

Томский государственный университет
Научно-образовательный математический центр
Большая математическая мастерская

проект

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ В КОЛЬЦАХ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД
КОЛЬЦАМИ ВЫЧЕТОВ

Заказчик: Тимошенко Е.А.

Куратор: Норбосамбуев Ц.Д.

Участники: Елфимова А.М., Зыков А.Е.

Томск 2024

Содержание

1	Введение	2
2	Факторкольцо $K/Nil(K)$	4
3	k -ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов	4
4	Сопряжение идемпотентов в K	6
5	Неразложимость идемпотентных матриц в K	11
6	Полные ортогональные системы идемпотентов в K и разложения K	12
	Список источников	16

1 Введение

Далее считаем все кольца ассоциативными с единицей, $U(R)$, $Nil(R)$, $Idem(R)$ — группа обратимых элементов, множество всех нильпотентов и идемпотентов кольца R соответственно, $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы A , $\mathbb{Z}$ — кольцо (и группа) целых чисел, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ — кольцо (и группа) вычетов по модулю p^n .

Напомним о строении интересующих нас колец формальных матриц.

Кольцо $K = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, где p — простое число и $m > n > 0$, пред-

ставляет собой наглядный и просто устроенный пример кольца формальных матриц [1]. Всюду далее под K будем понимать именно такое кольцо формальных матриц.

Теорема 1.1 (Крылов, Туганбаев[1]). Имеет место изоморфизм колец K и $E(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Действительно, всякую матрицу $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$ можем

отождествить с эндоморфизмом θ группы $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ таким, что

$$\theta(z_1 + p^m\mathbb{Z}, z_2 + p^n\mathbb{Z}) = (az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m\mathbb{Z}, cz_1 + dz_2 + p^n\mathbb{Z}).$$

Пусть $A' = \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & d' + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$. Операция умножения на K зада-

ется следующим правилом:

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & d' + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbb{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbb{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbb{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 1.2 (Степанова, Тимошенко[4]). Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & d + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$$

обратима тогда и только тогда, когда числа a и d не делятся на p . Если A обратима, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (a + p^m \mathbb{Z})^{-1}(1 + p^{m-n}bcF + p^m \mathbb{Z}) & -bF + p^n \mathbb{Z} \\ -cF + p^n \mathbb{Z} & aF + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

где $F + p^n \mathbb{Z} = (ad - p^{m-n}bc + p^n \mathbb{Z})^{-1}$.

Замечание 1.3. Для кольца K , где $m > n > 0$, верны равенства $|K| = p^{m+3n}$ и $|U(K)| = p^{m+3n-2}(p-1)^2$. Легко видеть, что с ростом числа p в кольце K соотношение количества обратимых элементов к количеству необратимых растет значительно.

Следующие теоремы дают необходимые и достаточные условия нильпотентности и идеспотентности формальных матриц в K .

Теорема 1.4 (Елфимова, Норбосамбуев, Подкорытов. 2023). Пусть $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & d + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$ ($m > n > 0$). Матрица A нильпотентна тогда и только тогда, когда числа a и d кратны p .

Теорема 1.5 (Елфимова, Норбосамбуев, Подкорытов. 2023). Пусть $b, c \in \mathbb{Z}$ и $m > n > 0$. Матрица A — нетривиальный идемпотент кольца K тогда и только тогда, когда

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbb{Z}, t = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor, \sigma_t = \sum_{k=1}^t C_k (p^{m-n}bc)^k, C_k$ — числа Каталана.

Следствие 1.6. $Nil(K)$ — (двусторонний) идеал в кольце K .

Замечание 1.7. Если $A \in Idem(K)$, то $|A| = 0 + p^n\mathbb{Z}$. Более того, если A — q -потент, т.е. $A^q = A$ для какого-то $q \in \mathbb{N}$, то $|A| = 0 + p^n\mathbb{Z}$. Мощность множества $Idem(K)$ равна $2p^{2n}$.

Замечание 1.8. Если $m - n > n$, то, общий вид нетривиальной идемпотентной матрицы $A \in K$ заметно упрощается:

$$A = \begin{pmatrix} p^{m-n}bc + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} 1 - p^{m-n}bc + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbb{Z}$.

2 Факторкольцо $K/Nil(K)$

Поскольку, как отмечалось выше, $Nil(K)$ образует идеал в кольце K (что не характерно, так как K — некоммутативное кольцо), то имеет смысл рассмотреть факторкольцо $K/Nil(K)$.

Предложение 2.1 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Факторкольцо $K/Nil(K) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Действительно, произвольную матрицу $A \in K$ можем записать в виде $A = \begin{pmatrix} (a + px) + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & (d + py) + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{Z}$, причем $0 \leq a \leq p-1$ и $0 \leq d \leq p-1$. Тогда при рассмотрении смежного класса $A + Nil(K)$ значения имеют только a и d .

3 k -ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов

Напомним несколько определений:

Определение 3.1. а) Элемент кольца называется **чистым**, если он представим в виде суммы идемпотента и обратимого элемента.

б) Кольцо называется **чистым**, если все его элементы являются чистыми.

Определение 3.2. а) Элемент кольца называется **ниль-чистым** (**сильно ниль-чистым**), если он представим в виде суммы идемпотента и нильпотента (соответственно суммы коммутирующих между собой идемпотента и нильпотента).

б) Кольцо называется **ниль-чистым** (**сильно ниль-чистым**), если все его элементы являются ниль-чистыми (соответственно сильно ниль-чистыми).

Замечание 3.3. Всякое ниль-чистое кольцо является чистым. Обратное, вообще говоря, неверно: кольцо $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ является чистым, но не ниль-чистым.

Определение 3.4. Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$.

а) Элемент кольца называется **k -ниль-чистым**, если он представим в виде суммы нильпотента и k идемпотентов.

б) Кольцо называется **k -ниль-чистым**, если все его элементы являются k -ниль-чистыми.

Подробнее об этих свойствах (и аналогичных им) можно прочитать, например, в литературе, упоминаемой в [3].

Ранее нами были получены следующие факты.

Следствие 3.5. Кольцо K — $(p - 1)$ -ниль-чистое.

Следствие 3.6. Если $p > 2$, $m > n > 0$, то K — не ниль-чистое кольцо.

То есть, в K (при $p > 2$) найдутся матрицы, которые невозможно представить в виде суммы нильпотентной и идемпотентной матриц из K . Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 + 9\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \\ 0 + 3\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ в кольце $K = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ будет такой.

Нам удалось обобщить этот результат.

Следствие 3.7 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $l < (p - 1)$. K не является l -ниль-чистым кольцом.

Доказательство. Повторяет по сути доказательство следствия 3.6. $\square$

4 Сопряжение идемпотентов в K

Определение 4.1. Элементы g_1 и g_2 группы G называются сопряжёнными, если существует элемент $h \in G$, для которого $h \cdot g_1 \cdot h^{-1} = g_2$.

Упражнение 4.2. Пусть R — кольцо, $e_1 \in Idem(R)$, $u \in U(R)$. Легко видеть, что $e_2 = u \cdot e_1 \cdot u^{-1} \in Idem(R)$.

Определение 4.3. Идемпотенты e_1 и e_2 из предыдущего упражнения называются **сопряженными**.

Упражнение 4.4. Не существует обратимой матрицы $U \in U(K)$ такой, что

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 1 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.5. Не существует обратимой матрицы $U \in U(K)$ такой, что

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma'_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b' + p^n \mathbb{Z} \\ c' + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma'_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.6 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Для всякой идемпотентной матрицы $A \in K$ найдется обратимая матрица $U \in K$, что

$$U \cdot A \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ либо } U \cdot A \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 1 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Вообще говоря, «идемпотентная матрица с обратимым элементом на «верхнем-левом» месте» сопрягается в матрицу

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}. \text{ А «идемпотентная матрица с обратимым}$$

$$\text{элементом на «нижнем-правом» месте» — в } E_{22} = \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbb{Z} & 0 + p^n \mathbb{Z} \\ 0 + p^n \mathbb{Z} & 1 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \in Idem(K)$. Тогда для неё верны следующие соотношения:

$$\begin{cases} (1 - \sigma_{t+1})^2 + p^{m-n}bc + p^m \mathbb{Z} = 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} \\ (1 - \sigma_t)^2 + p^{m-n}bc + p^n \mathbb{Z} = \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \\ (1 - \sigma_{t+1})b + b\sigma_t + p^n \mathbb{Z} = b + p^n \mathbb{Z} \\ (1 - \sigma_{t+1})c + c\sigma_t + p^n \mathbb{Z} = c + p^n \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

Откуда следует, что:

$$\begin{cases} (1 - \sigma_{t+1})\sigma_{t+1}p^m \mathbb{Z} = p^{m-n}bc + p^m \mathbb{Z} \\ (1 - \sigma_t)\sigma_t + p^n \mathbb{Z} = p^{m-n}bc + p^n \mathbb{Z} \\ b(\sigma_t - \sigma_{t+1}) + p^n \mathbb{Z} = 0 + p^n \mathbb{Z} \\ c(\sigma_t - \sigma_{t+1}) + p^n \mathbb{Z} = 0 + p^n \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbb{Z} & b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n \mathbb{Z} \\ -c + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & -b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & 1 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Покажем сначала, что

$$U\hat{U} = E$$

$$U\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbb{Z} & b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n \mathbb{Z} \\ -c + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & -b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & 1 + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} & -b(1 - \sigma_t)^{-1} + b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ -c(1 - \sigma_{t+1})^{-1} + c(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Докажем следующее равенство:

$$\sigma_{t+1} - p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} = 0 + p^m\mathbb{Z}. \quad (5)$$

Допустим, что

$$\sigma_{t+1} - p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} = x + p^m\mathbb{Z}. \quad (6)$$

Умножая правую и левую часть этого выражения на $1 - \sigma_t$, получим:

$$\sigma_{t+1}(1 - \sigma_t) - p^{m-n}bc + p^m\mathbb{Z} = x(1 - \sigma_t) + p^m\mathbb{Z}.$$

Далее, подставляя сюда выражение для $p^{m-n}bc$ из первого уравнения системы (2), получим:

$$\sigma_{t+1}(1 - \sigma_t) - \sigma_{t+1}(1 - \sigma_{t+1}) + p^m\mathbb{Z} = x(1 - \sigma_t) + p^m\mathbb{Z},$$

$$\sigma_{t+1}(\sigma_{t+1} - \sigma_t) = x(1 - \sigma_t) + p^m\mathbb{Z},$$

$$\sigma_{t+1}C_{t+1}(p^{m-n}bc)^{t+1} = x(1 - \sigma_t) + p^m\mathbb{Z}.$$

Так как слагаемые левой части имеют вхождение p^{m-n} хотя бы в $(m-n)(t+2)$ степени, которая точно не меньше m , то левая часть будет равна 0 и

$$0 + p^m\mathbb{Z} = x(1 - \sigma_t) + p^m\mathbb{Z}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$x + p^m\mathbb{Z} = 0 + p^m\mathbb{Z}.$$

Подставив этот x в уравнение (6) получим равенство (5).

Аналогично можно показать, что

$$\sigma_t - p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} = 0 + p^n\mathbb{Z}.$$

Таким образом, действительно

$$U\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & 1 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = E$$

Поскольку по теореме 1.2 матрица U обратима, то существует матрица U^{-1} такая, что $U^{-1} \cdot U = E = U \cdot U^{-1}$. Тогда $U^{-1} = U^{-1} \cdot (U \cdot \hat{U}) = (U^{-1} \cdot U) \cdot \hat{U} = \hat{U}$.

Далее рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} UA &= \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ -c + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & \sigma_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^{m-n}bc(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} & b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ -c(1 - \sigma_{t+1}) + c(1 - \sigma_t) + p^n\mathbb{Z} & (1 - \sigma_t)\sigma_t - p^{m-n}bc + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ c(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + p^n\mathbb{Z} & 0c + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

Умножим теперь получившуюся матрицу на U^{-1} справа:

$$\begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & -b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^{m-n}bc(1 + \sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1}) + p^m\mathbb{Z} & b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} - b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} 1 - \sigma_{t+1} + p^{m-n}bc(1 + \sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1}) + p^m\mathbb{Z} &= 1 - \sigma_{t+1} + \sigma_{t+1}(1 - \sigma_{t+1}) + (1 - \\ \sigma_{t+1})\sigma_{t+1}\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} &= 1 - \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}\sigma_t(1 - \sigma_{t+1})(1 - \sigma_t)^{-1} + p^m\mathbb{Z} = \\ 1 - \sigma_{t+1}(1 - \sigma_t)^{-1}(\sigma_{t+1}(1 - \sigma_t) - \sigma_t(1 - \sigma_{t+1})) + p^m\mathbb{Z} &= 1 - \sigma_{t+1}(1 - \sigma_t)^{-1}(\sigma_{t+1} - \\ \sigma_{t+1}\sigma_t - \sigma_t + \sigma_{t+1}\sigma_t) + p^m\mathbb{Z} &= 1 - (1 - \sigma_t)^{-1}\sigma_{t+1}C_{t+1}(p^{m-n}bc)^{t+1} + p^m\mathbb{Z} = 1 + p^m\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где последнее равенство верно в силу рассуждений перед равенством (7). (Напомним, из них следовало, что $\sigma_{t+1}C_{t+1}(p^{m-n}bc)^{t+1} + p^m\mathbb{Z} = 0 + p^m\mathbb{Z}$.)

Наконец, $b + b\sigma_t(1 - \sigma_t)^{-1} - b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} = b(1 - \sigma_t)^{-1}(1 - \sigma_t + \sigma_t - 1) + p^n\mathbb{Z} = 0 + p^n\mathbb{Z}$.

Таким образом, мы показали, что

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = E_{11}.$$

Аналогично можно показать, что для идемпотентной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

и матриц

$$V = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z} & -b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & b(1 - \sigma_t)^{-1} + p^n\mathbb{Z} \\ -c + p^n\mathbb{Z} & 1 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

выполнены равенства $\hat{V} = V^{-1}$ и $VBV^{-1} = E_{22}$. Что и требовалось доказать.

□

Замечание 4.7. Такая обратимая матрица U не единственна (см. приложения).

Следствие 4.8. Для любых сопряженных (нетривиальных) идемпотентных матриц $I_1, I_2 \in K$ найдется $W \in U(K)$ такая, что $I_1 = W \cdot I_2 \cdot W^{-1}$.

Следствие 4.9. Множество $Idem(K)$ распадается на два класса относительно сопряжения

$$\overline{E_{11}} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in Idem(K) | UAU^{-1} = E_{11}\},$$

$$\overline{E_{22}} \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in Idem(K) | VBV^{-1} = E_{22}\}.$$

5 Неразложимость идемпотентных матриц в K

Определение 5.1. Идемпотент e называется **неразложимым**, если из того, что $e = f + g$, где f и g ортогональные идемпотенты, следует $f = 0$ или $g = 0$. Идемпотенты f и g называются **ортогональными**, если $fg = 0 = gf$.

Теорема 5.2 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Нетривиальные идемпотенты в K неразложимы.

Доказательство. Действительно, пусть $A \in K$ — разложимый идемпотент. Тогда $A = I_1 + I_2$, где I_1, I_2 — ортогональные идемпотенты. Тогда по теореме 1.5 возможен один из случаев. Рассмотрим их:

$$1) A = I_1 + I_2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}bc)^k + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}bc)^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что сумма неспоряженных идемпотентных матриц дает обратимую матрицу. Таким образом, в случае 1) нетривиальный идемпотент получить невозможно.

$$2) A = I_1 + I_2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}bc)^k + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}bc)^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & 1 - \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

На нижнем правом месте в матрице-сумме получаем элемент вида $2 - xp + p^n\mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$. По теореме 1.5, на этом месте должен стоять элемент вида $1 - yp + p^n\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$. При $p > 1$, очевидно, $2 - xp$ и $1 - yp$ по модулю p^n несравнимы $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

3) $A = I_1 + I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}bc)^k + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}bc)^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} +$
 $\begin{pmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{t+1} C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & \sum_{k=1}^t C_k(p^{m-n}b'c')^k + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. Этот случай аналогичен предыдущему. □

6 Полные ортогональные системы идемпотентов в K и разложения K

Определение 6.1. Система идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ кольца R называется **полной ортогональной системой неразложимых идемпотентов**, если

- 1) $e_1, \dots, e_n$ — неразложимые идемпотенты;
- 2) $e_1, \dots, e_n$ попарно ортогональны;
- 3) $e_1 + \dots + e_n = 1$.

Если еще все $e_1, \dots, e_n$ — центральные, то получаем **полную ортогональную систему неразложимых центральных идемпотентов** [8].

Теорема 6.2 (Ламбек [8]). Следующие условия эквивалентны:

1. Кольцо R изоморфно прямому произведению колец R_i , ($i = 1, \dots, n$).
2. В R есть полная ортогональная система центральных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ и $e_i R \cong R_i$.
3. Кольцо R является конечной прямой суммой идеалов $K_i \cong R_i$.

Теорема 6.3 (Фукс [9], Kaplansky, Charles). Центр кольца эндоморфизмов $E(A)$ любой p -группы A состоит из умножений на целые p -адические числа или вычеты по модулю p^k в зависимости от того, является группа A неограниченной или p^k служит наименьшей верхней гранью порядков ее элементов.

Следствие 6.4. Центральными идемпотентами в K будут только тривиальные — 0 и E .

Комбинируя 6.4 и 6.2, получаем

Следствие 6.5. Кольцо формальных матриц K неразложимо в прямую сумму идеалов.

Рассмотрим K как левый (правый) модуль над собой — ${}_K K$ (K_K).

Теорема 6.6 (Ламбек [8]). Пусть $e_1, \dots, e_n$ — полная ортогональная система неразложимых идемпотентов кольца R . Тогда существуют прямые разложения модулей $R_R = e_1 R \times \dots \times e_n R$ и ${}_R R = R e_1 \times \dots \times R e_n$, где все $e_i R$ и $R e_i$ — неразложимые модули. Верно и обратное.

Возможно удастся разложить ${}_K K$ (K_K) в прямую сумму своих левых (правых) подмодулей? Для этого нужно получить описание его полных ортогональных систем неразложимых идемпотентов.

Теорема 6.7 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Полные ортогональные системы идемпотентов в K состоят ровно из двух элементов и имеют вид $\{A, E - A\}$, где A — идемпотент.

Доказательство. Очевидно, если $A \in \text{Idem}(K)$, то $\{A, E - A\}$ — полная ортогональная система из двух идемпотентов. Покажем, почему такую систему нельзя составить из трех или более элементов. Легко видеть, что во множестве из трех идемпотентов кольца K обязательно хотя бы два будут сопряженными. Рассмотрим произведение сопряженных идемпотентных матриц.

$$I_1 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b + p^n \mathbb{Z} \\ c + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma'_{t+1} + p^m \mathbb{Z} & b' + p^n \mathbb{Z} \\ c' + p^n \mathbb{Z} & 1 - \sigma'_t + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t+1} \sigma'_{t+1} + p^{m-n} b c' + p^m \mathbb{Z} & \sigma'_{t+1} b + b(1 - \sigma'_t) + p^n \mathbb{Z} \\ c \sigma'_{t+1} + (1 - \sigma_t) c' + p^n \mathbb{Z} & p^{m-n} b' c + (1 - \sigma_t)(1 - \sigma'_t) + p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (9)$$

На нижнем правом месте в произведении получили элемент $p^{m-n}b'c + (1 - \sigma_t)(1 - \sigma'_t) + p^n\mathbb{Z} = 1 - \sigma'_t - \sigma_t + \sigma_t \cdot \sigma'_t + p^{m-n}b'c + p^n\mathbb{Z}$ не равный $0 + p^n\mathbb{Z}$.

В случае $\begin{pmatrix} 1 - \sigma_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & \sigma_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sigma'_{t+1} + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & \sigma'_t + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ тоже получается ненулевая матрица.

Таким образом, система с двумя (или более) сопряженными идемпотентами никогда не будет ортогональной. Следовательно полные ортогональные системы идемпотентов в K состоят ровно из двух «несопряженных» элементов. $\square$

Следствие 6.8. Из предыдущей теоремы вытекает, что для любой идемпотентной матрицы $A \in K$ имеют место разложения модулей

$$K_K = AK_K \oplus (E - A)K_K, \quad {}_K K = {}_K K A \oplus {}_K K (E - A).$$

Пример 6.9. Пусть $K = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 + 9\mathbb{Z} & 2 + 3\mathbb{Z} \\ 2 + 3\mathbb{Z} & 1 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, $E - A = \begin{pmatrix} 7 + 9\mathbb{Z} & 1 + 3\mathbb{Z} \\ 1 + 3\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. $A^2 = A$, следовательно $\{A, E - A\}$ — полная ортогональная система неразложимых идемпотентов кольца K . Тогда

$$\begin{aligned} AK_K &= \left\{ \begin{pmatrix} 3 + 9\mathbb{Z} & 2 + 3\mathbb{Z} \\ 2 + 3\mathbb{Z} & 1 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + 9\mathbb{Z} & b + 3\mathbb{Z} \\ c + 3\mathbb{Z} & d + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}_K = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 6c + 9\mathbb{Z} & 2d + 3\mathbb{Z} \\ 2a + c + 3\mathbb{Z} & d + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}_K, \\ (E - A)K_K &= \left\{ \begin{pmatrix} 7 + 9\mathbb{Z} & 1 + 3\mathbb{Z} \\ 1 + 3\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + 9\mathbb{Z} & b + 3\mathbb{Z} \\ c + 3\mathbb{Z} & d + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}_K = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 7a + 3c + 9\mathbb{Z} & b + d + 3\mathbb{Z} \\ a + 3\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}_K. \end{aligned}$$

Итак,

$$K_K = \begin{pmatrix} 3a + 6c + 9\mathbb{Z} & 2d + 3\mathbb{Z} \\ 2a + c + 3\mathbb{Z} & d + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}_K \oplus \begin{pmatrix} 7a + 3c + 9\mathbb{Z} & b + d + 3\mathbb{Z} \\ a + 3\mathbb{Z} & 0 + 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}_K.$$

Теперь рассмотрим «наиболее простую» полную ортогональную систему (нетривиальных) идемпотентов кольца $K = \{E_{11}, E_{22}\}$. Несложно видеть, что

$$K_K = E_{11}K_K \oplus E_{22}K_K = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^m} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_K \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \end{pmatrix}_K,$$

$${}_K K = {}_K K E_{11} \oplus {}_K K E_{22} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^m} & 0 \\ \mathbb{Z}_{p^n} & 0 \end{pmatrix}_K \oplus \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & \mathbb{Z}_{p^n} \end{pmatrix}_K.$$

Теорема 6.10 (Елфимова, Зыков, Норбосамбуев, БММ-2024). Для любой (нетривиальной) идемпотентной матрицы $A \in K$ верно

$$AK_K \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^m} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_K \text{ и } (E - A)K_K \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \end{pmatrix}_K.$$

(или наоборот (т.е. A и $E - A$ надо поменять местами))

Доказательство. Действительно, допустим, что

$$U \cdot A \cdot U^{-1} = E_{11} \text{ и } V \cdot (E - A) \cdot V^{-1} = E_{22}.$$

Пусть $X \in AK_K$, то есть $\exists B \in K$, что $X = AB$. Тогда гомоморфизм $f(X) = U \cdot X$ биективно отображает модуль AK_K в модуль $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^m} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_K$. Это следует из доказательства теоремы 4.6.

Аналогично $g(Y) = V \cdot Y$, где $Y \in (E - A)K_K$ — изоморфизм между $(E - A)K_K$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \end{pmatrix}_K$. □

Для левого модуля ${}_K K$ имеют место аналогичные утверждения.

Список литературы

- [1] *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
- [2] *Крылов П.А.*, Определители формальных матриц 2 порядка. // *Фундамент. и прикл. матем.*, 15:8 (2009), 145–211
- [3] *Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А.* О k -ниль-хороших кольцах формальных матриц // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2022, №77, 17–26. DOI: 10.17223/19988621/77/2
- [4] *Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А.* Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2021, №74, 30–42.
- [5] *Норбосамбуев Ц.Д.* Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2023, №85, 32–42.
- [6] *Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В.* Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* [в печати]
- [7] *Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В.* Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* [готовится к печати]
- [8] *Lambek J.* Lectures on Rings and Modules. Waltham, Mass., Blaisdell Pub. Co, 1966.
- [9] *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. Volume 2. Academic press New-York and London, 1977.