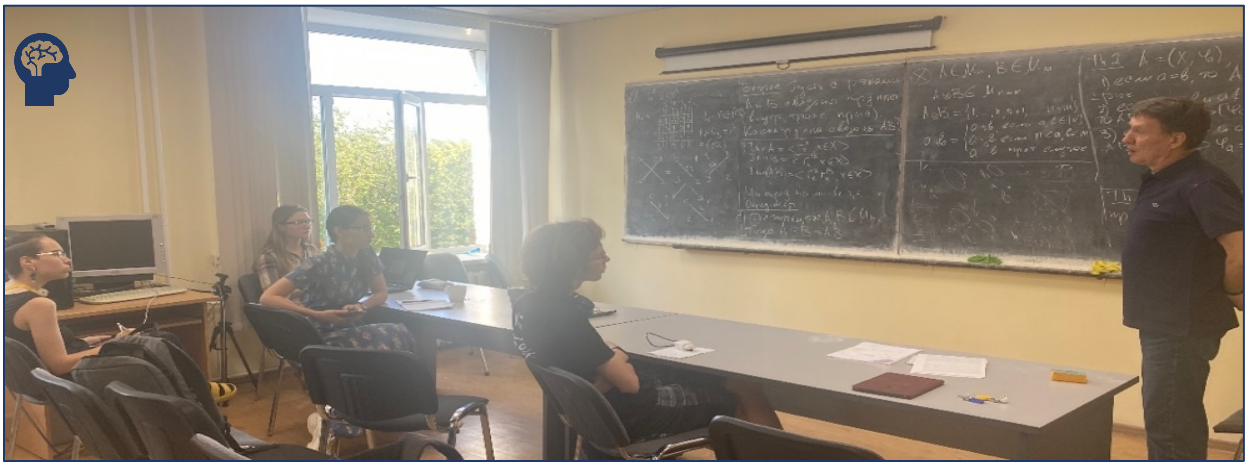
УЗЛЫ, КВАНДЛЫ И ТЕРНАРЫ

Заказчик: Бардаков Валерий Георгиевич
Куратор: Козловская Татьяна Анатольевна
Участники: Гундарева Александра, Каданцев Георгий, Конева Полина, Мархинина Елизавета

Данная научно-популярная заметка посвящена работе над проектом «Узлы, квандлы и тернары». Мы расскажем о том, каких результатов удалось достичь нашей команде в ходе Большой математической мастерской (далее БММ). Сначала мы определим проблемы и задачи, над которыми работали. Затем простыми словами опишем объекты исследования (рэки, квандлы, магмы, тернары), которые изучали. Разберем теоретический материал, рассмотрим ряд примеров, для лучшего понимания происходящего, снабдим текст рисунками и таблицами. И, наконец, покажем какие задачи были нами решены и сформулируем основные теоремы.

Это может быть интересно!

Основная часть рабочего времени была уделена погружению команды проекта в суть открытых проблем. Участники начинали путь с чтения чернового варианта текста, подготовленного заказчиком проекта, и закончили предъявлением теорем, большую часть которых так или иначе доказывали непосредственно сами. В рамках данного проекта д.ф.-м.н. Малютиным А.В. была прочитана познавательная лекция, посвященная изучению базовой теории, связанной с появлением понятия квандла, а также рассмотрению различных открытых проблем в этой области исследования. Наш проект проходил на площадке Томского государственного университета, в очном формате. Это дало свои преимущества! Живое общение (после ковидных ограничений) развило навыки выступления, коммуникации. Мы плодотворно поработали!



Проблемы и задачи проекта

В рамках проекта мы отвечали на вопросы:

- Как связана категория квандлов с категорией графов отображений?
- Можно ли на n элементном множестве определить произведение квандловых структур, дающее нециклическую группу?
- Зачем нужны тернары? Почему нельзя обойтись группоидами?
- Можно ли используя операцию произведения квандлов, представить всякий квандл в виде произведения элементарных квандлов?

За основу работы взята статья В.Г Бардакова и Д.А. Федосеева «Умножение квандловых структур». Произведение квандлов было определено в этой работе. Статья доступна по ссылке https://arxiv.org/pdf/2204.12571.pdf

В проекте мы изучали следующие проблемы:

⇒ Построить теорию графовых квандлов.

⇒ Понять какие конструкции можно использовать для построения новых квандлов из уже известных?

⇒ Поиск нетривиальных связей между квандлами и тернарами.

Объекты исследования

Во время БММ мы изучали рэки и квандлы. Напомним необходимые определения и приведем примеры.

Квандлом называется непустое множество X с одной бинарной операцией $\circ$: $X \times X \to X$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) идемпотентность: $x \circ x = x \ \forall x \in X$;
2) обратимость: $\forall x, y \in X \ \exists! \, z \in X$ такой, что $z \circ x = y$;
3) самодистрибутивность:$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$, где $x, y, z \in X$.

Алгебраическая система, удовлетворяющая только 2) и 3) аксиомам квандла называется рэком.

Таким образом, квандл — это рэк, операция $\circ$ на котором идемпотентна:

$$x \circ x = x.$$

Квандл – это (почти) полный инвариант узла.

Примеры

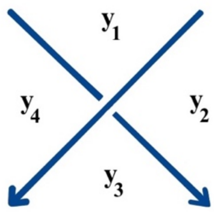
- Пусть $Q = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ кольцо полиномов Лорана с целыми коэффициентами. Определим операцию $\circ$: $Q \times Q \to Q$ по формуле: $x \circ y = tx + (1-t)y$. Квандл $(Q, \circ)$ называется *квандлом Александера*;
- Пусть Q-группа. Определим операцию $\circ$: $Q \times Q \to Q$ по формуле: $x \circ y = yxy^{-1}$. Этот квандл $(Q, \circ)$ называется *сопряженным квандлом*;
- Пусть Q-группа. Определим операцию $\circ$: $Q \times Q \to Q$ по формуле: $x \circ y = yx^{-1}y$. Квандл $(Q, \circ)$ называется *коре квандлом;*
- Пусть $X = Z_n$ - вычеты по модулю n, $n \geq 1$, и операция $\circ$: $X \times X \to X$, определена следующим образом: $x \circ y = 2y - x \ (mod\ n)$. Пара $(X, \circ)$ является *диэдральным квандлом.*

В курсе алгебры Вы встречались с бинарными алгебраическими операциями: сложение, умножение. Также существуют и активно изучаются тернарные и другие n-арные операции.

Тернаром называется непустое множество X с одной тернарной алгебраической операцией: $[\cdot,\cdot,\cdot]$: $X \times X \times X \to X$.

Терноидом называется непустое множество с несколькими тернарными алгебраическими операциями.

Покажем, как тернары возникают в теории узлов. Опять рассмотрим диаграмму некоторого узла. Она разбивает плоскость на конечное число областей. Обозначим эти области символами $y_1, y_2, \ldots$ В каждом перекрестке напишем соотношение: $[y_4, y_1, y_2] = y_3$. Таким образом, каждой диаграмме узла соответствует некоторый тернар.



Мы изучали три категории: $\mathcal{C}\Gamma$ - категория графов, $\mathcal{M}\Gamma$ - категория графов отображений, а также категория магм $\mathcal{M}ag$. При этом под графом мы понимаем графы, допускающие петли и кратные ребра. *Под магмой* понимаем множество с одной бинарной алгебраической операцией. Категория магм содержит категорию групп, категорию рэков и категорию квандлов. Категория графов и категория магм хорошо известны. Категория графов отображений является новой и была определена нами. Дадим определение.

Объектами категории $\mathcal{M}\Gamma$ являются пары (Γ, c), где Γ - граф, а c - отображение c: $V \to Map(V, V)$, которое каждой вершине $v \in V$ сопоставлят отображение $\varphi_v = c(v)$: $V \to V$.

Далее для простоты будем писать $\Gamma(c) = (\Gamma, c)$. *Морфизмами* в категории $\mathcal{M}\Gamma$ являются отображения $f: \Gamma(c) \to \Gamma'(c')$ такие, что $f: \Gamma \to \Gamma'$ - морфизм графов и $f: (c(v)) = c'\,(f(v)), v \in V$.

Результаты

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1

Существует функтор F из категории графов отображений $\mathcal{M}\Gamma$ в категорию $\mathcal{M}ag$.

Функтор F сопоставляет графу отображений $\Gamma(c)$ магму $(V,*)$, где V - множество вершин графа Γ, а операция определена правилом $u * v = \varphi_v(u)$.

С другой стороны, если $(X,\cdot)$ - некоторая магма, то ей соответствует граф Кэли $\Gamma_A(X)$ относительно множества порождающих A. Если в этом графе забыть про ориентацию ребер и каждой вершине сопоставить отображение, являющееся умножением справа на эту вершину, то получим граф отображений.

ТЕОРЕМА 1

Если $(X,\cdot)$, - рэк, а $\Gamma_X(X)$ - соответствующий граф Кэли относительно множества X, то умножение справа на каждый элемент из X индуцирует автоморфизм графа $\Gamma_X(X)$.

Соответствующие примеры показывают, что если вместо графа Кэли $\Gamma_X(X)$ взять граф Кэли $\Gamma_A(X)$, где $A \neq X$, то теорема перестает быть справедливой.

?

Далее мы изучали такой вопрос: «*При каких условиях магма, построенная по графу отображений $\Gamma(c)$ является квандлом*». Ответ дает

ТЕОРЕМА 2

Пусть $\Gamma(c)$ - граф отображений. Магма $F(\Gamma(c))$ является квандлом тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in V$ выполнены следующие три условия:
1) $\varphi_v(v) = v$,
2) $\varphi_v \in Sym(V)$,
3) $\varphi_{u*v} = \varphi_v^{-1}\varphi_u\varphi_v$.

Следующее утверждения дает условия, при которых функтор F переводит граф отображений $\Gamma(c)$ в рэк, который не является квандлом.

ТЕОРЕМА 3

Пусть $\Gamma(c)$ - граф отображений, удовлетворяющий следующим условиям:
1) $c(v) = \psi$, для всех $v \in V$, где ψ - некоторое фиксированное отображение $V \to V$,
2) $\psi \in Sym(V)$.

Тогда $F(\Gamma(c))$ - рэк, который при $|V| > 1$ и $\psi \neq id$ не является квандлом.

Символом $\mathcal{M}_n$ будем обозначать множество магм, состоящих из n элементов при $n > 0$. Будем считать, что всякая магма из $\mathcal{M}_n$ определена на множестве $\{1,2,\dots,n\}$. Для удобства будем понимать под $\mathcal{M}_0$ пустое множество. Положим $\mathcal{M} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$ и определим на этом множестве две операции: "$\cdot$" и "$\otimes$".

Пусть $(A, \cdot_A)$, $(B, \cdot_B) \in \mathcal{M}_n$. Тогда их *произведение* $A \cdot B$ - n элементная магма с операцией $x \cdot y = x(\cdot_A \cdot_B)y = (x \cdot_A y) \cdot_B y$, где $x, y \in \{1,2,\dots,n\}$.
Пусть $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{M}_m$. Тогда $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n+m}$, $A \otimes B = \{1,\dots,n,n+1,\dots,m+n\}$ и операция определена следующим равенством:

$$a \otimes b = \begin{cases} a \cdot_A b, \text{если } a, b \in \{1,\dots,n\}; \\ a \cdot_B b, \text{если } a, b \in \{n+1,\dots,m\}; \\ a, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Используя операцию "$\otimes$" мы можем определить произведение произвольных магм из $\mathcal{M}$.
Магма (рэк, квандл) Q называется *элементарной*, если $\phi_a \neq id$ для не более одного элемента $a \in Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2

1. Элементарная магма Q такая, что $\phi_a \neq id$, $a \in Q$, является квандлом тогда и только тогда, когда $\phi_a(a) = a$ и $\phi_a \in \mathrm{Sym}(V)$.
2. Всякий элементарный рэк является квандлом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3

При фиксированном $a \in V$ произведение элементарных квандлов, для которых $\phi_a \neq id$ является элементарным квандлом.

ТЕОРЕМА 4

Всякий рэк является произведением элементарных рэков.

Произведение квандлов определяется также как произведение магм, которое дано выше.
На трехэлементном множестве $\{1,2,3\}$ существует (с точностью до изоморфизма) три не изоморфных квандла T_3 – тривиальный квандл, R_3 – диэдральный квандл, J_3 – квандл Джойса. Таблицы произведений этих квандлов приведены ниже.

T_3	**1**	**2**	**3**
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

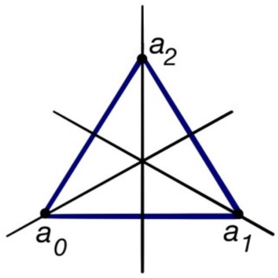
R_3	**1**	**2**	**3**
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

J_3	**1**	**2**	**3**
1	1	1	1
2	3	2	2
3	2	3	3

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4

На множестве $\{J_3^i, R_3, T_3\}$, где J_3^i – три изоморфных квандла Джойса, определим тройное произведение: для любых $A, B, C \in \{J_3^i, R_3, T_3\}$, $[A, B, C] = ABC$. Эта тернарная операция коммутативна, и множество $\{J_3^i, R_3, T_3\}$ замкнуто относительно неё.

Диэдральные квандлы R_nимеют геометрическую интерпретацию. Например, в R_3 мы можем считать, что в любой вершине "сидит" отражение τ_i и $a_i * a_j = a_i \tau_j$.



Если вас заинтересовал наш проект или возникли дополнительные вопросы, то вы всегда сможете задать их написав нам:

bardakov@math.nsc.ru;
t.kozlovskaya@math.tsu.ru.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884)