Объемы прямоугольных гиперболических многогранников

Наш проект в рамках Большой математической мастерской 2022 посвящен исследованию многогранников, которые могут реализовываться в пространстве Лобачевского с прямыми углами (так, чтобы все углы были прямые – и двугранные, и углы в гранях). Такие многогранники называют еще многогранниками Погорелова. Они примечательны тем, что задают «правильные» разбиения пространства Лобачевского. Поэтому из них можно конструировать гиперболические 3-многообразия, попарно отождествляя конгруэнтные грани.

Авторский коллектив проекта составили:

- Николай Владимирович Абросимов, старший научный сотрудник ИМ СО РАН и РНОМЦ ТГУ, доцент НГУ, и.о. зав. лабораторией топологии и динамики ММФ НГУ
- Выонг Хыу Бао, к.ф.-м.н. (PhD), научный сотрудник Регионального научно-образовательного центра ТГУ
- Степан Владимирович Степанищев, магистрант ММФ НГУ

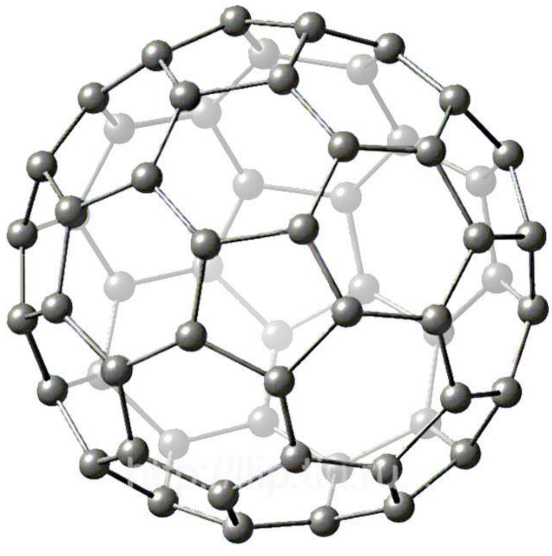
Введение

Следствие из теоремы Андреева (1967)

Простой многогранник P реализуется в пространстве Лобачевского в виде ограниченного многогранника с прямыми двугранными углами, если и только если у P нет 3- и 4-поясов.

Известно, что все прямоугольные гиперболические многогранники могут быть построены с помощью операции прямой суммы (склеивания пар многогранников по общей грани) из двух семейств: фуллеренов и призм Лёбелля.

Фуллереном называется многогранник, каждая грань которого является либо пятиугольником, либо шестиугольником, а в каждой вершине сходятся ровно три грани.



Фуллерен C_{60}

Следствием формулы Эйлера для многогранников является то, что любой фуллерен имеет ровно 12 пятиугольных граней, тогда как число шестиугольных граней может быть разным.

Призма Лёбелля сотоит из двух n-угольных граней и боковой поверхности из 2n пятиугольников (см. рисунок для n=9).

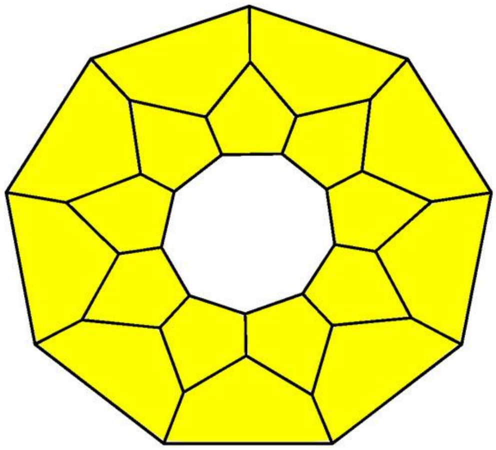


Рисунок Н. Ероховца: 9-угольная призма Лёбелля

Интересный подкласс фулеренов составляют многогранники Гольдберга. *Многогранник Гольдберга* – это любой фуллерен, имеющий вращательную симметрию икосаэдра. Впервые они были описаны в 1937 году Майклом Голдбергом (1902–1990). Примерами многогранников Гольдберга являются додекаэдр, C_{60} (усеченный икосаэдр) и многие другие.

Шаги по решению Задачи

Нас интересуют объемы прямоугольных многогранников в пространстве Лобачевского. Мы попробовали придумать «рецепт», состоящий из простых шагов, следуя которым, можно находить точные формулы для некоторых семейств прямоугольных гиперболических многогранников.

Например, каждый многогранник Гольдберга можно составить с определенного набора тетраэдров специального типа: у которых два каких-то ребра с общей вершиной имеют одинаковую длину и ортогональны третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Поэтому на первом шаге мы получили точную формулу для объемов гиперболических тетраэдров такого типа, точнее, даже для несколько более широкого 4-параметрического семейства гиперболических тетраэдров $T(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \psi)$: в одной из вершин сходятся ребра с длинами ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, угол между ребрами ℓ_1, ℓ_2 равен ψ, а ребро ℓ_3 ортогонально ℓ_1 и ℓ_2. Именно такой выбор параметров в семействе тетраэдров был обусловлен удобством для будущего применения формулы объема для вычисления объемов более сложных многогранников, составленных из них. Для получения этой формулы был использован новый подход: вместо исследования дифференциального уравнения Шлефли и поиска его точных решений, мы применили прямое интегрирование по элементу объема, формулу Фубини, но сначала придумали удобную модель такого тетраэдра: не ограничивая общности поместили его в «стандартное» положение в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве. В результате получилась не очень сложная формула, причем оказалось, что компьютер по ней считает хорошо при любых выбранных значениях параметров.

Затем применили наш «рецепт» для вычисления объемов правильных икосаэдра и додэкаэдра в пространстве Лобачевского, а также полуправильного фуллерена C_{60} – с произвольными углами, в том числе прямыми.

Чтобы убедиться, что ответы получаются правильные, мы параллельно получили объемы указанных многогранников другим способом, опирающимся на уравнение Шлефли. Интегральные формулы для объемов ожидаемо получились другими, но их значения точно совпали: мы составили несколько таблиц для сравнения вычислений.

Начали писать статью.

Что еще хочется сделать

Кроме собственно гиперболического объема нас интересует нормированный объем. Этот этап пока находится в стадии разработки. Нормировать можно по-разному, например, по площади поверхности в степени 3/2 или по кубу длины ребра. Интересно исследовать асимптотику, а также найти, при каких условиях нормированный объем максимален.