // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1966 – Vol. 72. – P. 358–426.
65. Whitehead J. H. C. Simple homotopy types // *Amer. J. Math.* – 1950 – Vol. 72. – P. 1–57.
66. Bardakov V. G., Simonov A. A Rings and groups of matrices with a nonstandard product // *Siberian Mathematical Journal.* – 2013. – Vol. 54, № 3. – P. 393–405.
67. Mathews R.N. Numerical simulation of conjugate, turbulent mixed convection heat transfer in a vertical channel with discrete heat sources / R.N. Mathews, C. Balaji // *International Communications in Heat and Mass Transfer.* – 2006. – Vol. 33. – P. 908–916.
68. Zhang W. Conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time-periodic sidewall temperature and inclination / W. Zhang, C. Zhang, G. Xi // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* – 2011. – Vol. 32. – P. 52–64.
69. Manz H. Numerical simulation of heat transfer by natural convection in cavities of facade elements // *Energy and Buildings.* – 2003. – Vol. 35. – P. 305–311.
70. Saha S. C. Unsteady natural convection in a triangular enclosure under isothermal heating // *Energy and Buildings.* – 2011. – Vol. 43. – P. 695–703.

71. Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution// *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1983. – Vol. 3. – P. 249–264.
72. Wang H. Numerical study of natural convection-surface radiation coupling in air-filled square cavities / H. Wang, S. Xin, P. Le Quere // *C.R. Mecanique*. – 2006. – Vol. 334. – P. 48–57.
73. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*. – 1958. – Vol. 6. – P. 83–142.
74. Shapiro J. Morita contexts / Shapiro J., Loustaunau P. // *Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics*. – 1990. – Vol. 1448. – P. 80 – 92.
75. Climent J.J. On arithmetic of endomorphism ring / Climent J.J., Navarro P.R., Tortosa L. // *Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.* – 2011. – Vol. 22. – P. 91–108.
76. Climent J.J. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ / Climent J.J., Navarro P.R., Tortosa L. // *Int. J. Comp. Math.* – 2012. – Vol. 89. – P. 1753–1763.
77. Climent J.J. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements/ Climent J.J., Navarro P.R., Tortosa L. // *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. – 2014. – Vol. 25. – P. 347–361.
78. Climent J.J., Ramos J.A.L. Public key protocol over the ring $\text{Ep}(m)$ // *Adv. Math. Commun.* – 2016. – Vol. 10. – P. 861–870.
79. Long, Dan Thu, Nguyen A Bergman Ring Based Cryptosystem Analogue of RSA. // *International Conference on IT Convergence and Security, ICITCS*. – 2013. – P. 1–4.
80. Farida, Irawati On the arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ and its RSA variants // *South East Asian J of Mathematics and Mathematical Sciences*. – 2023. – Vol. 19. – P. 53–64.
81. Крылов П. А. Определители обобщённых матриц порядка 2 // *Фундам. и прикл. математика*. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 95–112.
82. Gol'dstein V. Applications of change of variables operators for exact embedding theorems / V. Gol'dshtein, L. Gurov // *Integral Equ. Oper. Theory* – 1994. – Vol. 19. – P. 1–24.
83. Kufner A. *Weighted Sobolev spaces* / Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik. – 1980.
84. Gol'dstein V. *Weighted Sobolev spaces and embedding theorems* / V. Gol'dshtein, A. Ukhlov // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 2009. – Vol. 361. – P. 3829-3850.
85. Ukhlov A. On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces // *Siberian Math. J.* – 1993. – Vol. 34. – P. 185–192.

86. Garain P. On (p,q) -eigenvalues of the weighted p -Laplace operator in outward Hölder cuspidal domains / P. Garain, V. Pchelintsev, A. Ukhlov. URL: <https://arxiv.org/pdf/2311.08895.pdf> (дата обращения 23.12.2023).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

Публикации

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus или входящих в перечень ВАК:

A.1. Abrosimov N. V., Stepanishchev S. V. The volume of a trirectangular hyperbolic tetrahedron // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2023. – Vol. 20, Is. 1. – P. 275–284. – DOI: 10.33048/semi.2023.20.022 (журнал входит в Scopus Q2).

A.2. Bardakov V. G., Talalaev D. V. Extensions of Yang–Baxter sets // Theoretical and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 215, Is. 2. – P. 609–621. – DOI: 10.1134/S0040577923050021 (журнал входит в Scopus Q3).

A.3. Bardakov V. G., Gubarev V. Rota-Baxter operators on groups // Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 133, № 1. – Article number: 4. – DOI: 10.1007/s12044-023-00723-9 (журнал входит в Scopus Q3).

A.4. Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K. Symmetric skew braces and brace system // Forum Mathematicum. – 2023. – Vol. 35, № 3. – P. 713–738. – DOI: 10.1515/forum-2022-0134 (журнал входит в Scopus Q1).

A.5. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Математический сборник – 2023. – Т. 214, № 2. – С. 3–22. – DOI: 10.4213/sm9740 (журнал входит в Scopus Q2).

A.6. Kolesnikov I. A. Interior modulus of polygonal quadrilateral // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, № 4. – P. 1358–1364. – DOI: 10.1134/S1995080223040145 (журнал входит в Scopus Q2).

A.7. Норбосамбуев Ц. Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 85. – С. 32–42. – DOI: 10.17223/19988621/85/3 (журнал входит в Scopus Q3).

A.8. Зонов М. Н., Тимошенко Е. А. Е-кольца и факторно делимые абелевы группы // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 6. – С. 1172–1185. – DOI: 10.1134/S003744662306006X (журнал входит в Scopus Q2).

A.9. Тимошенко Е. А., Третьяков И. В. Инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга // Вестник Томского государственного

университета. Математика и механика. – 2023. – № 86. – С. 167–175. – DOI: 10.17223/19988621/86/13 (журнал входит в Scopus Q3).

A.10. Chekhlov A. R. Fully inert subgroups of completely decomposable groups with homogeneous components of finite rank // *Russian Mathematics*. – 2022. – Vol. 66, № 12. – P. 82–90. – DOI: 10.3103/S1066369X22120015 (журнал входит в Scopus Q3).

A.11. Chekhlov A. R., Danchev P. V. On the socles of strongly inert subgroups of Abelian p -groups // *Siberian Mathematical Journal*. – 2023. – Vol. 64, Is. 2. – P. 459–468. – DOI: 10.1134/S0037446623020179 (журнал входит в Scopus Q2).

A.12. Chekhlov A. R., Danchev P. V. On Abelian groups having isomorphic proper characteristic subgroups // *Journal of Commutative Algebra*. – 2023. – Vol. 15, № 4. – P. 481–496. – DOI: 10.1216/jca.2023.15.481 (журнал входит в Scopus Q2).

A.13. Agafontsev M. V., Loboda E. L., Reyno V. V. The influence of acoustic waves on the methane combustion process // *Proceedings of SPIE – 29th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. – 2023. – Vol. 12780. – Article number: 1278019-1. – DOI: 10.1117/12.2690800.

A.14. Borodin V. I., Bubenchikov A. M., Bubenchikov M. A., Chelnokova A. S., Mamontov D. V. Movement of C_{100} fullerene in a closed carbon nanocontainer // *Computational Particle Mechanics*. – 2023. – Vol. 10. – P. 1161–1170. – DOI: 10.1007/s40571-023-00552-7 (журнал входит в Scopus Q1).

A.15. Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M., Mamontov D. V., Azheev S. A., Azheev A. A. The effect of a short magnetic pulse on the molecular structure of $C_{59}Fe$. // *Russian Physics Journal*. – 2023. – Vol. 66, № 5. – P. 560–566. DOI: 10.1007/s11182-023-02975-4 (журнал входит в Scopus Q3).

A.16. Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M., Azheev S. A., Azheev A. A., Tsyrenov D. G. Coaxial interaction of a rigid ring with an elastic cylinder // *Russian Physics Journal*. – 2023. – Vol. 66, № 5. – P. 533–540. – DOI: 10.1007/s11182-023-02972-7 (журнал входит в Scopus Q3).

A.17. Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M., Mamontov D. V. Regimes of angular dynamics and spin formation of the $C_{59}Fe$ molecule // *Russian Physics Journal*. – 2023. – Vol. 66, № 7ю – P. 800–809. – DOI: 10.1007/s11182-023-03008-w (Q3) (журнал входит в Scopus Q3).

A.18. Miroshnichenko I. V., Sheremet M. A. Turbulent free convection and thermal radiation in an air-filled cabinet with partition on the bottomwall // *Axioms*. – 2023. – Vol. 12. – Article number: 213. – DOI: 10.3390/axioms12020213 (журнал входит в Web of Science Q2).

A.19. Miroshnichenko I. V. Computational heat transfer and fluid dynamics // *Axioms*. – 2023. – Vol. 12. – Article number: 769. – DOI: 10.3390/axioms12080769 (журнал входит в Web of Science Q2).

А.20. Афанасьева А. А., Старченко А. В. Численное исследование влияния изменения электрической проводимости на решение прямой задачи электроимпедансной томографии // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. – Т. 26, № 3. – С. 76–88. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.6 (журнал входит в перечень ВАК, К1).

А.21. Churuksaeva V. V., Starchenko A. V. Numerical simulation of unsteady turbulent river flow // Proceedings of SPIE – 29th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. – 2023. – Vol. 12780. – Article number: 127801G. – DOI: 10.1117/12.2691019.

А.22. Del I. V., Starchenko A. V. Prediction of atmospheric air pollution by PM2.5 particles based on artificial neural networks // Proceedings of SPIE – 29th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. – 2023. – Vol. 12780. – Article number: 127805I. – DOI: 10.1117/12.2690388.

А.23. Данилкин Е. А., Лещинский Д. В., Старченко А. В. Микромасштабная математическая модель неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 85. – С. 117–131. – DOI: 10.17223/19988621/85/9 (журнал входит в Scopus Q3).

А.24. Дель И. В., Старченко А. В. Использование методов нейросетевого моделирования для прогнозирования качества атмосферного воздуха // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 65. – С. 15–24. – DOI: 10.17223/19988605/65/2 (журнал входит в перечень ВАК, Q4).

Статьи по проекту, опубликованные в журналах, индексируемых РИНЦ и/или сборниках материалов конференций:

А.25. Колесников И. А. Конформный модуль четырехугольника // XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. – Казань : КФУ, 2023. – Т. 66. – С. 129–130.

А.26. Челнокова А. С., Бубенчиков А. М. Неравновесное состояние фуллера в двухкомпонентной смеси газов // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, 2–5 октября 2023 г., г. Томск : сборник материалов конференции. – Томск : ООО "СТТ". – 2023. – С. 253–255.

А.27. Старченко А. В., Данилкин Е. А., Лещинский Д. В. Численное моделирование влияния солнечного излучения на перенос примеси в уличном каньоне // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, 2–5 октября 2023 г., г. Томск : сборник материалов конференции. – Томск : ООО "СТТ". – 2023. – С. 144–146.

А.28. Старченко А. В., Данилкин Е. А., Лещинский Д. В. Построение параллельного алгоритма для микромасштабной модели турбулентного течения в уличных каньонах // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, 2–5 октября 2023 г., г. Томск : сборник материалов конференции. – Томск : ООО "СТТ". – 2023. – С. 111–113.