КЛАСТЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ТРЕХМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ

А. ВЕСНИН, А. ЕГОРОВ, И. ЕМЕЛЬЯНЕНКОВ, М. ИВАНОВ, Б. ЧУЖИНОВ

Аннотация. Этот текст представляет собой краткий отчет по проекту "Кластерные алгебры и трехмерная топология" (руководитель А. Веснин), который был реализован в рамках Большой Математической Мастерской – 2022 на площадке Научно-образовательного математического центра Томского государственного университета. Основная цель проекта состояла в изучении и развитии методов теории кластерных алгебр для решения задач топологии малых размерностей и смежных областей. В рамках проекта были получены предварительные результаты и намечены дальнейшие направления исследований, представляющиеся перспективными.

1. Введение

Теория кластерных алгебр восходит к работам Фомина и Зелевинского, а также Фока и Гончарова, опубликованным около 20 лет назад. В основе понятия кластерной алгебры лежит колчан (конечный ориентированный граф без петель и 2-циклов) и его преобразования по определенным правилам, называемые мутациями. Поскольку в качестве вершин можно использовать разные математические объекты, то почти сразу были установлены глубокие связи между кластерными алгебрами и различными областями современной математики. В последние годы несколько групп авторов активно исследуют связь кластерных алгебр с важными понятиями и объектами двумерной и трехмерной геометрии и топологии.

В рамках данного проекта изучались связи кластерных алгебр с представлениями групп кос и групп виртуальных кос (см. раздел 2), возможности вычисления объемов дополнений к узлам на основе представлений узлов замыканиями кос (см. раздел 3), изменения групп Коксетера при мутации соответствующих диаграмм Коксетера (см. раздел 4).

Во время работы над проектом приглашенный профессор Сеок Беом Йюн (Seok Beom Yoon) прочитал две лекции по тематике исследований: "Ptolemy varieties of 3-manifolds" и "Cluster variables on braids". В основу его лекций легли результаты работ [CKKY22, CYZ20] в которых устанавливается связь между алгебраическими структурами, связанными с узлами, и геометрическими характеристиками дополнений к узлам.

2. Кластерные алгебры и группа виртуальных кос

Группой виртуальный кос VB_n на n нитях называется группа, порожденная двумя типами порождающих – классическими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и виртуальными $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, и имеющая следующие определяющие соотношения:

Date: 10 сентября 2022 г.

Выполнено при поддержке НОМЦ ТГУ (соглашение с МОН РФ No. 075-02-2022-884).

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, && i = 1, 2, \dots, n-2,\\
\sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i, && |i-j| \geq 2,\\
\rho_i\rho_{i+1}\rho_i &= \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, && i = 1, 2, \dots, n-2,\\
\rho_i\rho_j &= \rho_j\rho_i, && |i-j| \geq 2,\\
\rho_i^2 &= 1, && i = 1, 2, \dots, n-1,\\
\sigma_i\rho_j &= \rho_j\sigma_i, && |i-j| \geq 2,\\
\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, && i = 1, 2, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Подгруппа, порожденная классическими порождающими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, является группой кос B_n на n нитях. При этом, соотношения

$$\rho_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1} \qquad \text{и} \qquad \rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\rho_i$$

в группе VB_n не выполняются, они называются *запрещенными*.

Рассмотрим наборы y-переменных длины $3n+1$: $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{3n+1})$. Для начала, пусть $n = 2$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$. В работе [HI15] были определены R-оператор

$$R : \overline{y} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1(\overline{y}) \\ \varphi_2(\overline{y}) \\ \varphi_3(\overline{y}) \\ \varphi_4(\overline{y}) \\ \varphi_5(\overline{y}) \\ \varphi_6(\overline{y}) \\ \varphi_7(\overline{y}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y_1(1+y_2+y_2y_4) \\ \dfrac{y_2y_4y_5y_6}{1+y_2+y_6+y_2y_6+y_2y_4y_6} \\ \dfrac{1+y_2+y_6+y_2y_6+y_2y_4y_6}{y_2y_4} \\ \dfrac{y_4}{(1+y_2+y_2y_4)(1+y_6+y_4y_6)} \\ \dfrac{1+y_2+y_6+y_2y_6+y_2y_4y_6}{y_4y_6} \\ \dfrac{y_2y_3y_4y_6}{1+y_2+y_6+y_2y_6+y_2y_4y_6} \\ (1+y_6+y_4y_6)y_7 \end{pmatrix}^T$$

и обратный ему оператор R^{-1}:

$$R^{-1} : \overline{y} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1(\overline{y}) \\ \psi_2(\overline{y}) \\ \psi_3(\overline{y}) \\ \psi_4(\overline{y}) \\ \psi_5(\overline{y}) \\ \psi_6(\overline{y}) \\ \psi_7(\overline{y}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1y_3y_4}{1+y_4+y_3y_4} \\ \dfrac{y_5}{1+y_4+y_3y_4+y_4y_5+y_3y_4y_5} \\ (1+y_4+y_3y_4+y_4y_5+y_3y_4y_5)y_6 \\ \dfrac{(1+y_4+y_3y_4)(1+y_4+y_4y_5)}{y_3y_4y_5} \\ y_2(1+y_4+y_3y_4+y_4y_5+y_3y_4y_5) \\ \dfrac{y_3}{1+y_4+y_3y_4+y_4y_5+y_3y_4y_5} \\ \dfrac{y_4y_5y_7}{1+y_4+y_4y_5} \end{pmatrix}^T$$

Как показано в [HI15], сопоставление каждому порождающему σ_i оператора, действующего локально как R, а обратному к нему σ_i^{-1} – оператора, действующего локально как R^{-1}, приводит к представлению группы классических кос B_n.

В рамках проекта исследовался следующий вопрос: можно ли определить операторы, соответствующие виртуальным порождающим ρ_i так, чтобы вместе с R и R^{-1} они позволили получить представление группы виртуальных кос VB_n? Поскольку порождающие ρ_i имеют второй порядок, естественно требовать это и от искомых операторов.

Заметим, что если $y_1 = y_4 = y_7 = -1$, то

$$\varphi_1(\overline{y}) = \varphi_4(\overline{y}) = \varphi_7(\overline{y}) = -1 \quad \text{и} \quad \psi_1(\overline{y}) = \psi_4(\overline{y}) = \psi_7(\overline{y}) = -1.$$

Полагая $(a, b, c, d) = (y_2, y_3, y_5, y_6)$, определим операторы

$$S(a,b,c,d) = \left(-\frac{acd}{1+a+d}, -\frac{1+a+d}{a}, -\frac{1+a+d}{d}, -\frac{abd}{1+a+d}\right).$$

и

$$S^{-1}(a,b,c,d) = \left(-\frac{c}{b+c+bc}, -(b+c+bc)d, -a(b+c+bc), -\frac{b}{b+c+bc}\right),$$

а также оператор $T(a, b, c, d) = (c, d, a, b)$. Сопоставим порождающим группы виртуальных кос σ_i и ρ_i операторы S_i и T_i, соответственно, действующие на векторах $Y \in \mathbb{R}^{2n}$ длины $2n$ по следующему правилу: на координатах с номерами $2i-1, 2i, 2i+1, 2i+2$ они действуют как S и T, а остальные координаты оставляют без изменения.

А. Егоров показал, что такое соответствие сохраняет определяющие соотношения и выяснил, когда не выполняются запрещенные соотношения.

Лемма 1. *Для любых векторов из $\mathbb{R}^{2n}$ операторы S_i и T_i удовлетворяют следующим соотношениям:*

(1) $S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
(2) $S_i S_j = S_j S_i$, *при* $|i-j| \geq 2$.
(3) $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
(4) $T_i T_j = T_j T_i$, *при* $|i-j| \geq 2$.
(5) $T_i^2 = 1$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
(6) $T_i T_j = T_j T_i$, *при* $|i-j| \geq 2$.
(7) $T_i T_{i+1} S_i = S_{i+1} T_i T_{i+1}$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Лемма 2. *Пусть (a, b, c, d, e, f) – вектор в $\mathbb{R}^6$. Операторы S_i и T_i не удовлетворяют запрещенным соотношениям*

(a) $T_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i T_{i+1}$, *при* $i = 1$,

тогда и только тогда когда ни одна из переменных a, d, f не равна -1;

(b) $T_{i+1} S_i S_{i+1} = S_i S_{i+1} T_i$, *при* $i = 1$,

тогда и только тогда когда ни одна из переменных a, c, f не равна -1;

Установленные свойства будут в дальнейшем использованы для построения представления группы виртуальных кос, обобщающего представление группы классических кос, основанное на кластерном подходе.

3. От замкнутой косы к объему дополнения узла

Хорошо известно, что среди узлов в трехмерной сфере очень много таких, что на трехмерном многообразии, являющемся дополнением к узлу, можно ввести полную риманову метрику постоянной отрицательной кривизны. Такие узлы называют *гиперболическими*. Наличие римановой метрики позволяет вычислять геометрические характеристики узла, связанные с этой метрикой. Одной их таких характеристик является объем дополнения узла, часто для простоты называемый *объемом узла*.

Удивительно, что описанное выше представление группы кос из работы [HI15] позволяет вычислять объемы узлов. В качестве отправной точки проекта был изучен метод, описанный в [HI15]. Он включает в себя:

- представление узла как замыкания некоторой косы;
- описание ассоциированного с таким представлением разбиения дополнения к гиперболическому узлу на идеальные октаэдры и тетраэдры («идеальность» означает, что все вершины октаэдров и тетраэдров являются бесконечно удаленными точками пространства Лобачевского);
- нахождение мутаций кластерных алгебр, соответствующих полученному геометрическому разбиению на идеальные октаэдры и тетраэдры;
- нахождение решений уравнений, индуцированных циклами мутаций.

Б. Чужинов, развивая идеи работ [CYZ20, HI15], реализовал указанный метод для узла 6_1, который можно представить как замыкание косы на четырех нитях $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1} \in B_4$. Объем гиперболического многообразия $S^3 \setminus 6_1$ приближенно равен 3.16396. Далее предполагается применить этот подход к вычислению объемов некоторых классов гиперболических узлов и изучить возможность его обобщения.

4. Мутации колчанов и группы Коксетера

При изучении действий групп на пространствах постоянной кривизны важную роль играет изучение групп Коксетера. Группа W называется *группой Коксетера*, если она имеет представление

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \,|\, s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = e \rangle,$$

где $m_{ii} = 1$ и $m_{ij} \in \mathbb{N}_{>1} \cup \infty$ для всех $i \neq j$. Здесь $m_{ij} = \infty$ означает, что $s_i s_j$ имеет бесконечный порядок. Такими группами являются дискретные группы, порожденные отражениями в гранях многогранника. Пара (W, S), состоящая из группы Коксетера и набора ее порождающих $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, называется системой Коксетера. Хорошо известно, что систему Коксетера можно задавать *диаграммой Коксетера* – графом, вершины которого соответствуют порождающим s_i, ребра – соотношениям на $s_i s_j$, а веса на ребрах – степеням m_{ij}.

В работе [FT16] диаграммы Коксетера для групп с $m_{ij} \in \{2, 3\}$ рассматривались как колчаны, и были определены их мутации, приводящие к новым группам Коксетера. Была установлена связь между исходными и новыми группами, описано возникающее действие на гиперболических многообразиях.

В рамках проекта И. Емельяненков и М. Иванов изучили методы, реализованные в работе [FT16], и предложили возможные обобщения конструкции мутации колчана для групп Коксетера общего вида.

Список литературы

[CKKY22] Y. Cho, H. Kim, S. Kim, S. Yoon, *Parabolic representations and generalized Riley polynomials*, https://arxiv.org/abs/2204.00319.

[CYZ20] J. Cho, S. Yoon, C. K. Zickert, *On the Hikami-Inoue conjecture*, Algebraic and Geometric Topolology **20(1)** (2020), 279–301. Preprint version is available at https://arxiv.org/abs/1805.11841.

[FT16] A. Felikson, P. Tumarkin, *Coxeter groups, quiver mutations and geometric manifolds*, J. London Math. Soc. **94(1)** (2016), 38–60. Preprint version is available at https://arxiv.org/abs/1409.3427.

[HI15] K. Hikami, R. Inoue, *Braids, volume and cluster algebras*, Algebraic and Geometric Topology, 2015, 2175–2194. Preprint version is available at https://arxiv.org/abs/1304.4776.